

УДК 621.165

**В. И. ГНЕСИН, Л. В. КОЛОДЯЖНАЯ, РОМУАЛЬД ЖАНДКОВСКИ, А. В. ДЕМЧЕНКО****МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ АЭРОУПРУГИХ ЯВЛЕНИЙ В ЛОПАТОЧНОМ ВЕНЦЕ ТУРБОМАШИН**

Запропоновано чисельний метод розв'язання зв'язаної задачі нестационарної аеродинаміки лопаткового вінця турбінного ступеня в потоці в'язкого газу і пружних коливань лопаток під дією аеродинамічних навантажень з використанням модального підходу. Проведено чисельний аналіз аеропружної поведінки лопаткового вінця останнього ступеня осевої турбомашини з довжиною робочої лопатки 950 мм. Показано, що коливання лопаток ротора є стійкими з переважаючою частотою близькою до частоти 1-ої власної форми коливань. Запропонований метод вирішення зв'язаної аеропружної задачі дозволяє прогнозувати амплітудно-частотний спектр коливань лопаток в потоці газу, включаючи вимушені коливання і самозбудні (флатер або автоколивання).

**Ключові слова:** в'язкий потік, лопатковий вінець осевої турбіни, автоколивання, зв'язана задача, чисельний метод.

Предложен численный метод решения связанной задачи нестационарной аэродинамики лопаточного венца турбинной ступени в потоке вязкого газа и упругих колебаний лопаток под действием аэродинамических нагрузок с использованием модального подхода. Проведен численный анализ аэроупругого поведения лопаточного венца последней ступени осевой турбомашини с длиной рабочей лопатки 950 мм. Показано, что все формы колебаний лопаток ротора являются устойчивыми с преобладающей частотой близкой к частоте 1-ой собственной формы колебаний. Предложенный метод решения связанной аэроупругой задачи позволяет прогнозировать амплитудно-частотный спектр колебаний лопаток в потоке газа, включая вынужденные колебания и самовозбуждающиеся (флаттер или автоколебания).

**Ключевые слова:** вязкий поток, лопаточный венец осевой турбины, автоколебания, связанная задача, численный метод.

There proposed the numerical method of coupled problem solution of unsteady aerodynamic for turbine stage blade row in viscous gas flow and elastic blades oscillations by the action of aerodynamic loads with use of modal approach. 3D viscous gas flow through the blade row axial turbine stage with periodicity on the whole annulus is described by unsteady Navier-Stokes equations in the form of conservation laws, which are integrated with use of the explicit monotonous finite-volume Godunov's difference scheme and moving hybrid H-O grid. There performed the numerical analysis of aeroelastic behaviour of axial turbomachine last stage blade row with moving blade length of 950 mm. There shown that rotor blades oscillations are stable with dominant mode frequency closed to frequency of the first natural oscillation mode. The proposed method of solution of coupled aeroelastic problem allows to predict the amplitude-frequency spectrum of blades oscillations in gas flow, including forced oscillations and self-excited oscillations (flutter or autooscillations).

**Keywords:** viscous flow, blade row axial turbine, autooscillations, coupled problem, numerical

**Введение.** Нестационарные явления, вызванные движением лопаток под действием возмущающих сил любой природы, характеризуются обменом энергией между потоком газа и колеблющимися лопатками и составляют основу физического механизма самовозбуждающихся колебаний, которые могут либо затухать (аэродемпфирование) либо проявляться в неустойчивой форме флаттера.

При проектировании или модернизации современных турбомашин повышенной удельной мощности и соответственно высокими аэродинамическими нагрузками чрезвычайно актуальной является проблема аэроупругого поведения лопаток и прогнозирования аэроупругой неустойчивости (флаттер, резонансные колебания). Особую важность эта проблема приобретает при разработке высоконагруженных компрессорных и вентиляторных венцов, а также последних ступеней паровых и газовых турбин, работающих в нерасчетных условиях.

В последнее время развиты новые подходы для исследования аэроупругого поведения лопаточных венцов в трехмерном потоке идеального [1–3] или вязкого газа [4, 5–7], основанные на последовательном по времени интегрировании уравнений движения жидкости при заданном гармоническом законе колебаний лопаток.

В данной работе авторами предложен численный метод одновременного интегрирования уравнений

течения вязкого газа (уравнения Навье-Стокса) и уравнений колебаний лопаток под действием мгновенных нестационарных нагрузок (с использованием модального подхода).

Целью настоящей работы является численный анализ трехмерного потока вязкого газа через лопаточный венец последней ступени осевой турбины и колебаний лопаток с учетом неравномерности потока, вызванной неравномерным распределением давления за рабочим колесом.

**Основные направления в аэроупругости турбомашин.** Аэроупругие явления – это явления взаимодействия инерционных, упругих и аэродинамических сил, действующих на конструкцию, обтекаемую потоком газа.

Тенденция развития газо- и паротурбинных двигателей с высокими аэродинамическими показателями и соответственно высоко нагруженными лопатками неумолимо приводит к проблеме аэроупругого поведения лопаток не только в компрессорах, но и в последних ступенях паровых и газовых турбин. Нестационарные аэродинамические силы, действующие на лопатки компрессоров и турбин, могут вызвать чрезмерные вибрации лопаток, приводящие к разрушению конструкции. Поэтому аэроупругое поведение лопаток представляет важную проблему надежности и безопасности.

