УДК 519.7: 681.5 **DOI: 10.20998/2411-0558.2017.50.08**

Е.С. РОЕНКО, асс., ДГТУ, Каменское,
А.В. САДОВОЙ, д-р техн. наук., проф., ДГТУ, Каменское

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МАЯТНИКА ФУРУТЫ

Управление структурно неустойчивыми объектами с помощью классических методов не позволяет достичь необходимой стабилизации в большом. Использование модели маятника Фуруты, описанного с помощью уравнения Эйлера – Лагранжа второго порядка, позволяет определить нелинейные законы управления, которые обеспечат необходимое качество стабилизации. Полученная модель линеаризованной системы записана в форме, удобной для аналитического конструирования регуляторов. Ил.: 2. Библиогр.: 10 назв.

Ключевые слова: структурно неустойчивые объекты; маятник Фуруты; линеаризация; нелинейные законы управления.

Постановка проблемы и анализ литературы. Современный уровень развития вычислительной техники позволяет синтезировать системы управления высокоточными сложными системами в реальном времени, учитывая множество параметров. Пренебрегая некоторыми из них, невозможно в полной мере оценить адекватность объекта, что может служить источником ошибок при моделировании и создании системы управления. Поэтому работа, устраняющая указанные недостатки, является актуальной.

Синтез систем управления классическими методами не гарантирует устойчивости в большом и может привести к негативным последствиям, в то время как нелинейные законы управления позволяют с достаточной степенью точности управлять маятникоподобными системами [1 – 9].

Реальные маятникоподобные системы удобно исследовать на прототипах, к которым относятся обратный маятник [1 – 3] и маятник Фуруты [4 – 9]. Эти маятники характеризуются наличием точек неустойчивого и устойчивого равновесия. Причем любое сколь угодно малое внешнее воздействие выводит маятник из положения неустойчивого равновесия и переводит его в положение устойчивого равновесия, в окрестностях которого возникают слабодемпфированные колебания.

Математическое описание известных моделей маятника Фуруты [4, 6 – 9] не содержит информации о силах трения в суставах маятника, что не позволяет в полной мере оценить характер движения и может вносить погрешности при моделировании и синтезе системы управления. Кроме того, в указанных моделях не учитывается динамика электропривода управляющего маятником.

Цель статьи. Приведение математической модели маятника Фуруты к виду, удобному для синтеза оптимальных управлений путем решения задачи аналитического конструирования регуляторов (АКР).

Математическая модель маятника Фуруты. Маятник Фуруты состоит из руки, которая приводится во вращение в горизонтальной плоскости электродвигателем, и рычага, который вращается в вертикальной плоскости.

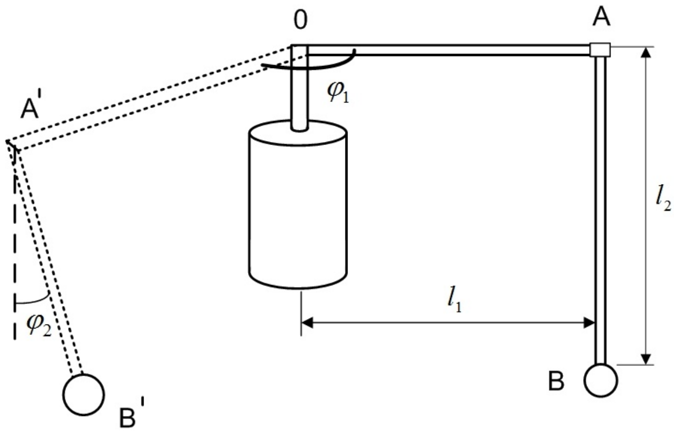

Рис. 1. Маятник Фуруты

Как видно из рис. 1, маятник Фуруты обладает двумя степенями свободы и для описания его динамики удобно использовать уравнение Эйлера-Лагранжа, которое имеет следующий вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \omega_i} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = W\,, \tag{1}$$

где L – функция Лагранжа; ω_i ($i = 1, 2$) – скорость движения плеча и рычага; $W = M - M_{тр}$ – вектор обобщенных внешних воздействий; φ_i ($i = 1, 2$) – соответствующие углы поворота плеча и рычага.

