ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

УДК 532.546: 519.6 DOI: 10.20998/2411-0558.2019.13.04

С. О. ГУСЕЙНЗАДЕ, Азербайджанский Государственный Университет Нефти и Промышленности, г. Баку,

И. К. ГАДИМОВ, Азербайджанский Государственный Университет Нефти и Промышленности, г. Баку

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ СЛАБОСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБОПРОВОДЕ

Рассматривается процесс нестационарного течения слабосжимаемой жидкости по трубопроводу, описываемый двумерной моделью в виде нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных. Проводится осреднение модели по поперечному сечению трубопровода и предлагается зависимость напряжения трения на стенке трубопровода от скорости течения. В рамках полученной модели поставлена обратная задача по определению скорости течения на стенке трубопровода. Построен дискретный аналог поставленной задачи и предложен способ ее расщепления на простые разностные задачи относительно приближенных значений искомых функций. Библиогр.: 14 назв.

Ключевые слова*:* трубопровод**;** двумерная модель; напряжение трения на стенке трубопровода; разностная задача; обратная задача.

Постановка проблемы и анализ литературы. В настоящее время трубопроводный транспорт является наиболее эффективным средством транспортировки разнообразных жидкостей (воды, нефти, нефтепродуктов и др.)**.** Обычно в практике проектирования трубопроводов используется допущение, согласно которому движение жидкостей рассматривается как стационарное и исходя из этого допущения, определяют расчетную пропускную способность, режим работы насосов и другие параметры потока. Однако, как показывает практика трубопроводного транспорта жидкостей, пуск или остановка трубопровода, включение или отключение перекачивающей станции, начало или прекращение отбора жидкости и другие технологические операции приводят к возникновению в трубопроводе нестационарного потока жидкостей. При этом для исследования нестационарного потока жидкостей в трубопроводах используют одномерную модель слабосжимаемой жидкости в виде системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных относительно скорости течения и давления [1 – 3]. Эти уравнения выражают законы сохранения массы и изменения количества движения жидкости, текущей в трубопроводе. При выводе этих уравнений предполагается выполнение условия прилипания на стенке трубопровода. Однако необходимо

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

отметить, что проведенные многочисленные экспериментальные и численные исследования свидетельствуют о наличии условия скольжения на твердой стенке трубопровода [4 – 6]. Обычно рассматриваются три модели граничных условий на стенке трубопроводов: прилипание, проскальзывание по закону Навье и проскальзывание с предельным напряжением. Однако при исследовании течения жидкостей в трубопроводах практически невозможно определить, какое из этих граничных условий реализуется на стенке трубопровода.

В связи с этим для практики трубопроводного транспорта жидкостей важное значение имеют гидродинамические исследования нестационарных потоков в трубопроводах при неизвестном граничном условии на стенке трубопровода.

Постановка задачи. Пусть рассматривается процесс нестационарного течения слабосжимаемой вязкой жидкости в горизонтально расположенном трубопроводе с жесткими стенками. Предполагается, что ось $0z$ направлена вдоль оси трубопровода и поток направлен вдоль оси трубопровода. Считая течение слабосжимаемой вязкой жидкости осесимметричным, полную систему дифференциальных уравнений, описывающих данное течение можно представить в виде [3, 7]:

$$\rho_0 \frac{dv_z}{dt} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau) + \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} - \frac{\partial p}{\partial z}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c^2 \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0, \tag{2}$$

$$0 < r < R, \quad 0 < z < l, \quad 0 < t \le T,$$

где v_z – компонент скорости течения жидкости, направленный параллельно оси трубопровода; P – давление; $\rho_0 = const$ – плотность жидкости; μ – динамическая вязкость жидкости; c – скорость распространения звука в жидкости; l, R – длина и радиус трубопровода, $\tau = \mu \dfrac{\partial v_z}{\partial r}$ – напряжение трения; $\dfrac{dv_z}{dt} = \dfrac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \dfrac{\partial v_z}{\partial z}$. Предполагается, что остальные компоненты скорости – v_r и v_φ равны нулю.