Аэроупругие явления в турбомашине характеризуются взаимодействием двух физических

сред – жидкой и твердой, движение которых описывается нелинейными уравнениями течения газа и движения лопаток, которые не могут быть решены аналитически, и даже численное решение совместной системы уравнений для произвольной геометрии до сих пор представляет значительные трудности.

В свое время была предложена гипотеза о том, что нестационарные эффекты, вызванные колебаниями лопаток, значительно меньше нестационарных эффектов, связанных с неравномерностью потока. Таким образом было принято допущение об отсутствии обратной связи влияния колеблющихся лопаток на поток.

Это допущение позволило разделить две физические среды и добиться значительных успехов в каждой из них.

Одно из направлений связано с развитием нестационарного аэродинамического анализа (рис. 1) не зависящего от источника нестационарности.



Рис. 1 – Математические модели нестационарной аэродинамики



Рис. 2 – Основные направления в аэроупругости турбомашин

Нестационарный аэродинамический анализ прошел путь от классической линейной теории через методы линеаризации уравнений потенциалных и вихревых течений, нелинейные уравнения Эйлера до методов решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса.

Второе направление связано с изучением воздействия переменных аэродинамических сил на лопатки. Это воздействие включает статическую аэроупругость и вынужденные колебания (рис. 2). Основная проблема вынужденных колебаний – отстройка от резонанса, которая решается практически с помощью диаграммы Кэмпбелла. Реальный интерес для конструктора представляет

прогнозирование уровня амплитуд вынужденных колебаний. Эта задача не имеет принципиальных трудностей в рамках теории колебаний и может считаться практически решенной.

Некорректность принятого допущения об отсутствии обратной связи, т. е. влияния нестационарных эффектов, вызванных колеблющимися лопатками, на колебания этих лопаток, заключается в том, что в результате разделения сред из рассмотрения исключена наиболее сложная и наименее изученная проблема флаттера.

Флаттер – это неустойчивые самовозбуждающиеся колебания конструкции в потоке газа, которые являются результатом непрерывного взаимодействия и обмена энергией между потоком и вибрирующей конструкцией, и принципиально не могут быть изучены в рамках каждой из разделенных сред – аэродинамике или динамике. В турбомашине эта проблема усугубляется тем, что заранее неизвестен межлопаточный угол сдвига по фазе колебаний лопаток, который в отличие от флаттера крыла, играет решающую роль в возникновении так называемого решетчатого флаттера.

Методы прогнозирования флаттера (рис. 3) могут быть разделены на две группы – классические и интегральные, отличающиеся подходом к постановке задачи. Классические методы игнорируют взаимодействие между жидкостью и конструкцией, интегральные – пытаются моделировать его.



Рис. 3 – Методы прогнозирования флаттера

Принципиальное отличие между классическими и интегральными методами заключается в том, что первые могут прогнозировать возникновение флаттера как внезапный переход из устойчивой области движения в неустойчивую и не могут рассчитывать переходный процесс, в то время как вторые могут рассчитывать переходный процесс и прогнозировать предельные циклы колебаний, т. е. автоколебания.

Интегральные методы включают частично-интегральные и полностью интегральные методы.

Полностью интегральные методы основаны на общей постановке для полной системы уравнений с использованием единого интегратора и дискретизацией двух сред в едином Лагранже-Эйлеровом пространстве.

Частично-интегральные методы сводятся к последовательному интегрированию уравнений для жидкости и упругой конструкции с обменом информацией на каждом шаге интегрирования. В рамках этой идеи существуют различные подходы, отличающиеся динамической моделью (рис. 3).

Наибольшее распространение получили частично-интегральные методы с использованием динамической модели лопатки (модальный подход).

В последнее десятилетие были развиты частично-интегральные методы для исследования самовозбуждающихся колебаний изолированного лопаточного венца [1–3]. Однако в этих работах предполагалось, что возмущения в потоке вызваны колебаниями лопаток, а поток на бесконечности перед и за венцом содержит лишь малые возмущения.

В настоящей работе представлен численный метод решения связанной аэроупругой задачи для лопаточного венца ступени осевой турбомашин без разделения нестационарных эффектов, вызванных окружной неравномерностью основного потока, и связанных с колебаниями лопаток под действием переменных аэродинамических сил.

**Постановка задачи аэроупругости.**

**Аэродинамическая модель.** Трехмерное нестационарное трансзвуковое течение вязкого газа через лопаточный венец последней ступени осевой турбомашин рассматривается в физической области и описывается полной системой уравнений Навье-Стокса, осредненных по Рейнольдсу, представленной в интегральной форме законов сохранения для конечного объема  $\Omega$ , ограниченного поверхностью  $\sigma$ , во вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  декартовой системе координат [6–8]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \int_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma + \int_{\Omega} H d\Omega = \int_{\sigma} \vec{R} \cdot \vec{n} d\sigma \quad (1)$$

где  $U$  – символический вектор консервативных переменных;  $\vec{F}$  и  $\vec{R}$  – символические векторы конвективных и вязких потоков,  $H$  – источник член в неинерциальной системе координат,  $\vec{n}$  – вектор единичной нормали к поверхности  $\sigma$ .

Для расчета вязких потоков в уравнении (1) применяется алгебраическая модель турбулентности, основанная на оригинальной двухслойной модели Себеси и Смита и модифицированная Болдвинном и Ломаксом [4].