Для объекта с двумя степенями свободы уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \omega_1} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = M_{\text{ДВ}} - M_{\text{Т}};$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \omega_2} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = -M_{\text{Т}}, \qquad (2)$$

где ω_1 – скорость движения плеча; φ_1 – угол поворота плеча; $M_{\text{ДВ}}$ – момент развиваемый двигателем; $M_{\text{Т}}$ – момент трения в суставах; ω_2 – скорость движения рычага; φ_2 – угол поворота рычага.

При составлении функции Лагранжа будем считать что плечо, не обладающее потенциальной энергией, и двигатель связаны между собой абсолютно жестко. Тогда математическое описание маятника Фуруты на основе уравнений (2) может быть найдено в виде [10]:

$$(J_{\text{ДВ}} + \frac{1}{3}m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2 + m_3 l_2^2 - m_3 l_2^2 \sin^2\varphi_2) p\omega_1 +$$
$$+ m_3 l_1 l_2 (\omega_2^2 \sin\varphi_2 - p\omega_2 \cos\varphi_2 + 2m_3 l_2^2 \omega_1 \omega_2 \sin 2\varphi_2 + M_{\text{Т}} = M_{\text{ДВ}};$$
$$p\omega_2 (\frac{1}{3}m_2 l_2^2 + m_3 l_2^2) + p\omega_1 m_3 l_1 l_2 \cos\varphi_2 - \qquad (3)$$
$$-\frac{1}{2}(m_2 + 2m_3) l_2 g \sin\varphi_2 - \frac{1}{2} m_3 l_2^2 \omega_1^2 \sin 2\varphi_2 + M_{\text{Т}} = 0,$$

где $J_{\text{ДВ}}$ – момент инерции двигателя; m_1 – масса плеча; m_2 – масса рычага; m_3 – масса груза, подвешенного на вершине рычага; l_1 и l_2 – длина плеча и рычага соответственно; $M_T = \frac{R\omega_i}{((R\omega_i / a)^2 + 1)^{0.5}} + C_0\omega_i$; R – тангенс угла наклона аппроксимированной прямой; C_0 и a – весовые коэфициенты.

Приводной двигатель воздействует на маятник посредством изменения момента на валу, который определяется параметрами двигателя, его скоростью и приложенным напряжением

$$\frac{d}{dt}M_{\text{ДВ}} = -\frac{1}{T_{\text{Я}}}M_{\text{ДВ}} - \frac{(k\Phi)^2}{R_{\text{Я}}T_{\text{Я}}}\omega_1 + \frac{k\Phi}{R_{\text{Я}}T_{\text{Я}}}U_y, \qquad (4)$$

где $T_{\text{Я}}$ – постоянная времени якоря; $R_{\text{Я}}$ – сопротивление якоря; $k\Phi$ – конструктивная постоянная двигателя; U_y – управляющее воздействие, подаваемое на двигатель.

В операторном виде система уравнений маятникоподобного электромеханического объекта будет следующей:

$$p\varphi_2 = \omega_2;$$

$$p\omega_2 = \frac{3}{2}\left(-2m_3 l_1 l_2 \cos\varphi_2 p\omega_1 - \frac{1}{2} l_2 g \sin\varphi_2 \cdot\right.$$

$$\left. \cdot\left(m_2 + 2m_3\right) + \frac{1}{2} m_3 l_2^2 \sin 2\varphi_2 \omega_1^2 - 2M_\text{Т}\right) \Big/ (l_2^2(m_2 + 3m_3));$$

$$p\varphi_1 = \omega_1; \tag{5}$$

$$p\omega_1 = 3(m_3 l_1 l_2 (\sin\varphi_2 \omega_2^2 - \cos\varphi_2 p\omega_2) - m_3 l_2^2 \sin 2\varphi_2 \omega_1^2 -$$

$$- M_\text{Т} + M_\text{ДВ}) / (3J_\text{ДВ} + m_1 l_1^2 + 3m_2 l_1^2 + 3m_3 l_1^2 + 3m_3 l_2^2 - m_3 l_2^2 \cos^2\varphi_2);$$

$$pM_\text{ДВ} = -\frac{1}{T_\text{Я}} M_\text{ДВ} - \frac{(k\Phi)^2}{R_\text{Я} T_\text{Я}} \omega_1 + \frac{k\Phi}{R_\text{Я} T_\text{Я}} U_\text{ДВ}.$$