Из системы (1) следует, что v_z является функцией переменных r, z и t, а давление p не зависит от переменных r и φ, т.е.

$$v_z = v_z(r, z, t), \quad p = p(z, t).$$

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

Проводим процедуру осреднения уравнений системы (1). С этой целью обе части каждого уравнения умножим на $2\pi r$ и результат проинтегрируем на отрезке $[0, R]$ по переменной r, одновременно деля на площадь поперечного сечения трубопровода πR^2. В результате будем иметь

$$\rho_0 \frac{du}{dt} = \frac{2}{R}\tau_w + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial p}{\partial z}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c^2 \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \tag{3}$$

где $u(z,t) = 2\pi \int_0^R r v_z(r,z,t) dr / \pi R^2$ – средняя скорость по сечению трубопровода, τ_w – напряжение трения на стенке трубопровода.

Известно, что для установления зависимости напряжения трения на стенке трубопровода от параметров течения пользуются гипотезой квазистационарности, т.е. предполагается, что напряжение трения, установленное для стационарного течения

$$\tau_w = -\lambda \frac{\rho_0 u^2}{8}, \tag{4}$$

сохраняется и для нестационарных [1 – 3], где λ – коэффициент гидравлического сопротивления. Данная формула применяется, как для турбулентного режима течения, так и ламинарного, различие заключается лишь в значениях коэффициента гидравлического сопротивления. Необходимо отметить, что формулу (4), а также явное выражение для коэффициента гидравлического сопротивления можно обосновать только лишь для стационарного ламинарного потока на основе одномерной модели течения несжимаемой жидкости по трубопроводу при использовании граничного условия прилипания на стенке трубопровода. Формулу (4) для ламинарного течения вязкой жидкости при условии прилипания на стенке трубопровода можно записать в виде [8]

$$\tau_w = -\frac{4\mu}{R} u. \tag{5}$$

Очевидно, что использование формулы (4) (или (5)) для описания напряжения трения на стенке трубопровода при условии не прилипания неправомерно. Для установления зависимости напряжения трения на стенке трубопровода от параметров потока при условии не прилипания используем подход, предложенный в [8]. В результате получим

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

$$\tau_w = -\frac{4\mu}{R}u + \frac{4\mu}{R}v_z\big|_{r=R}\ .$$

Предположим, что скорость течения жидкости на стенке трубопровода $v_z\big|_{r=R}$ зависит только от переменной t. Обозначив $f(t) = v_z\big|_{r=R}$, систему уравнений (3) запишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{8\mu}{\rho_0 R^2}u + \frac{8\mu}{\rho_0 R^2}f(t) + \frac{\mu}{\rho_0}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z},$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c^2\frac{\partial u}{\partial z} = 0\ . \tag{6}$$

Пусть состояние потока жидкости в трубопроводе в начальный момент времени $t = 0$ известно, т.е. для системы уравнений (6) известны следующие начальные условия

$$u(z,0) = \phi(z), \tag{7}$$

$$p(z,0) = \psi(z). \tag{8}$$

Предполагая, что на левом конце трубопровода обеспечивается подача жидкости в трубопровод, краевое условие при $z = 0$ можно представить в виде

$$u(0,t) = w_0(t). \tag{9}$$

А краевое условие на правом конце трубопровода $z = l$ представим в виде

$$u(l,t) = w_l(t). \tag{10}$$

Однако ввиду того, что кроме функций $u(z,t)$ и $p(z,t)$ неизвестным является также функция $f(t)$, для корректной постановки задачи, помимо условий (7) – (10), необходимо задавать дополнительное условие. Пусть дополнительное условие задано в виде

$$p(0,t) = \theta(t). \tag{11}$$

Таким образом, задача заключается в определении функций $u(z,t)$, $p(z,t)$ и $f(t)$, удовлетворяющих системе уравнений (6) и условиям (7) – (11). Поставленная задача относится к классу обратных задач, связанных с восстановлением зависимости правых частей параболических уравнений от времени [9 – 11]. Постановки и численные методы решения

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

обратных задач по восстановлению зависимости правых частей параболических уравнений от времени рассмотрены в [10 – 14].

Целью статьи является разработка нового численного метода решения задачи (6) – (11), основанного на построении дискретного аналога этой задачи и расщеплении ее на простые разностные задачи относительно приближенных значений неизвестных функций.