Постановка граничных условий основана на одномерной теории характеристик. Принимая, что осевая скорость во входном и выходном сечениях расчетной области является дозвуковой, в качестве граничных условий принимаются: во входном сечении задаются полное давление  $p_0$ , полная температура  $T_0$  и углы потока в тангенциальном и меридиональном сечениях  $\beta$ ,  $\gamma$ ; на выходной границе – статическое давление  $p_2$ .

На «твердых» стенках расчетной области задаются:

- условие «прилипания»  $\vec{v} = \vec{v}_w$ , где  $\vec{v}_w$  – скорость перемещения стенки в рассматриваемой системе координат;

- тепловой поток  $q_w$ , в частности, для адиабатической стенки  $q_w = 0$ ;

- соотношение для давления, полученное проектированием на нормаль к стенке уравнения сохранения импульса

$$\frac{\partial p}{\partial n} = grad_n \tau.$$

**Разностная схема.** Учитывая неперIODичность потока в окружном направлении из-за колебаний лопаток, следует в расчетную область включать все лопатки РК на полной дуге окружности.

Разностная сетка разбивается на сегменты, каждый из которых включает одну лопатку и имеет протяженность в окружном направлении, равную шагу ротора.

В свою очередь, каждый из сегментов дискретизируется с использованием гибридной  $H-O$  сетки для каналов ротора (рис. 4). При этом внешняя  $H$ -сетка остается неподвижной в течение всего расчета, а внутренняя  $O$ -сетка в канале ротора перестраивается на каждой итерации по заданному алгоритму так, что ее внешние узлы остаются неподвижными, а внутренние жестко связаны с колеблющейся лопаткой.

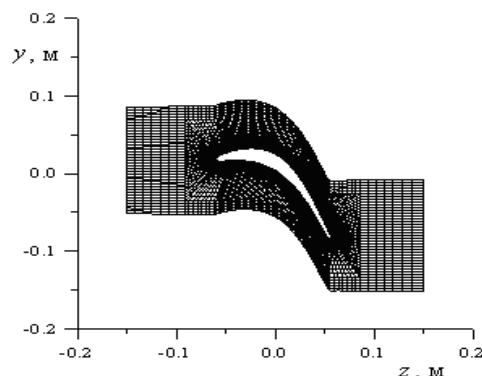


Рис.4 – Разностная сетка в среднем сечении

Дискретная форма уравнений (1) получена с использованием разностной схемы Годунова 2-го порядка точности, обобщенной на случай произвольной пространственной деформируемой разностной сетки в виде [9]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta t} [3U^{n+1}\Omega^{n+1} - 4U_n\Omega_n + U_{n-1}\Omega_{n-1}] + \\ & [(-U w_n + E - R)\sigma]_{i+1} - [(-U w_n + E - R)\sigma]_i + \\ & + [(-U w_n + F - S)\sigma]_{j+1} - [(-U w_n + F - S)\sigma]_j + \\ & + [(-U w_n + G - Q)\sigma]_{k+1} - [(-U w_n + G - Q)\sigma]_k \\ & + H_n\Omega_n = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь нижние и верхние индексы соответствуют “старым” и “новым” ячейкам;  $\sigma$  и  $w_n$  – площадь и нормальная скорость центра грани.

Газодинамические параметры на “средних” гранях находятся из решения задачи Римана с использованием итерационного процесса. Шаг интегрирования  $\Delta t$  определяется из условия устойчивости разностной схемы (2) и может быть представлен в виде

$$\Delta t = \frac{\tau_{x_1} \cdot \tau_{x_2} \cdot \tau_{x_3}}{\tau_{x_1} \cdot \tau_{x_2} + \tau_{x_1} \cdot \tau_{x_3} + \tau_{x_2} \cdot \tau_{x_3}},$$

$$\tau_{x_i} = \frac{h_{x_i \min}}{\max(|\bar{v}_i| + a, a - |\bar{v}_0|)},$$

где  $i = 1, 2, 3$ ;  $a$  – скорость звука.

**Динамическая модель.** Динамическая модель колеблющейся лопатки в линейной постановке описывается матричным уравнением

$$[M]\{\ddot{u}(x, t)\} + [C]\{\dot{u}(x, t)\} + [K]\{u(x, t)\} = [F], \quad (3)$$

где  $[M]$ ,  $[C]$  и  $[K]$  – матрицы масс, механического демпфирования и жесткости лопатки соответственно;

$\{u(x, t)\}$  – перемещение лопатки;

$[F]$  – вектор нестационарных аэродинамических нагрузок. С использованием модального подхода:

$$\{u(x, t)\} = [U(x)]\{q(t)\} = \sum_{i=1}^N \{U_i(x)\}q_i(t),$$

где  $U_i(x)$  – вектор перемещения лопатки по  $i$ -й моде;  $q_i(t)$  – модальный коэффициент, и условия ортогональности собственных форм колебаний матричное уравнение (3) приводится к системе независимых обыкновенных дифференциальных уравнений относительно модальных коэффициентов собственных форм

$$\ddot{q}_i(t) + 2h_i\dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \lambda_i(t), \quad (4)$$

где  $h_i$  – коэффициент механического демпфирования  $i$ -й моды;  $\omega_i$  – собственная частота  $i$ -й формы;  $\lambda_i$  – модальная сила, соответствующая перемещению по  $i$ -й форме, которая рассчитывается на каждой итерации по мгновенному распределению давления на поверхности лопатки

$$\lambda_i = \frac{\iint p \bar{U}_i \cdot \bar{n}^\circ d\sigma}{\iiint_V \rho \bar{U}_i^2 dv},$$

где  $p$  – давление на поверхности лопатки. Модальную силу  $\lambda_i$  можно интерпретировать как обобщенную силу, действующую на лопатку при ее перемещении по  $i$ -й форме и отнесенную к единице массы.