Для упрощения записи уравнений (5) приняты следующие обозначения:

$$A_1 = 3J_{ДВ} + m_1 l_1^2 + 3m_2 l_1^2 + 3m_3 l_1^2 + 3m_3 l_2^2;$$

$$A_2 = m_3 l_2^2; \quad A_3 = m_3 l_1 l_2; \quad A_4 = \frac{R^2}{a^2}; \quad A_5 = m_2 + 3m_3; \tag{6}$$

$$A_6 = g m_2; \quad A_7 = g m_3; \quad A_8 = l_2^2 A_5; \quad A_9 = \frac{C_0}{A_8},$$

с учетом, которых уравнения динамики (5) принимают следующий вид:

$$p\varphi_2 = \omega_2;$$

$$p\omega_2 = \frac{-3A_3 \cos\varphi_2 p\omega_1}{A_8} - \frac{3l_2 \sin\varphi_2 \left(A_6 + 2A_7\right)}{4A_8} +$$

$$+ \frac{A_2 \dfrac{\sin 2\varphi_2}{2} \omega_1^2}{2A_8} - \frac{R\omega_1}{2A_8 (A_4 \omega_1^2 + 1)^{0.5}} - \frac{1}{2} A_9 \omega_1;$$

$$p\varphi_1 = \omega_1; \tag{7}$$

$$p\omega_1 = \frac{3A_3 (\sin\varphi_2 \omega_2^2 - \cos\varphi_2 p\omega_2)}{A_1 + A_2 \cos^2\varphi_2} - \frac{A_2 \sin 2\varphi_2 \omega_1 \omega_2}{A_1 + A_2 \cos^2\varphi_2} +$$

$$+ \frac{M_\text{ДВ}}{A_1 + A_2 \cos^2\varphi_2} - \frac{R\omega_1}{(A_1 + A_2 \cos^2\varphi_2)(A_4 \omega_1^2 + 1)^{0.5}} - \frac{C_0 \omega_1}{A_1 + A_2 \cos^2\varphi_2};$$

$$pM_\text{ДВ} = -\frac{1}{T_\text{Я}} M_\text{ДВ} - \frac{k\Phi^2}{R_\text{Я} T_\text{Я}} \omega_1 + \frac{k\Phi}{R_\text{Я} T_\text{Я}} U_\text{ДВ}.$$

Таким образом разработанная математическая модель учитывает динамику электромеханической системы, состоящей из маятника и приводного двигателя. Эта модель является существенно нелинейной в то время как известные методы решения задачи АКР разработаны для линейных динамических объектов. Поэтому разработанная модель подлежит линеаризации. В настоящей статье рассмотрим простейший случай линеаризации путем разложения правых частей уравнений (7) в ряд Тейлора.

Линеаризация маятника Фуруты. При линеаризации считается, что рычаг находится в вертикальном положении, т.е. ряд Тейлора строится в окрестностях рабочей точки π рад.

Авторами работы [10] доказано, что характер движения маятника Фуруты зависит от угла поворота плеча φ_1. Поэтому линеаризацию будем выполнять по трем координатам: скорость движения плеча, угол и скорость движения рычага.