Метод решения. Построим дискретный аналог задачи (6) – (11). С этой целью сначала дискретизируем задачу по времени t. Введем равномерную разностную сетку в области $0 \le t \le T$ по переменной t $\overline{\omega_t} = \{t_j = j\Delta t,\ j = \overline{0,m}\}$ с шагом $\Delta t = \frac{T}{m}$. Производные $\frac{\partial u(z,t)}{\partial t}$ и $\frac{\partial p(z,t)}{\partial t}$ в уравнениях системы (6) при t_j, $j = \overline{1,m}$ дискретизируем разностью "назад"

$$\left.\frac{\partial u(z,t)}{\partial t}\right|_{t=t_j} \approx \frac{u(z,t_j) - u(z,t_{j-1})}{\Delta t}, \quad \left.\frac{\partial p(z,t)}{\partial t}\right|_{t=t_j} \approx \frac{p(z,t_j) - p(z,t_{j-1})}{\Delta t}.$$

Используя явно-неявные схемы для аппроксимации операторов уравнений (6), запишем их в следующем виде

$$\frac{u^j(z) - u^{j-1}(z)}{\Delta t} + u^{j-1}(z)\frac{du^j(z)}{dz} = -\frac{8\mu}{\rho_0 R^2}u^j(z) +$$

$$+\frac{8\mu}{\rho_0 R^2}f^j + \frac{\mu}{\rho_0}\frac{d^2u^j(z)}{dz^2} - \frac{1}{\rho_0}\frac{dp^j(z)}{dz},$$

$$\frac{p^j(z) - p^{j-1}(z)}{\Delta t} + \rho_0 c^2 \frac{du^j(z)}{dz} = 0,$$

$$j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

$$u^0(z) = \phi(z), \quad p^0(z) = \psi(z),$$

где $u^j(z) \approx u(z,t_j)$, $p^j(z) \approx p(z,t_j)$, $f^j \approx f(t_j)$.

Из второго уравнения последней системы найдем $p^j(z)$

$$p^j(z) = p^{j-1}(z) - \rho_0 c^2 \Delta t \frac{du^j(z)}{dz}, \tag{12}$$

и полученное выражение подставим в первое уравнение системы. В результате будем иметь

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

$$\frac{u^j(z)-u^{j-1}(z)}{\Delta t}+u^{j-1}(z)\frac{du^j(z)}{dz}=-\sigma u^j(z)+$$
$$+(\frac{\mu}{\rho_0}+c^2\Delta t)\frac{d^2u^j(z)}{dz^2}-\frac{1}{\rho_0}\frac{dp^{j-1}(z)}{dz}+\sigma f^j, \tag{13}$$

где $\sigma=\dfrac{8\mu}{\rho_0 R^2}$.

А краевые условия для уравнения (13) принимают вид

$$u^j(0)=w_0^j, \tag{14}$$

$$u^j(l)=w_l^j, \tag{15}$$

где $w_0^j=w_0(t_j)$, $w_l^j=w_l(t_j)$.

Очевидно, что условия (14) и (15) недостаточны для определения двух неизвестных – $u^j(x)$ и f^j, из уравнения (13). Запишем уравнение (12) при $z=0$

$$p^j(0)=p^{j-1}(0)-\rho_0 c^2\Delta t\frac{du^j(0)}{dz}.$$

Отсюда, учитывая краевое условие (11), получим дополнительное условие для уравнения (13)

$$\frac{du^j(0)}{dz}=-\frac{\theta^j-\theta^{j-1}}{\rho_0 c^2\Delta t}, \tag{16}$$

где $\theta^j=\theta(t_j)$.

Теперь полученную задачу (12) – (16) дискретизируем по переменной z. С этой целью введем равномерную разностную сетку по переменной z в области $[0<z<l]$

$$\overline{\omega}_z=\left\{z_i=i\Delta z,\ i=\overline{0,n},\ \Delta z=l/n\right\}.$$

Дискретный аналог задачи (12) – (16) на сетке $\overline{\omega}_z$ представим в виде

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

$$\frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t} + u_i^{j-1}\frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{\Delta z} = -\sigma u_i^j + (\frac{\mu}{\rho_0} + c^2\Delta t)\frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta z^2} -$$

$$-\frac{1}{\rho_0}\frac{p_i^{j-1} - p_{i-1}^{j-1}}{\Delta z} + \sigma f^j,$$

$$p_i^j = p_i^{j-1} - \rho_0 c^2 \Delta t \frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{\Delta z},$$

$$\frac{u_1^j - u_0^j}{\Delta z} = -\frac{\theta^j - \theta^{j-1}}{\rho_0 c^2 \Delta t},$$

$$u_n^j = w_l^j,$$

$$u_0^j = w_0^j,$$

где $u_i^j \approx u(z_i, t_j)$, $p_i^j \approx p(z_i, t_j)$.