Определив модальные коэффициенты  $q_i$  из системы дифференциальных уравнений (4), получим перемещение и скорость лопатки в виде

$$u(x, t) = \sum_i U_i(x)q_i(t), \quad \dot{u}(x, t) = \sum_i U_i(x)\dot{q}_i(t).$$

**Аэроупругая модель.** Численная дискретизация задачи при интегрировании связанной системы уравнений (1, 4) заключается в параллельном решении на каждом шаге по времени аэродинамической и динамической задач с обменом результатами расчета каждой из задач на предыдущей итерации в качестве исходных данных на последующей итерации. В качестве таких данных в динамической задаче используются мгновенные аэродинамические нагрузки, полученные из решения аэродинамической задачи на предыдущем временном слое, в аэродинамической задаче принимаются в качестве граничных условий новые положение и скорости колебаний лопаток, полученные из решения динамической задачи.

Блок-схема расчета  $n$ -ой итерации представлена на рис. 5.



Рис.5 – Блок-схема расчета  $n$ -ой итерации аэроупругой модели

**Численный анализ.** Численный анализ проведен для лопаточного венца последней ступени турбины мощностью 370 МВт, состоящего из 53 лопаток.

Граничные условия приняты:

- на входе в ротор  $P_0 = 19220 \div 20370$  Па;
- $T_0 = 333^\circ\text{K}$ ;
- на выходе за ротором – статическое давление меняется вдоль радиуса как показано на рис. 6;
- углы потока на входе  $\alpha$  и  $\gamma$  в тангенциальной и меридиональной плоскостях заданы;
- число оборотов ротора  $n = 3000$  об/мин.

При расчете колебаний лопаток ротора учитывалась 1-я собственная форма колебаний, собственная частота которой приведена ниже в таблице.

Таблица 1 – Собственные частоты

Собственная форма	1
Частота $\nu$ , Гц	119

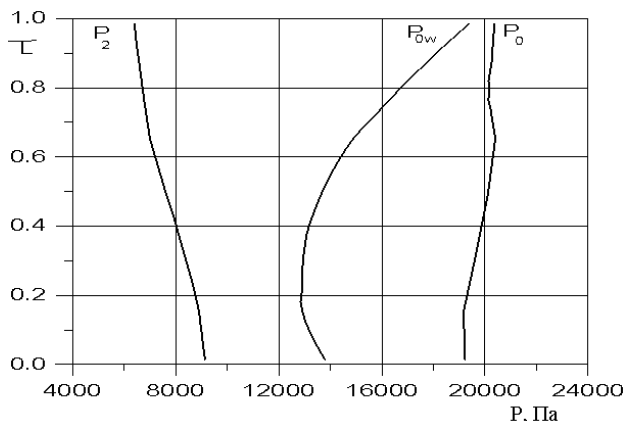


Рис. 6 – Распределение полного ( $P_0$ ) и статического давления ( $P_2$ ) по высоте лопатки

Аэроупругая устойчивость системы «поток воздуха – лопаточный венец» без учета механического демпфирования определяется аэродинамическим коэффициентом демпфирования  $D$ , равным взятому со знаком «минус» коэффициенту работы  $W$ , совершаемой аэродинамической нагрузкой за один период колебаний [5]. Знак «минус» суммарной работы ( $D > 0$ ) соответствует аэродемпфированию, знак «плюс» – самовозбуждению лопатки ( $D < 0$ ).

Изменение коэффициента аэродемпфирования по высоте 1-й лопатки и график влияния межлопаточного угла сдвига (МЛФУ) по фазе колебаний лопаток на осредненный по длине лопатки коэффициент аэродемпфирования для МЛФУ = 0, 180,  $\pm 90$  град при заданном законе гармонических колебаний лопаток приведены на рис. 7, 8. Минимальные значения коэффициента аэродемпфирования соответствуют МЛФУ = +90 град., максимальное значение соответствует МЛФУ = -90, 180 град.

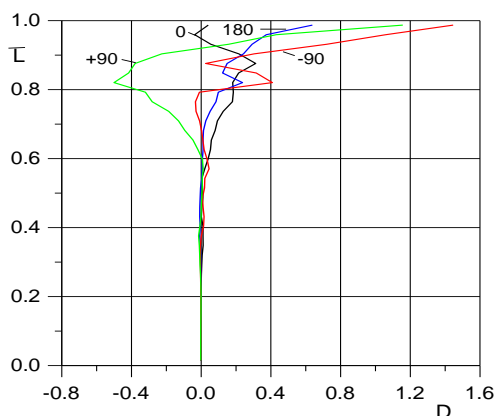


Рис. 7 – Изменение коэффициента аэродемпфирования по высоте лопатки

В работе приведены результаты численного анализа нестационарных аэродинамических характеристик лопаточного венца для МЛФУ = 90 градус при связанных колебаниях лопаток.