Математическая модель (7) в рабочей точке с учетом разложения в ряд Тейлора принимает вид:

$$\begin{aligned}
&p\varphi_2 = \omega_2;\\
&p\omega_2 = \frac{-A_3 p\omega_1 + \frac{1}{2} l_2 g(m_2 + 2m_3)\varphi_2 + (R + C_0)\omega_2}{A_8};\\
&p\varphi_1 = \omega_1;\\
&p\omega_1 = \frac{-A_3 p\omega_2 - M_{\text{ДВ}} + (R + C_0)\omega_1}{A_1};\\
&pM_{\text{ДВ}} = -\frac{1}{T_{\text{Я}}} M_{\text{ДВ}} - \frac{k\Phi^2}{R_{\text{Я}} T_{\text{Я}}}\omega_1 + \frac{k\Phi}{R_{\text{Я}} T_{\text{Я}}} U_{\text{ДВ}}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Линеаризованная модель не имеет нелинейностей типа sin, cos и ее переходные процессы показаны на рис. 2. На первых трех графиках показаны изменения ускорения, скорости и угла поворота плеча. Другие три графика демонстрируют колебательное движение рычага.

Для приведения линеаризованной модели (8) к виду удобному для синтеза регулятора необходимо записать уравнения с явно выраженными коэффициентами при переменных:

$$
\begin{aligned}
&p\varphi_2 = b_{12}\omega_2;\\
&p\omega_2 = b_{21}\varphi_2 + b_{22}\omega_1 + b_{24}\omega_2 - b_{2M}M_{\text{ДВ}};\\
&p\varphi_1 = b_{32}\omega_1;\\
&p\omega_1 = b_{41}\varphi_2 + b_{42}\omega_1 + b_{44}\omega_2 - b_{4M}M_{\text{ДВ}};\\
&pM_{\text{Д}} = -\frac{1}{T_{\text{Я}}}M_{\text{Д}} - \frac{k\Phi^2}{R_{\text{Я}}T_{\text{Я}}}\omega_1 + \frac{k\Phi}{R_{\text{я}}T_{\text{я}}}U_{\text{ДВ}},
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

где $b_{12}, b_{21}, \ldots, b_{44}, b_{4M}$ – постоянные коэффициенты.

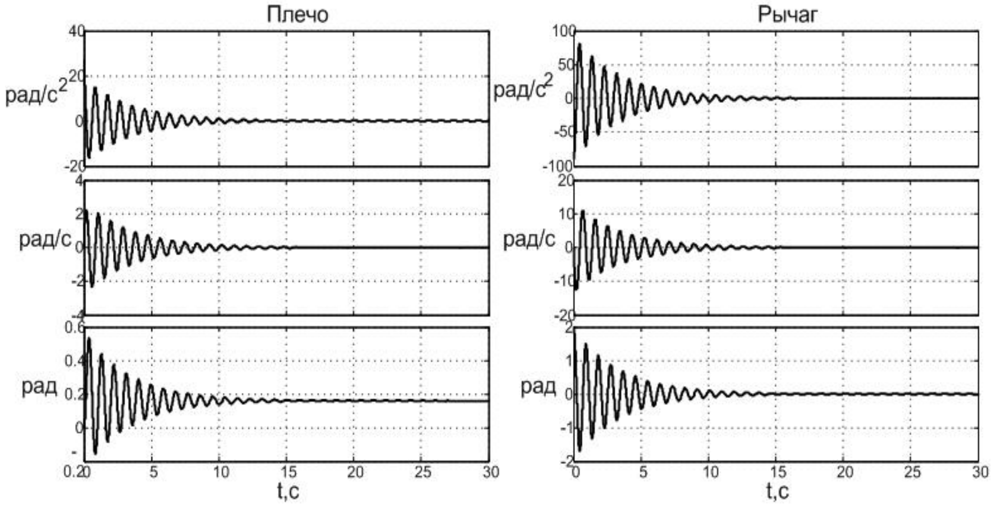

Рис. 2. Переходные процессы линеаризованной системы

Решение задачи АКР осуществляется с помощью уравнений вида

$$pY = BY + MU, \qquad (10)$$

где Y – вектор фазовых координат маятника Фуруты; B – матрица коэффициентов; M – вектор коэффициентов при управляющих ;воздействиях; U – вектор управлений.