Полученную систему разностных уравнений преобразуем к виду

$$a_i u_{i-1}^j - d_i u_i^j + b_i u_{i+1}^j = \Delta t \Delta z (p_i^{j-1} - p_{i-1}^{j-1}) / \rho_0 - \Delta z^2 u_i^{j-1} - \Delta t \Delta z^2 \sigma f^j, \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{17}$$

$$u_0^j = u_1^j + \frac{\Delta z(\theta^j - \theta^{j-1})}{\rho_0 c^2 \Delta t}, \tag{18}$$

$$u_0^j = w_0^j, \tag{19}$$

$$u_n^j = w_l^j, \tag{20}$$

$$p_i^j = p_i^{j-1} - \rho_0 c^2 \Delta t \frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{\Delta z}, \ i = \overline{1, n}, \ j = 1, 2, \ldots, m, \tag{21}$$

$$u_i^0 = \phi(z_i), \ p_i^0 = \psi(z_i), \ i = \overline{0, n}, \tag{22}$$

где $a_i = \Delta t \Delta z u_i^{j-1} + \Delta t(\mu / \rho_0 + c^2 \Delta t)$, $b_i = \Delta t(\mu / \rho_0 + c^2 \Delta t)$,

$d_i = a_i + b_i + \Delta z^2 + \Delta t \Delta z^2 \sigma$.

Разностная задача (17) – (22) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, в которой в качестве неизвестных выступают приближенные значения искомых функций $u(z,t)$, $p(z,t)$ и $f(t)$ во

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

внутренних узлах разностной сетки $\overline{\omega_t} \times \overline{\omega_z}$, т.е. u_i^j, p_i^j, f^j, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$.

Однако очевидно, что при каждом фиксированном значении j, $j = 1, 2, \ldots, m$ разностную задачу (17) – (22) можно расщепить на две разностные задачи: первая задача (17) – (20) относительно переменных u_i^j, f^j, $i = \overline{1,n-1}$ и вторая задача (21) относительно переменных p_i^j, $i = \overline{1,n}$. Причем определив решение первой задачи, решение второй задачи можно найти по явной формуле.

Теперь предположим, что решение системы уравнений (17) – (20) при каждом фиксированном значении j, $j = 1, 2, \ldots, m$ можно представить в виде

$$u_i^j = \alpha_i u_{i-1}^j + \beta_i, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{23}$$

где α_i, β_i – неизвестные пока коэффициенты. Запишем аналогичное выражение для u_{i+1}^j

$$u_{i+1}^j = \alpha_{i+1} u_i^j + \beta_{i+1}.$$

Подставляя выражение для u_{i+1}^j в уравнение (17), получим следующие нелинейные уравнения для определения коэффициентов α_i, β_i:

$$\alpha_i = \frac{a_i}{d_i - b_i \alpha_{i+1}}, \tag{24}$$

$$\beta_i = \frac{b_i}{d_i - b_i \alpha_{i+1}} \beta_{i+1} + \frac{\Delta z^2 u_i^{j-1} - \Delta t \Delta z (p_i^{j-1} - p_{i-1}^{j-1}) / \rho_0}{d_i - b_i \alpha_{i+1}} + \frac{\Delta t \Delta z^2 \sigma}{d_i - b_i \alpha_{i+1}} f^j, \tag{25}$$

$$i = n-1, n-2, ..., 1.$$

Уравнения (24), (25) представляют собой нелинейные разностные уравнения первого порядка. Для решения этих уравнений необходимо задавать начальные значения коэффициентов α_i, β_i. Эти начальные значения находим из требования эквивалентности представления (23) при $i = n$, т.е. $u_n^j = \alpha_n u_{n-1}^j + \beta_n$, условию (20)

$$\alpha_n = 0,$$

$$\beta_n = w_l^j. \tag{26}$$

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

Таким образом, определив α_n, остальные значения коэффициентов α_i, $i = n-1,\ n-2,\ ...,1$ последовательно можно найти по формуле (24).