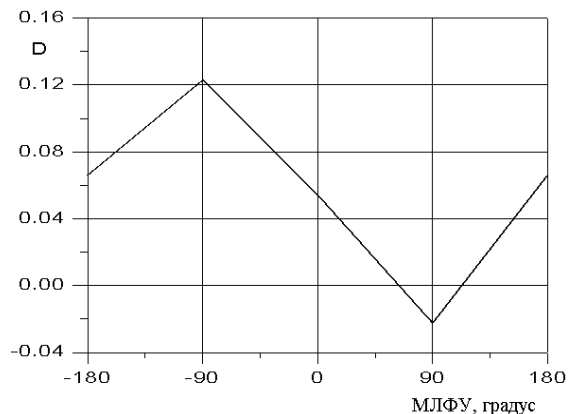


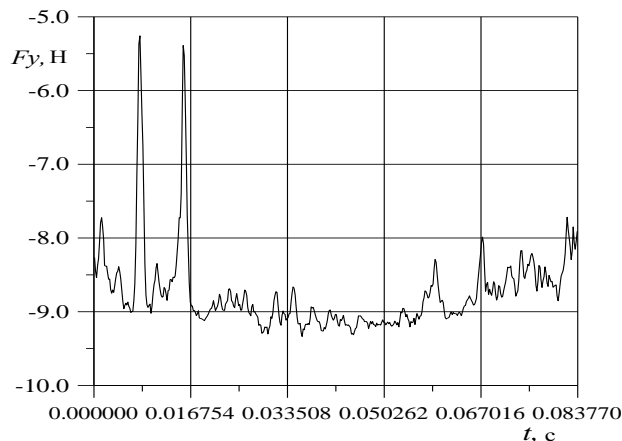
Рис. 8 – Зависимость осредненного по высоте лопатки коэффициента аэродемпфирования от МЛФУ для собственной формы колебаний

На рис. 9 а, в, ж представлены графики нестационарных аэродинамических нагрузок (окружная, осевая и аэродинамический момент), действующих на периферийный слой рабочей лопатки в течение десяти периодов колебаний лопаток ротора, из которых один период гармонических колебаний и девять связанных колебаний лопаток, а также их амплитудно-частотные спектры (рис. 9, б, г, е).

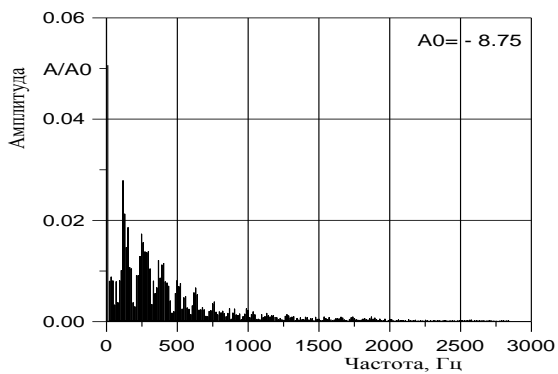
Как видно из графиков, основной вклад в нестационарные составляющие аэродинамических нагрузок вносят низкочастотная гармоника с частотой 50 Гц, вызванная неравномерностью в окружном направлении за ротором, и гармоника с частотой ~ 100 Гц, вызванная колебаниями лопаток по 1-й собственной форме.

Перемещение периферийного сечения рабочей лопатки в окружном, осевом направлениях и поворот относительно центра тяжести, а также их амплитудно-частотные спектры в течение 11 периодов колебаний, из которых один период гармонический и 10 связанных, показано на рис 10.

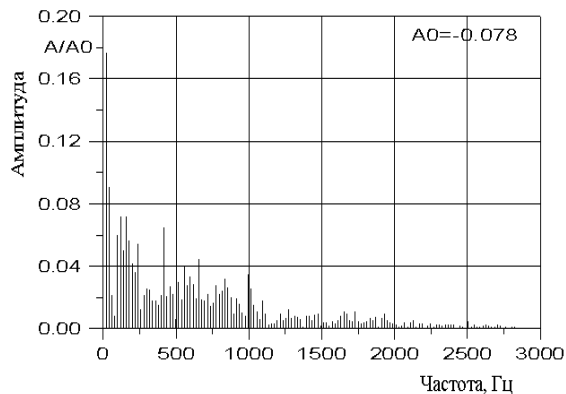
Как видно из графиков (рис. 10, б, г, е), основной вклад в колебания лопаток вносят гармоники с частотой 50 Гц, вызванные неравномерностью потока в окружном направлении и автоколебания с частотой близкой частоте 1-й собственной формы (~ 100 Гц).



