УДК 519.246.8

И.В. АНТОНОВА, канд. техн. наук, доц., НТУ "ХПИ",
Н.А. ЧИКИНА, канд. техн. наук, доц., НТУ "ХПИ"

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА К ИССЛЕДОВАНИЮ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

В работе представлены результаты применения методов фрактального анализа для идентификации временного ряда, характеризующего распространенность различных кожных заболеваний в Украине. Метод основан на вычислении индекса фрактальности и может быть использован для определения фрактальных характеристик временных рядов в медицине и социологии. Ил.: 2. Табл.: 1. Библиогр.: 11 назв.

Ключевые слова: фрактальный анализ, идентификация временного ряда, кожные заболевания, индекс фрактальности.

Постановка проблемы и анализ литературы. На сегодняшний день ВОЗ отмечает рост числа кожных заболеваний во всем мире. В некоторых классах кожных заболеваний время от времени возникают непрогнозируемые вспышки роста заболеваемости. Несмотря на то, что основное число этих заболеваний не относятся к крайне тяжелой патологии, значение их велико в связи с большой распространенностью, общим значительным числом дней нетрудоспособности за их счет. В связи с этим экономический и социальный урон от них весьма ощутим. Поэтому для разработки эффективных мер противодействия им необходимо проводить прогнозирование уровня заболеваемости соответствующими кожными патологиями.

Теория хаоса сегодня остается одним из самых распространенных качественных способов прогнозирования и исследования устойчивости состояний динамических систем. Целью анализа устойчивости системы является выявление всех ее стационарных состояний. Если хотя бы одно из стационарных состояний по каким-либо причинам оказывается угрожающим или нежелательным, то для уменьшения вероятности перехода системы в это состояние медицинским службам необходимо вырабатывать соответствующие меры профилактики.

Как правило, при анализе временных рядов используются методы, дающие количественный прогноз (точечный или интервальный). Для временных рядов, у которых гипотеза о существовании тренда не подтверждается, такие методы не продуктивны. Поэтому для обнаружения общей тенденции поведения временного ряда предлагается использовать синергетические методы, методы теории хаоса, которые дают качественный анализ исследуемого временного ряда, а именно фрактальный анализ и анализ фазовых траекторий.

Многие проблемные области различных научных теорий формируются как результат действия нелинейных закономерностей, которые имеющаяся "узконаучная" методология распознать, практически, не в состоянии.

Нелинейные динамические системы обычно имеют фрактальные аттракторы, то есть неустойчивые фазовые траектории систем с течением времени стремятся стать фракталами [1]. Как правило, реальные временные ряды как реализации случайного процесса трудно прогнозируемы. Важным моментом во фрактальном подходе является влияние предыстории случайного процесса на поведение системы сегодня. Поэтому этот метод анализа временных рядов вызывает особый интерес у исследователей.

Реально в природе чистых фракталов, как правило, не существует и можно говорить лишь о фрактальных явлениях. Их следует рассматривать только как модели, которые приближенно являются фракталами в статистическом смысле. Многие экспериментальные данные обладают фрактальной статистикой, анализ и моделирование которой могут быть произведены с помощью методов фрактального анализа [2, 3].

Одним из самых востребованных направлений фрактального анализа является изучение динамики во времени такой характеристики, как фрактальная размерность. Этот показатель характеризует повторяемость статистических характеристик естественных временных рядов с изменением масштаба. Фрактальная размерность, введенная Хаусдорфом как D-размерность, является основной характеристикой фрактальных структур [4, 5].

Имеется несколько методов определения фрактальной размерности для временного ряда, рассматриваемого как совокупность наблюдаемых параметров изучаемой динамической системы во времени. Остановимся на двух из них. Во-первых, это классический способ клеточного покрытия графического изображения временного ряда, при котором фрактальная размерность определяется точно так же, как и для геометрических фракталов. Второй способ для исследования фрактальных временных рядов был предложен Бенуа Мандельбротом. Он базируется на исследованиях английского ученого Херста и носит название R/S метода.

Для большинства реальных временных рядов аналитическое нахождение фрактальной размерности невозможно. Поэтому величину D определяют численно, например, через показатель Херста H.

Влияние настоящего на будущее при анализе временного ряда может быть выражено корреляционным соотношением $C = 2^{2H-1} - 1$ [6].