С целью разделения переменных в нелинейном уравнении для β_i, представим его в виде [14]

$$\beta_i = \xi_i + \eta_i f^j, \qquad i = n-1,\ n-2,\ ...,1, \tag{27}$$

где ξ_i, η_i – неизвестные переменные.

Подставив соотношение (27) в уравнение (25), будем иметь

$$\xi_i + \eta_i f^j = \frac{b_i}{d_i - b_i\alpha_{i+1}}\xi_{i+1} + \frac{b_i}{d_i - b_i\alpha_{i+1}}\eta_{i+1} f^j +$$
$$+ \frac{\Delta z^2 u_i^{j-1} - \Delta t \Delta z (p_i^{j-1} - p_{i-1}^{j-1})/\rho_0}{d_i - b_i\alpha_{i+1}} + \frac{\Delta t \Delta z^2 \sigma}{d_i - b_i\alpha_{i+1}} f^j$$

или

$$\left[\xi_i - \frac{b_i}{d_i - b_i\alpha_{i+1}}\xi_{i+1} - \frac{\Delta z^2 u_i^{j-1} - \Delta t \Delta z (p_i^{j-1} - p_{i-1}^{j-1})/\rho_0}{d_i - b_i\alpha_{i+1}}\right] +$$
$$+ f^j\left[\eta_i - \frac{b_i}{d_i - b_i\alpha_{i+1}}\eta_{i+1} - \frac{\Delta t \Delta z^2 \sigma}{d_i - b_i\alpha_{i+1}}\right] = 0.$$

Соотношение (27) также подставим в (26) $\xi_n + \eta_n f^j = w_l^j$.

Из последних соотношений получим следующие разностные задачи для определения вспомогательных переменных ξ_i, η_i:

$$\xi_i - \frac{b_i}{d_i - b_i\alpha_{i+1}}\xi_{i+1} - \frac{\Delta z^2 u_i^{j-1} - \Delta t \Delta z (p_i^{j-1} - p_{i-1}^{j-1})/\rho_0}{d_i - b_i\alpha_{i+1}} = 0, \tag{28}$$

$$i = n-1,\ n-2,\ ...,1,$$

$$\xi_n = w_l^j. \tag{29}$$

$$\eta_i - \frac{b_i}{d_i - b_i\alpha_{i+1}}\eta_{i+1} - \frac{\Delta t \Delta z^2 \sigma}{d_i - b_i\alpha_{i+1}} = 0, \quad i = n-1,\ n-2,\ ...,1, \tag{30}$$

$$\eta_n = 0. \tag{31}$$

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

Разностные задачи (28), (29) и (30), (31) представляют собой линейные разностные задачи первого порядка. Решения этих задач можно записать в явном виде. С этой целью уравнение (28) запишем в виде

$$\xi_i = s_i \xi_{i+1} + y_i ,$$

где $s_i = \dfrac{b_i}{d_i - b_i \alpha_{i+1}}$, $\quad y_i = \dfrac{\Delta z^2 u_i^{j-1} - \Delta t \Delta z (p_i^{j-1} - p_{i-1}^{j-1}) / \rho_0}{d_i - b_i \alpha_{i+1}}$.

Подставив сюда выражение для ξ_{i+1}

$$\xi_{i+1} = s_{i+1} \xi_{i+2} + y_{i+1} ,$$

будем иметь

$$\xi_i == s_i s_{i+1} \xi_{i+2} + s_i y_{i+1} + y_i .$$

Далее, подставляя в последнее уравнение выражения для $\xi_{i+2}, \xi_{i+3}, ..., \xi_{n-1}$, получим

$$\xi_i = \xi_n \prod_{k=i}^{n-1} s_k + \sum_{\substack{k=i+1 \\ k \le n-1}}^{n-1} y_k \prod_{e=i}^{k-1} s_e + y_i , \qquad i = n-1,\, n-2,\, ...,\, 1 .$$

Аналогично определяется решение разностной задачи (30), (31)

$$\eta_i = \eta_n \prod_{k=1}^{n-1} s_i + \sum_{\substack{k=i+1 \\ k \le n-1}}^{n-1} v_k \prod_{e=i}^{k-1} s_e + v_i , \qquad i = n-1,\, n-2,\, ...,\, 1 ,$$

где $\quad v_i = \dfrac{\Delta t \Delta z^2 \sigma}{d_i - b_i \alpha_{i+1}}$.