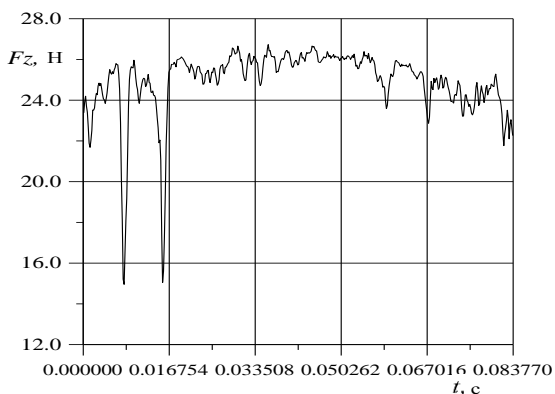
a



б

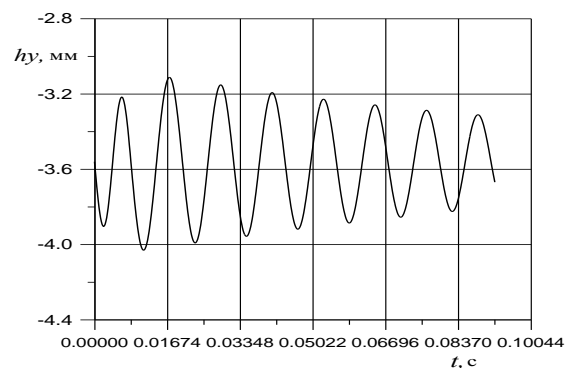


е

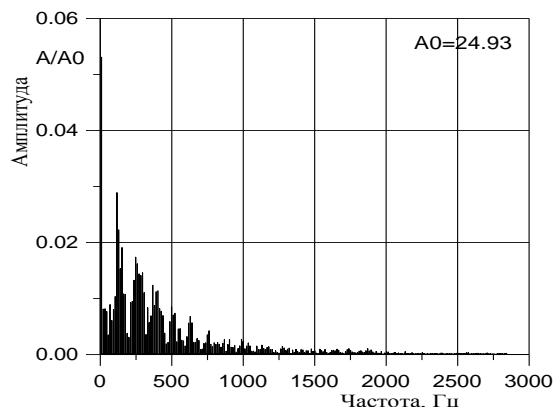


в

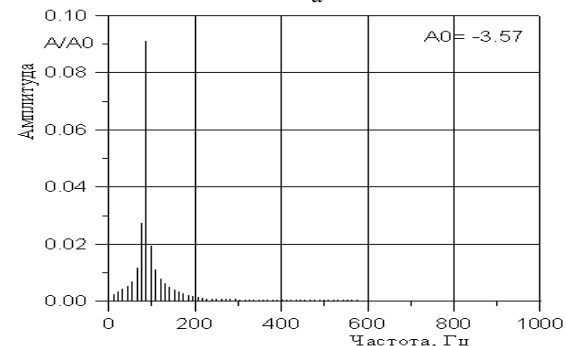
Рис. 9 – Аэродинамическая нагрузка в периферийном слое рабочей лопатки:  
а – б – окружная сила; в – г – осевая сила;  
д – е – аэродинамический момент