Для маятника Фуруты имеем:

$$
Y = \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \omega_2 \\ \varphi_1 \\ \omega_1 \end{bmatrix};\;
B = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & b_{24} \\ 0 & b_{32} & 0 & 0 \\ b_{41} & b_{42} & 0 & b_{44} \end{bmatrix};\;
U = \begin{bmatrix} 0 \\ -M_{\text{ДВ}} \\ 0 \\ -M_{\text{ДВ}} \end{bmatrix};\;
M = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{2M} \\ 0 \\ b_{4M} \end{bmatrix}.
$$

Выводы. В работе получена математическая модель маятника Фуруты, которая учитывает характер движения его трех элементов: плеча, рычага и приводного двигателя. Полученные уравнения линеаризованной системы (8) представлены в нормальной форме и могут быть использованы для синтеза оптимального регулятора путем решения задачи АКР. В отличии от исходной нелинейной системы линеаризованная система является двухканальной и управление можно осуществлять одновременно углом поворота плеча и рычага.

Список литературы: **1.** *Aracil J.* Kinetic energy shaping in the inverted pendulum / *J. Aracil, J.A. Acosta, F. Gordillo* // IFAC Nonlinear Control Systems, Stuttgart. – Germany. – 2004. – P. 1063-1067. **2.** *Wachinger C.* Simulation of the inverted pendulum / *C. Wachinger, M. Pock.* – Munchen, 2004. – 33 p. **3.** *Aracil J.* A controller for swinging-up and stabilizing the inverted pendulum / *J. Aracil, J.A. Acosta, F. Gordillo* // Proceedings of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control Seoul, Korea, July 6-11, 2008. – P. 7695-7699. **4.** *Arnolds M.B.* Identification and control of the Rotary Inverted Pendulum / *M.B. Arnolds* // TU e Traineeship Report. – 2003. – 55 p. **5.** *Cazzolato B.S.* On the dynamics of the Furuta pendulum / *B.S. Cazzolato; Z. Prime* // Journal of Control Science and Engineering, 2011. – Article ID 528341. – 8 p. **6.** *Kats C.J.A.* Nonlinear control of a Furuta rotary inverted pendulum / *C.J.A. van Kats* // TUIe Bachelor Final Project Repor. – 2004. – Vol. 2004.069. – Technische Universiteit Eindhoven. – 23 p. **7.** *Akesson J.* Safe manual control of the Furuta pendulum / *J. Akesson, K.J. Astrom* // Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Control Applications. – 2001. – (CCA '01). – IEEE--Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2001. – P. 890-895. **8.** *Acosta J.A.* Swing up the Furuta pendulum by the speed gradient method / *J.A. Acosta, F. Cordillo, J. Aracil* // European Control Conference (ECC). – 2001 – 7 p. **9.** *Ling K.V.* Robust predictive control of the Furuta Pendulum / *K.V. Ling, P. Falugi, J.M. Maciejowski, L. Chisci* // 15th Triennial World Congress of the International Federation of Automatic Control. – Barcelona, 2002. – 13 p. **10.** *Роєнко Ю.* Уточнення рівнянь динаміки маятника Фурути / *Ю. Роєнко*, *Р. Волянський, О. Садовой* // Engineering mechanics & transport, Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua, 2013. – P. 98-101,

References:

1. Aracil, J., Acosta, J.A., and Gordillo, F. (2004), "Kinetic energy shaping in the inverted pendulum", *IFAC Nonlinear Control Systems,* Stuttgart. Germany, 2004, pp. 1063-1067.

2. Wachinger, C., and Pock, M. (2004), *Simulation of the inverted pendulum*, Munchen, 33 p.

3. Aracil, J., Acosta, J.A., and Gordillo, F. (2008), "A controller for swinging-up and stabilizing the inverted pendulum", *Proceedings of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control.* Seoul, Korea, July 6-11, 2008, pp. 7695-7699.

4. Arnolds, M.B. (2003), "Identification and control of the Rotary Inverted Pendulum". *TU/ e Traineeship Report*, 2003, 55 p.

5. Cazzolato, B.S., and Prime, Z. (2011), "On the dynamics of the Furuta pendulum". *Journal of Control Science and Engineering*, Article ID 528341, 8 p.