Если в качестве аппроксимации временных рядов рассматривать совокупность плоских геометрических фигур (клеток) с общим геометрическим параметром δ, то по определению Хаусдорфа D-размерность определяется из закона $S(\delta) \sim \delta^{2-D}$ при $\delta \to 0$, где $S(\delta)$ – площадь всей совокупности клеток с масштабом разбиения δ.

В качестве характеристики реальных временных рядов в [7 – 9] предлагается индекс фрактальности μ. Преимущество этого индекса перед другими фрактальными показателями состоит, в частности, в том, что для его определения с приемлемой точностью достаточно данных на два порядка меньше, чем, например, для определения значения показателя Херста H. Это дает возможность проводить локальный фрактальный анализ временных рядов на основе свойств функции $\mu(t)$.

Цель исследования. Пусть задан скалярный эквидистантный временной ряд $\{x(t_i)\}_{i=1}^{N}$, измерения которого $x(t_i)$ в моменты наблюдений t_i, $i = \overline{1, N}$, характеризуют заболеваемость в Украине некоторым классом кожных патологий. Источником информации о состоянии здоровья населения являются данные, содержащиеся в официальной статистической отчетности МОЗ Украины [10].

Целью настоящих исследований является идентификация реального временного ряда $\{x(t_i)\}_{i=1}^{N}$ с помощью качественных методов фрактального анализа.

Задача идентификации временного ряда заключается в определении макросостояния системы на основе наблюдаемых реализаций ряда.

Основная часть. Пусть наблюдения временного ряда рассматриваются на интервале $[0, T]$. Разобьём интервал на m частей точками $0 = \tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_m = T$, где $\tau_i - \tau_{i-1} = \delta$, $\delta = T / m$ $(i = \overline{1, m})$. Обозначим такое равномерное разбиение интервала реализации временного ряда $\{x(t_i)\}_{i=1}^{N}$ через ω_m. Покроем изображение временного ряда прямоугольниками с основанием δ (масштабом δ). Ясно, что высота прямоугольника на интервале $[\tau_i, \tau_{i-1}]$ будет равна размаху варьирования $A_i(\delta)$ значений временного ряда $x(t_i)$ на этом интервале.

Вычислим величину $V(\delta)=\sum_{i=1}^{m} A_i(\delta)$. Тогда площадь такого минимального покрытия $S(\delta)=V(\delta)\cdot\delta$. Сравнивая это равенство с определением D-размерности Хаусдорфа, в [9] получают, что $S(\delta)\sim\delta^{2-D}$, а $V(\delta)=\delta^{-\mu}$, где $\mu=D_\mu-1$. Величину D_μ называют размерностью минимального покрытия, а μ – индексом фрактальности.

При вычислении индекса μ в настоящих исследованиях была использована последовательность n вложенных разбиений ω_m, где $m=2^n$, $n=0,1,2,3,4,5,6$. Каждое разбиение состояло из 2^n интервалов, содержащих 2^{6-n} наблюдений $x(t_i)$. При этом из имеющейся в распоряжении авторов реализации временного ряда $\{x(t_i)\}_{i=1}^{N}$ были отброшены периоды с аномально большими значениями $x(t_i)$.

Для каждого разбиения ω_m вычислялось значение $V(\delta)$. Полученные результаты вычислений представлены ниже в таблице.

Таблица

Значение величины V в зависимости от масштаба разбиения δ

n	0	1	2	3	4	5	6
V	2352,6	798,8	449,5	439,4	434,6	309,9	170
δ	1	2	4	8	16	32	56

На рис. 1 изображен анализируемый временной ряд $\{x(t_i)\}_{i=1}^{N}$ и построенное для него минимальное покрытие, соответствующее $n=3$.

На рис. 2 представлен график зависимости $V(\delta)$ в двойном логарифмическом масштабе. Для определения значения индекса фрактальности μ по этим данным методом наименьших квадратов составлялось уравнение линии регрессии $y=kx+b$. Тогда, в соответствии с [8], $\mu=-k$.

В нашем случае уравнение регрессии имеет вид: $y=-0{,}66x+7{,}41$. Следовательно, при уровне надежности $\alpha=0{,}90$, индекс фрактальности исследуемого ряда $\mu=0{,}66\pm0{,}073$.