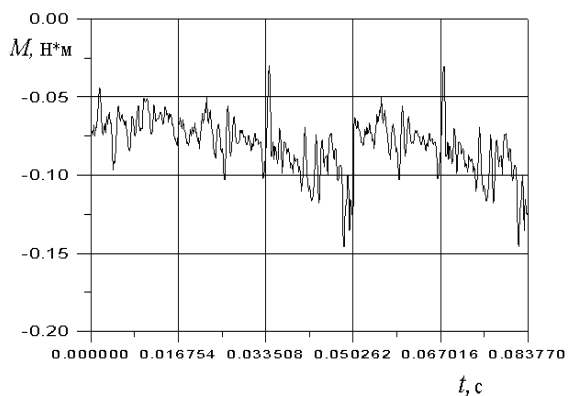
а



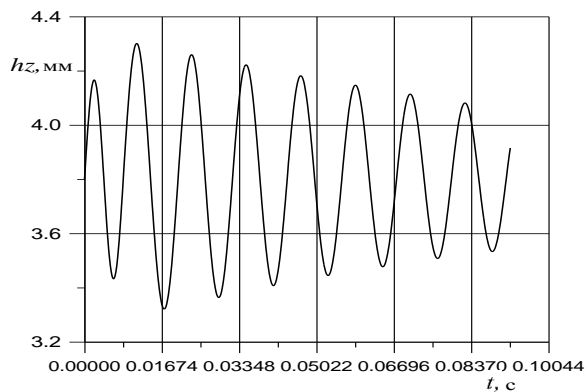
з



б



д



е

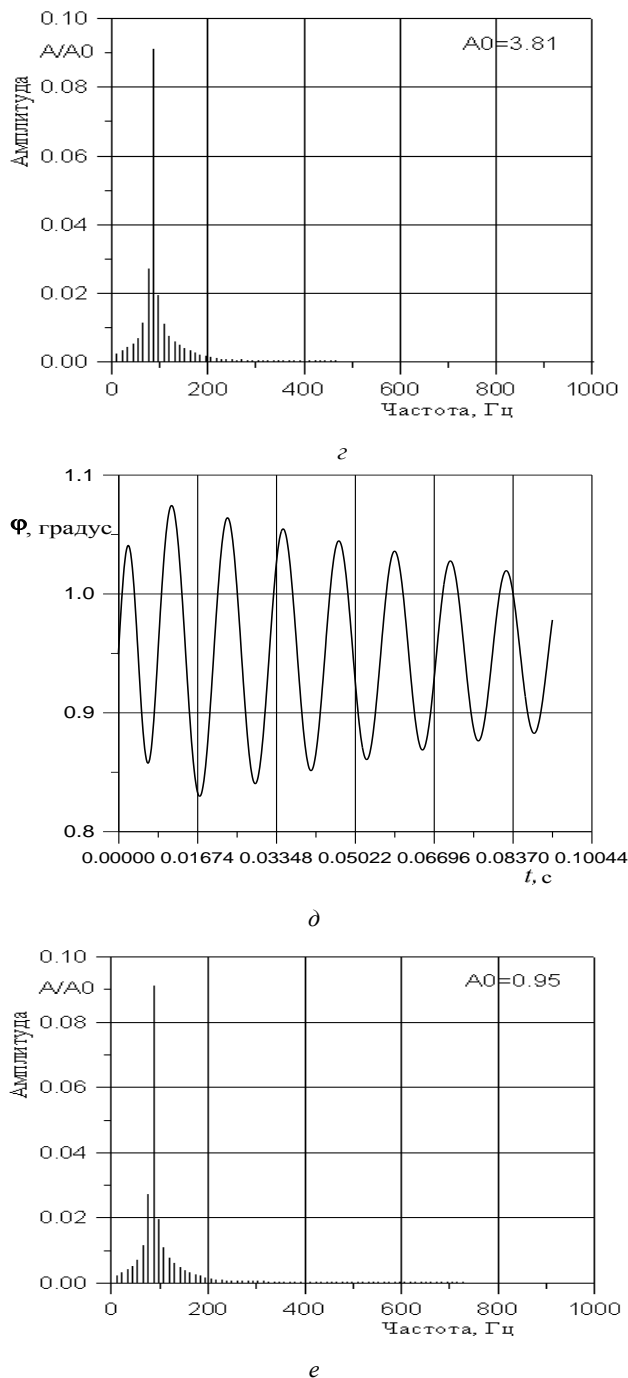


Рис. 10 – Колебания периферийного сечения рабочей лопатки:

а, б – в окружном направлении; в, г – в осевом направлении; д, е – угол поворота

**Выводы.** Выполнен численный анализ аэроупругого поведения лопаточного венца ротора последней ступени осевой турбины при неравномерном распределении давления за венцом.

Показано, что основной вклад в нестационарные аэродинамические нагрузки вносит низкочастотная гармоника 50 Гц, вызванная окружной неравномерностью потока за ротором.

Основной вклад в колебания лопаток вносят низкочастотная гармоника 50 Гц и автоколебания с

частотой ~ 100 Гц.

Предложенный метод позволяет прогнозировать амплитудно-частотный спектр колебаний лопаток осевой турбины, включая вынужденные и самовозбуждающиеся вибрации (флаттер, автоколебания).

**Список литературы:**

1. Cinnella P. A Numerical Method for Turbomachinery Aeroelasticity / P. A. Cinnella, De Palma, G. Pascazio, [et. al] // Journal of Turbomachinery. – 2004. – № 126. – P. 310–316.
2. Bolcs A. Aeroelasticity in Turbomachines: Comparison of Theoretical and Experimental Cascade Results / A. Bolcs, T. H. Fransson. – EPFL Switzerland, 1986. – P. 174.
3. Fransson T. H. Viscous and Inviscid Linear/Nonlinear Calculations Versus Quasi-Three-Dimensional Experimental Data for a New Aeroelastic Turbine Standard Configuration/ T. H. Fransson. M. Jöcker, A. Böls, [et. al] // ASME Journal of Turbomachinery. – 1999. – Vol. 121. – P. 717–725.
4. Baldwin B. Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flow // B. Baldwin, L. Lomax // AIAA Journal. – 1978. – Vol 78, № 2. – P. 1–45.
5. Gnesin V. I. Numerical Modelling of Aeroelastic Behaviour for Oscillating Turbine Blade Row in 3D Transonic Ideal Flow / V. I. Gnesin, L. V. Kolodyazhnaya // J. Problems in Mash. Eng. – 1999. – Vol 1, No 2. – P. 65–76.
6. Гнесин В. И. Аэроупругое поведение последней ступени турбомашин на номинальном и частичном режимах / В. И. Гнесин, Л. В. Колодяжная // Проблемы машиностроения. – 2003. – Т. 6, № 1. – С. 48–57.
7. Rzakowski R. Rotor Blade Flutter in Last Stage of LP Steam Turbine / R. Rzakowski, V. I. Gnesin, L. Kolodyazhnaya // Proceedings of the 14th International Symposium on Unsteady Aerodynamics, Aeroacoustics & Aeroelasticity of Turbomachines. – Stockholm, 8–11 September 2015. P. 1–6.
8. Гнесин В. И. Численный анализ влияния соотношения чисел лопаток статора и ротора на нестационарные нагрузки и режимы колебаний лопаток / В. И. Гнесин, Л. В. Колодяжная // Вестник НТУ «ХПИ». Сер.: Энергетические и теплотехнические процессы и оборудование. – 2009. – № 3. – С. 23–32.
9. Годунов С. К. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С. К. Годунов, А. В. Забродин, М. Я. Иванов, [и др.]. – М.: Наука, 1976. – 400 с.