Учитывая представление (27) для коэффициентов β_i, решение системы уравнений (17) – (20) при каждом фиксированном значении j, $j = 1, 2, \dots, m$ можно представить в виде рекуррентного соотношения

$$u_i^j = \alpha_i u_{i-1}^j + \xi_i + \eta_i f^j , \qquad i = 1, 2, ..., n . \tag{33}$$

В последнем соотношении принимая $i = 1$ и учитывая условия (18), (19), будем иметь

$$w_0^j - \frac{\Delta z (\theta^j - \theta^{j-1})}{\rho_0 c^2 \Delta t} = \alpha_1 w_0^j + \xi_1 + \eta_1 f^j .$$

Отсюда можно определить приближенное значение искомой функции $f(t)$ при $t = t_j$, т.е. f^j

$$f^j = \frac{w_0^j(1-\alpha_1) - \xi_1 - \Delta z(\theta^j - \theta^{j-1})/\rho_0 c^2 \Delta t}{\eta_1}. \qquad (34)$$

Таким образом, вычислительный алгоритм решения разностной задачи (17) – (22) по определению u_i^j, p_i^j, $i = \overline{0,n}$ и f^j при каждом фиксированном значении $j = 1, 2, \ldots, m$, основан на решении двух линейных разностных задач первого порядка (28), (29) и (30), (31) относительно вспомогательных переменных ξ_i, η_i; определении f^j из (34); использовании представления (33) для u_i^j и, наконец, определения p_i^j из (21).

Очевидно, что для применимости предложенного вычислительного алгоритма необходимо выполнение условия

$$\eta_1 = \sum_{k=2}^{n-1} v_k \prod_{e=1}^{k-1} s_e + v_1 \neq 0,$$

где $s_i = \dfrac{b_i}{d_i - b_i\alpha_{i+1}}$, $v_i = \dfrac{\Delta t \Delta z^2 \sigma}{d_i - b_i\alpha_{i+1}}$, $a_i > 0$, $b_i > 0$, $d_i > a_i + b_i$, $0 < \alpha_{i+1} < 1$, $i = \overline{1, n-1}$.

Несложный анализ показывает, что

$$0 < s_i = \frac{b_i}{d_i - b_i\alpha_{i+1}} = \frac{b_i}{(d_i - a_i - b_i) + a_i + (1-\alpha_{i+1})b_i} < 1,\ v_i > 0,\ i = \overline{1, n-1}.$$

Следовательно, η_1 не обращается в нуль и выполняется условие $\eta_1 > 0$.

Выводы. Предложены новая математическая модель процесса нестационарного течения слабосжимаемой жидкости по трубопроводу при неизвестном граничном условии на стенке трубопровода и метод ее численной реализации. Предложенный подход позволяет найти распределения скорости течения жидкости и давления в трубопроводе при каждом дискретном значении временной переменной.