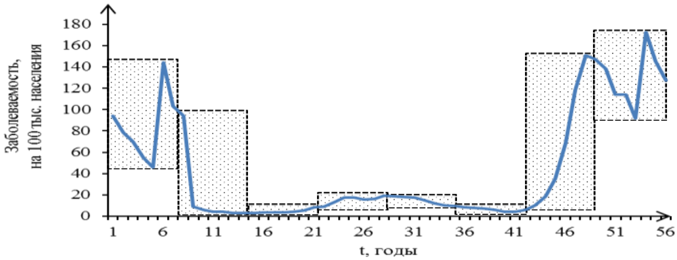

Рис. 1. Минимальное клеточное покрытие для временного ряда, характеризующего заболеваемость некоторыми кожными патологиями в Украине с 1958 года

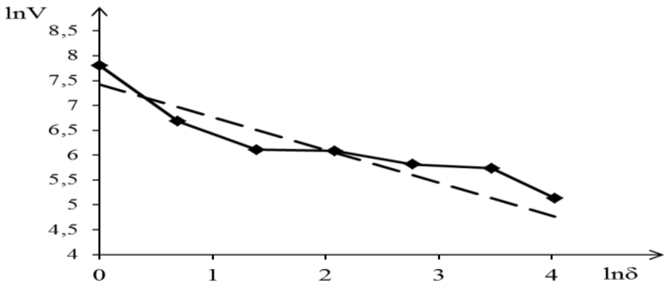

Рис. 2. Зависимость величины $V(\delta)$ в двойном логарифмическом масштабе

Выводы. Индекс фрактальности μ является показателем стабильности исходного временного ряда. Полученное в результате вычислений значение $\mu = 0{,}66 \pm 0{,}073$, то есть $\mu > 0{,}5$, интерпретируется как флэт, что говорит о состоянии относительной стабильности исследуемого процесса. Другими словами, в ближайшее время в Украине не прогнозируется резкое изменение в структуре заболеваемости различными кожными патологиями. Оценка корреляционного соотношения $C \approx -0{,}08$. Это говорит о практическом отсутствии влияния настоящего на будущее в исследуемом временном ряде.

Опираясь на полученный результат, авторы планируют установить уровень соответствия результатов качественного (фрактальный анализ, восстановление фазового портрета) и количественного анализа этого ряда, характеризующего заболеваемость различными кожными патологиями на основе выявленной периодической составляющей [11], используя отрезок исследуемого временного ряда за последние 10 лет.

Список литературы: **1**. *Малинецкий Г.Г.* Нелинейная динамика. Подходы, результаты, надежды / *Г.Г. Малинецкий, А.В. Потапов, А.В. Подлазов.* – М.: Комкнига, 2006. – 216 с. **2**. *Figliola A.* About the effectiveness of different methods for the estimation of the multifractal spectrum of natural series / *A. Figliola, E. Serrano, G. Paccosi //* International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2010. – Vol. 20 (2). – P. 331–339. **3**. *Delignieres D.* Fractal dynamics of human gait: a reassessment of the 1996 data of Hausdorff et al. / *D. Delignieres, K. Torre* // Journal of Applied Physiology. – 2009**.** **–** 106. – P. 1272–1279. **4**. *Hausdorf F.* Dimesion und Ausseres Mass / *F. Hausdorf* // Matematishe Annalen. – 1919. – 79. – P. 157–179. **5**. *Федер Е.* Фракталы / *Е. Федер.* – М.: Мир, 1991. – 262 с. **6**. *Кроновер Р.* Фракталы и хаос в динамических системах / *Р. Кроновер.* – М.: Постмаркет, 2000. – 352 с. **7**. *Безручко Б.П.* Математическое моделирование и хаотические временные ряды / *Б.П. Безручко, Д.А. Смирнов.* – Саратов: ГосУНЦ "Колледж", 2005. – 320 с. **8**. *Дубовиков М.М.* Размерность минимального покрытия и локальный анализ фрактальных временных рядов / *М.М. Дубовиков, А.В. Крянев, Н.В. Старченко //* Вестник РУДН, 2004. – Т. 3. – № 1. – С. 81–95. **9**. *Старченко Н.В.* Локальный анализ хаотических временных рядов с помощью индекса фрактальности / *Н.В. Старченко* // Автореф. дисс. на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук, Москва, 2005. – 22 с. **10**. Показники лікувально-профілактичної допомоги хворим шкірними і венеричними захворюваннями в Україні // Відп. за випуск Голубчиков М.В. – Київ: Центр медичної статистики МОЗ України, 2007. – 110 с. **11.** *Волкославская В.Н.* О квазипериодичности в динамике заболеваемости сифилисом и основных направлениях организации борьбы с ИППП в Украине / *В.Н. Волкославская, А.Л. Гутнев, Н.А. Чикина* // Труды науч.-практ. конф. "Актуальные проблемы дерматологи и венерологи". – Одесса: ОГМУ. – 2003. – С. 25-26.