**References (transliterated)**

1. Cinnella, P. A., et al "Numerical Method for Turbomachinery Aeroelasticity" *Journal of Turbomachinery* 126 (2004): 310–316. Print.
2. Bolcs, A. and T. H. Fransson *Aeroelasticity in Turbomachines: Comparison of Theoretical and Experimental Cascade Results*. EPFL Switzerland, 1986. Print.
3. Fransson, T. H., et al "Viscous and Inviscid Linear/Nonlinear Calculations Versus Quasi-Three-Dimensional Experimental Data for a New Aeroelastic Turbine Standard Configuration." *ASME Journal of Turbomachinery* 121 (1999): 717–725. Print.
4. Baldwin, B., and L. Lomax "Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flow." *AIAA Paper* 78.02 (1978): 1–45. Print.
5. Gnesin, V. I. and L. V. Kolodyazhnaya "Numerical Modelling of Aeroelastic Behaviour for Oscillating Turbine Blade Row in 3D Transonic Ideal Flow." *J. Problems in Mash. Eng.* 1.2 (1999): 65–76. Print.
6. Gnesin, V. I. and L. V. Kolodyazhnaya "Ajerouprugoe povedenie poslednej stupeni turbomashiny na nominal'nom i chastichnom rezhimah." *Probl. mashinostroenija*. 6.1 (2003): 48–57. Print.
7. Rzakowski, R., V. I. Gnesin, and L. Kolodyazhnaya "Rotor Blade Flutter in Last Stage of LP Steam Turbine" *Proceedings of the 14th International Symposium on Unsteady Aerodynamics, Aeroacoustics & Aeroelasticity of Turbomachines*. Stockholm, 8–11 September. 2015. 1–6. Print.
8. Gnesin, V. I. and L. V. Kolodyazhnaya "Chislennyj analiz vlijaniya

sootnosheniya chisel lopatok statora i rotora na nestacionarnye nagruzki i rezhimy kolebanij lopatok." *Bulletin of the NTU "KhPI". Ser.: Jenergeticheskie i teplotehnicheskie processy i oborudovanie.*

No 3. 2009. 23–32. Print.

9. Godunov, S. K., et al *Chislennoe reshenie mnogomernyh zadach gazovoy dinamiki.* Moscow: Nauka, 1976. Print.

Поступила (received) 24.04.2018

*Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions*

**Математическое моделирование и анализ аэроупругих явлений в лопаточном венце турбомашинны/ В. И. Гнесин, Л. В. Колодяжная, Р. Жандковски, А. В. Демченко** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Гідравлічні машини та гідроагрегати. – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – № 17 (1293). – С. 17–25. – Бібліогр.:9 назв. – ISSN 2411-3441 (print), ISSN 2523-4471 (online).

**Математическое моделирование и анализ аэроупругих явлений в лопаточном венце турбомашинны/ В. И. Гнесин, Л. В. Колодяжная, Р. Жандковски, А. В. Демченко** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Гідравлічні машини та гідроагрегати. – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – № 17 (1293). – С. 17–25. – Бібліогр.:9 назв. – ISSN 2411-3441 (print), ISSN 2523-4471 (online).

**The mathematic modeling and analysis of aeroelastic phenomena in turbomashine blade row/ V. I. Gnesin, L. V. Kolodyazhnaya, R. Rzadkowski, A. V. Demchenko** // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Gidromachines and gidroagregaty. – Kharkiv : NTU "KhPI", 2018. – № 17 (1293). – P. 17–25. – Bibliogr.: 9. – ISSN 2411-3441 (print), ISSN 2523-4471 (online).

*Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors*

**Гнесін Віталій Ісайович** – доктор технічних наук, професор, головний науковий співробітник відділу гідроаеромеханіки енергетичних машин, Інститут проблем машинобудування ім. А. Н. Підгорного НАН України; м. Харків, Україна; e-mail: gnesin@ipmach.kharkov.ua.

**Гнесин Виталий Исаевич** – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник отдела гидроаэромеханики энергетических машин, Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины; г. Харьков, Украина; e-mail: gnesin@ipmach.kharkov.ua.

**Gnesin Vitaly Isayevich** – Doctor of Technical Sciences, Professor, Institute of Problems of Mechanical Engineering A.N. Podgorny NAS of Ukraine, Kharkov, Ukraine.

**Колодяжна Любов Володимирівна** – доктор технічних наук, старший науковий співробітник відділу гідроаеромеханіки енергетичних машин, Інститут проблем машинобудування ім. А. Н. Підгорного НАН України; м. Харків, Україна; e-mail: lyubovvladimirovna60@gmail.com.

**Колодяжная Любовь Владимировна** – доктор технических наук, старший научный сотрудник отдела гидроаэромеханики энергетических машин, Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины; г. Харьков, Украина; e-mail: lyubovvladimirovna60@gmail.com.

**Kolodyazhnaya Lyubov Vladimirovna** – Doctor of Technical Sciences, Senior Researcher, Institute of Problems of Mechanical Engineering A.N. Podgorny NAS of Ukraine, Kharkov, Ukraine.

**Жандковскі Ромуальд** – доктор технічних наук, професор, завідувачий відділом динаміки и аеропружності, Інститут проточних машин ПАН, м. Гданськ, Польща; e-mail: z3@imp.gda.pl.

**Жандковски Ромуальд** – доктор технических наук, профессор, заведующий отделом динамики и аэроупругости, Институт проточных машин ПАН, г. Гданьск, Польша; e-mail: z3@imp.gda.pl.

**Rzadkowski Romuald** – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Department of Dynamics and Aeroelasticity, The Institute flow machines PAN, Gdansk, Poland.

**Демченко Олексій Володимирович** – аспірант, Інститут проблем машинобудування ім. А. Н. Підгорного НАН України; м. Харків, Україна; e-mail: demchenkoav99@gmail.com.

**Демченко Алексей Владимирович** – аспирант, Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины; г. Харьков, Украина; e-mail: demchenkoav99@gmail.com.

**Demchenko Alexey Vladimirovich** – postgraduate, Institute of Problems of Mechanical Engineering A. N. Podgorny NAS of Ukraine, Kharkov, Ukraine.