Список литературы:
1. *Чарный И.А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах / *И.А. Чарный*. – М.: Недра, 1975.
2. *Басниев К.С.* Нефтегазовая гидромеханика / *К.С. Басниев, Н.М. Дмитриев, Г.Д. Розенберг*. – Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.
3. *Лурье М.В.* Математическое моделирование процессов трубопроводного транспорта нефти, нефтепродуктов и газа / *М.В. Лурье*. – М.: РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2012. – 456 с.
4. *Neto Chiara.* Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies / *Chiara Neto, Evans, R. Drew, Elmar Bonaccurso, Hans-Jürgen Butt, Vincent S.J. Craig* // Reports on Progress in Physics. – 2005. – Vol. 68. – Issue 12. – P. 2859-2897.
5. *Lauga E.* Microfluidics: the no-slip boundary condition in Handbook of Experimental Fluid Dynamics / *E. Lauga, M.P. Brenner, H.A. Stone.* – New York: Springer, 2006. – P. 1219-1240.
6. *Гамзаев Х.М.* Численный метод решения одной нелокальной задачи трубопроводного транспорта вязких жидкостей / *Х.М. Гамзаев* // Вестник ЮУрГУ. Серия "Математика. Механика. Физика". – 2017. – Т. 9. – № 2. – С. 5-12.
7. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа / *Л.Г. Лойцянский*. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
8. *Гамзаев Х.М.* К определению коэффициента гидравлического сопротивления / *Х.М. Гамзаев, К.Ф. Ширинов* // Известия НАН Азербайджана, серия физико-технических и математических наук. – 1998. – Т. XVIII. – № 6. – С. 143-146.
9. *Алифанов О.М.* Экстремальные методы решения некорректных задач / *О.М. Алифанов, Е.А. Артюхин, С.В. Румянцев.* – М.: Наука, 1988.
10. *Самарский А.А.* Численные методы решения обратных задач математической физики / *А.А. Самарский, П.Н .Вабищевич.* – М.: Издательство ЛКИ, 2009. – 480 с.
11. *Borukhov V.T.* Identification of a time-dependent source term in nonlinear hyperbolic or parabolic heat equation / *V.T. Borukhov, G.M. Zayats* // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2015. – Vol. 91. – P. 1106-1113.
12. *Вабищевич П.Н.* Вычислительная идентификация правой части параболического уравнения / *П.Н. Вабищевич, В.И. Васильев, М.В. Васильева* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2015. – Т. 55. – № 6. – С. 1020-1027.
13. *Deng Z.C.* An inverse problem of identifying the source coefficient in a degenerate heat equation / *Z.C. Deng, K. Qian, X.B. Rao, L. Yang, G.W. Luo* // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2015. – 23 (3). – P.498-517.
14. *Gamzaev Kh.M.* Numerical Solution of Combined Inverse Problem for Generalized Burgers Equation / *Kh.M. Gamzaev* // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – Vol. 221. – № 6. – P. 833-839.

References:
1. Charny, I.A. (1975), *Unsteady motion of a real fluid in pipes*, Moskow, Nedra.
2. Basniev, K.S., Dmitriev, N.M., and Rosenberg, G.D. (2005), *Oil and gas hydromechanics*, Moscow-Izhevsk, Institute of Computer Science.
3. Lurie, M.V. (2012), *Mathematical modeling of pipeline processes of oil, petroleum products and gas*, Moscow, RSU of Oil and Gas name by Gubkin, 456 p.
4. Neto, Chiara, Evans, Drew R. Bonaccurso, Elmar, Butt, Hans-Jürgen, Craig, and Vincent, S.J. (2005), "Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies", *Reports on Progress in Physics*, Vol. 68, Issue 12, pp. 2859-2897.
5. Lauga, E., Brenner, M.P., Stone, H.A. (2006), *Microfluidics: the no-slip boundary condition in Handbook of Experimental Fluid Dynamics*. New York, Springer, pp. 1219-1240.

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

6. Hamzayev, Kh.M. (2017), "A numerical method for solving a single non-local problem of pipeline transport of viscous liquids", *Bulletin of SUSU. Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*, Vol. 9, No. 2, pp. 5-12.
7. Loitsyansky, L.G. (2003), *Fluid and gas mechanics*, Moskow, Drofa, 840 p.
8. Hamzayev, H.M., and Shirinov, K.F. (1998), "On the determination of the coefficient of hydraulic resistance", *News of the National Academy of Sciences of Azerbaijan, a series of physico-technical and mathematical sciences*, Vol. XVIII, No. 6, pp. 143-146.
9. Alifanov, O.M., Artyukhin, E.A., and Rumyantsev, S.V. (1988), *Extreme methods for solving ill-posed problems*, Moskow, Science.
10. Samarskiy, A.A., Vabishchevich, P.N. (2009), *Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics*, Publishing House LKI, Moskow, 480 p.
11. Borukhov, V.T., Zayats G.M. (2015), "Identification of a time-dependent source term in nonlinear hyperbolic or parabolic heat equation", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 91, pp. 1106-1113.
12. Vabishchevich, P.N., Vasiliev, V.I., and Vasilyeva, M.V. (2015), "Computational Identification of the Right Part of a Parabolic Equation, Zh. will calculate", *Mathematics and mat. physics*, Vol. 55, No. 6, pp. 1020-1027.
13. Deng, Z.C., Qian, K., Rao, X.B., Yang, L. and Luo, G.W. (2015), "An inverse problem of identifying the source coefficient in a degenerate heat equation", *Inverse Problems in Science and Engineering*, 23 (3), pp. 498-517.
14. Gamzaev, Kh.M. (2017), "Numerical Solution of Combined Inverse Problem for Generalized Burgers Equation", *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 221, No. 6, March 28, pp. 833-839.