Bibliography (transliterated): **1.** *Malineckij G.G.* Nelinejnaja dinamika. Podhody, rezul'taty, nadezhdy / *G.G. Malineckij, A.V. Potapov, A.V. Podlazov*. – M.: Komkniga, 2006. – 216 s. **2.** *Figliola A.* About the effectiveness of different methods for the estimation of the multifractal spectrum of natural series / *A. Figliola, E. Serrano, G. Paccosi //* International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2010. – Vol. 20 (2). – P. 331–339. **3.** *Delignieres D.* Fractal dynamics of human gait: a reassessment of the 1996 data of Hausdorff et al. / *D. Delignieres, K. Torre* // Journal of Applied Physiology. – 2009. – 106. – P. 1272–1279. **4.** *Hausdorf F.* Dimesion und Ausseres Mass / *F. Hausdorf* // Matematishe Annalen. – 1919. – 79. – P. 157–179. **5.** *Feder E.* Fraktaly / *E. Feder.* – M.: Mir, 1991. – 262 s. **6.** *Kronover R.* Fraktaly i haos v dinamicheskih sistemah / *R. Kronover*. – M.: Postmarket, 2000. – 352 s. **7.** *Bezruchko B.P.* Matematicheskoe modelirovanie i haoticheskie vremennye rjady / *B.P. Bezruchko, D.A. Smirnov*. – Saratov: GosUNC "Kolledzh", 2005. – 320 s. **8.** *Dubovikov M.M.* Razmernost' minimal'nogo pokrytija i lokal'nyj analiz fraktal'nyh vremennyh rjadov / *M.M. Dubovikov, A.V. Krjanev, N.V. Starchenko* // Vestnik RUDN, 2004. – T. 3. – № 1. – S. 81–95. **9.** *Starchenko N.V.* Lokal'nyj analiz haoticheskih vremennyh rjadov s pomoshh'ju indeksa fraktal'nosti / *N.V. Starchenko* // Avtoref. diss. na soiskanie uchenoj stepeni kandidata fiz.-mat. nauk, Moskva, 2005. – 22 s. **10.** Pokazniki likuval'no-profilaktichnoï dopomogi hvorim shkirnimi i venerichnimi zahvorjuvannjami v Ukraïni // Vidp. za vipusk Golubchikov M.V. – Kiïv: Centr medichnoï statistiki MOZ Ukraïni, 2007. – 110 s. **11.** *Volkoslavskaja V.N.* O kvaziperiodichnosti v dinamike zabolevaemosti sifilisom i osnovnyh napravlenijah organizacii bor'by s IPPP v Ukraine / *V.N. Volkoslavskaja, A.L. Gutnev, N.A. Chikina //* Trudy nauch.-prakt. konf. "Aktual'nye problemy dermatologi i venerologii". – Odessa: OGMU. – 2003. – S. 25-26.

Поступила (received) 15.04.2015
Повторно 05.05.2015

Статью представил д-р техн. наук, проф. НТУ "ХПИ" Пиротти Е.Л.

Antonova Irina, Cand.Sci.Tech, Docent
National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"
Str. Frunze, 21, Kharkov, Ukraine, 61002
Tel.: (057) 707-60-87, e-mail: antonova2601@gmail.com
ORCID ID: 0000-0002-1268-8223

Chikina Natalia, Cand.Sci.Tech, Docent
National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"
Str. Frunze, 21, Kharkov, Ukraine, 61002
Tel.: (057) 707-66-93, e-mail: chikina_na@mail.ru
ORCID ID: 0000-0002-1746-1271