6. Kats, C.J.A. (2004), "Nonlinear control of a Furuta rotary inverted pendulum". *TUIe Bachelor Final Project Report*, Vol, 2004.069, Technische Universiteit Eindhoven, 23 p.

7. Akesson, J., and Astrom, K.J., (2001), "Safe manual control of the Furuta pendulum", *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Control Applications*. (CCA '01). IEEE--Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2001, pp. 890-895.
8. Acosta, J.A., Acosta, J.A., and Gordillo, F. (2001), "Swing up the Furuta pendulum by the speed gradient method", *European Control Conference (ECC),* 7 p.
9. Ling, K.V., Falugi, P., Maciejowski, J.M., and Chisci, L. (2002), "Robust predictive control of the Furuta Pendulum", *15th Triennial World Congress of the International Federation of Automatic Control*, Barcelona, 13 p.
10. Roenko, E. Volianskij, R., and Sadovoy, O. (2013), "Clarifying the dynamics equations of the Furuta pendulum", *Engineering mechanics & transport*, Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua, pp. 98-101.

Статью представил д-р техн. наук. заведующий кафедры электротехники и электромеханики Днепровского государственного технического университета Низимов В.Б.

Поступила (received) 11.08.2017

Roenko Efim, Assistant
Dneprovskiy state technical university
Dneprostroevska street, 2, city Kamenskoe, Ukraine, 51918
Tel.: +38 098 2223015 E-mail: efim.mail@gmail.com

Sadovoy Oleksandr, Dr. Sci. Tech., Professor
Dneprovskiy state technical university
Dneprostroevska street, 2, city Kamenskoe, Ukraine, 51918
Tel.: +38 067 7791248 E-mail: sadovoyav@ukr.net

УДК 519.7+681.5

Лінеаризація математичної моделі маятника Фурути / Роєнко Ю.С., Садовой О.В. // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Інформатика та моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2017. – № 50 (1271). – С. 46 – 54.

Керування структурно нестійкими об'єктами за допомогою класичних методів не дозволяє досягти необхідної стійкості у великому. Використання моделі маятника Фурути, описаного за допомогою рівняння Ейлера – Лагранжа другого порядку, дозволяє вивести нелінійні закони керування, які забезпечать необхідну якість стабілізації. Отримана модель лінеаризованої системи записана у зручній формі для аналітичного конструювання регуляторів. Іл.: 2. Бібліогр.: 10 назв.

Ключові слова: структурно нестійкі об'єкти, маятник Фурути, лінеаризація, нелінійні закони керування.

УДК 519.7+681.5

Линеаризация математической модели маятника Фуруты / Роенко Е.С., Садовой А.В. // Вестник НТУ "ХПИ". Серия: Информатика и моделирование. – Харьков: НТУ "ХПИ". – 2017. – № 50 (1271). – С. 46 – 54.

Управление структурно неустойчивыми объектами с помощью классических методов не позволяет достичь необходимой стабилизации в большом. Использование модели маятника Фуруты, описанного с помощью уравнения Эйлера – Лагранжа второго порядка, позволяет определить нелинейные законы управления, которые обеспечат необходимое качество стабилизации. Полученная модель линеаризованной системы записана в форме, удобной для аналитического конструирования регуляторов. Ил.: 2. Библиогр.: 10 назв.

Ключевые слова: структурно неустойчивые объекты, маятник Фуруты, линеаризация, нелинейные законы управления.

UDC 519.7 +681.5

Linearization of the mathematical model of the Furuta pendulum / Roenko E.S., Sadovoy O.V. // Herald of the National Technical University "KhPI". Subject issue: Information Science and Modelling. – Kharkov: NTU "KhPI". – 2017. – №. 50 (1271). – P. 46 – 54.

Managing structurally unstable objects using classical methods does not achieve the required stability. Using the Furuta pendulum model described by the second-order Euler-Lagrange equation allows us to derive non-linear control laws that will provide the required stabilization quality. The obtained model of the linearized system is written down in a convenient form for the analytical design of the controllers. Figs.: 2. Refs.: 10 titles.

Keywords: structurally unstable objects, Furuta pendulum, linearization, nonlinear control laws.