Статтю представив д.т.н., проф. кафедры "Общая и прикладная математика" Азербайджанского государственного университета нефти и промышленности Х.М. Гамзаев.

Поступила (received) 30.04.2019

Huseynzade Sevil Oktay gyzy, Dotcent,
Azerbaijan State University of Oil and Industry,
Department of General and Applied Mathematics
Azadlig Avenue, 20, AZ 1010 Baku
e-mail: sevilhuseynzade@gmail.com

Gadimov Ilgar Kamil oglu, dissertator,
Azerbaijan State University of Oil and Industry,
Department of General and Applied Mathematics
Azadlig Avenue, 20, AZ 1010 Baku,
e-mail: qadimovilqar@gmail.com

УДК 532.546: 519.6

Про одну модель нестаціонарної течії слабостисливої рідини в трубопроводі / Гусейнзаде С.О., Гадімов І.К. // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Інформатика та моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2019. – № 13 (1338). – С. 34 – 47.

Розглядається процес нестаціонарної течії слабостисливої рідини по трубопроводу, що описується двовимірної моделлю у вигляді нелінійної системи диференціальних рівнянь у частинних похідних. Проводиться осреднение моделі за поперечним перерізом трубопроводу і пропонується залежність напруги тертя на стінці трубопроводу від швидкості течії. В рамках отриманої моделі поставлена зворотна задача по визначенню швидкості течії на стінці трубопроводу. Побудований дискретний аналог поставленої задачі і запропонований спосіб її розщеплення на прості різницеві задачі щодо наближених значень шуканих функцій. Бібліогр.: 14 назв.

Ключові слова: трубопровід; двовимірна модель; напруга тертя на стінці трубопроводу; різницева задача; зворотна задача.

УДК 532.546: 519.6

Об одной модели нестационарного течения слабосжимаемой жидкости в трубопроводе / Гусейнзаде С.О., Гадимов И.К. // Вестник НТУ "ХПИ". Серия: Информатика и моделирование. – Харьков: НТУ "ХПИ". – 2019. – № 13 (1338). – С. 34 – 47.

Рассматривается процесс нестационарного течения слабосжимаемой жидкости по трубопроводу, описываемый двумерной моделью в виде нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных. Проводится усреднение модели по поперечному сечению трубопровода и предлагается зависимость напряжения трения на стенке трубопровода от скорости течения. В рамках полученной модели поставлена обратная задача по определению скорости течения на стенке трубопровода. Построен дискретный аналог поставленной задачи и предложен способ ее расщепления на простые разностные задачи относительно приближенных значений искомых функций. Библиогр.: 14 назв.

Ключевые слова*:* трубопровод**;** двумерная модель; напряжение трения на стенке трубопровода; разностная задача; обратная задача.

UDC 532.546: 519.6

About one model of non-stationary flows of a weakly compressible liquid in a pipeline / Huseynzade C.O., Gadimov I.K. // Herald of the National Technical University "KhPI". Series of "Informatics and Modeling". – Kharkov: NTU "KhPI". – 2019. – №.13 (1338). – P. 34 – 47.

The process of unsteady flow of a weakly compressible fluid through a pipeline, described by a two-dimensional model in the form of a nonlinear system of partial differential equations, is considered. The model is averaged over the cross section of the pipeline and the dependence of the friction stress on the pipe wall on the flow velocity is proposed. Within the framework of the model obtained, the inverse problem was posed to determine the flow velocity on the pipeline wall. A discrete analogue of the problem is constructed and a method for its splitting into simple difference problems with respect to the approximate values of the unknown functions is proposed. Refs.: 14 titles.

Keywords: pipeline; two-dimensional model; friction stress on the pipe wall; difference problem; inverse problem.