УДК 001.71

О.М. ПРОХОРОВА, канд. физ.-мат. наук, доц., НТУ «ХПИ»

О РАЗВИТИИ ТЕОРИИ ОСОБЫХ ТОЧЕК ПЛОСКИХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ ПОСЛЕ 18 ВЕКА

Прослежено развитие теории особых точек плоских кривых в XIX веке, изучен процесс проникновения полученных результатов в учебную литературу, а также научный вклад отечественных математиков в эту теорию.

Ключевые слова: особые точки: возврата 1-го и 2-го рода, самопересечения, k -кратные; кривые: алгебраические, плоские.

Введение. Настоящая статья является продолжением статьи [8], в которой прослежены основные этапы возникновения и развития теории особых точек плоских кривых с момента ранних упоминаний о них до начала XIX в., изучен процесс проникновения полученных результатов в учебную литературу в рассматриваемый период, а также вклад отечественных математиков в эту теорию.

Актуальность. В данной статье автор продолжает исследования указанной тематики относящейся к 19 веку. Обе работы в совокупности – первое в историко-математической литературе исследование, специально посвященное особым точкам кривых.

Цель и задачи. В изучении особых точек существенно новые шаги были сделаны математиками только в XIX столетии. Развитие происходило в трех глобальных направлениях. Первое – исследование особых точек дифференциальными методами, второе связано со становлением методов комплексной переменной [7, с. 181]. В статье мы остановимся на дифференциальных методах.

Историография. Основной обзор литературы сделан в [8]. Интересно также проследить, как понятие особых точек и методы их исследования входили в учебную литературу. Исторический обзор учебной литературы по этому вопросу сделан впервые в [3].

В XVIII в. теория кривых 3-го и 4-го порядков излагалась в основном вслед за теорией кривых 2-го порядка, в том числе во "Введении" Эйлера.

В XIX в. в курсы аналитической геометрии включается только учение о прямых и кониках, теория алгебраических кривых соединяется с аффинной геометрией. Алгебраические кривые теперь, как правило, рассматриваются уже не на евклидовой или аффинной плоскости, а на проективной, причем для простоты выкладок эта плоскость предполагается комплексной. Классическим изложением такой теории является "Теория алгебраических кривых" (1839) Плюккера. Об этом направлении подробно говорится в [7, с.49]. Мы проследим, как теория особых точек входила в учебники по дифференциальному исчислению.

Первопроходцем в этом направлении был Лопиталь. Подробнее об этом – в первой части статьи [8]. Затем только в трехтомном учебнике С.Ф.Лакруа (1797-1802) «Начальные основания дифференциального исчисления»(1797) (русский перевод 1822) можно увидеть сведения об особых точках. К ним причисляются те, в которых кривая *"представляет собой какое ни есть примечательное обстоятельство*" [2, с.110]. Согласно этому определению к особым точкам относили и точки экстремума, и точки перегиба. Первым условием их существования было обращение в нуль первой производной в этой точке. Для точек экстремума и перегиба Лакруа приводит условия, в основном соответствующие современным. Для отыскания особых точек он формулирует следующее правило: "*находятся абсциссы, в которых производные, начиная с некоторого порядка, обращаются в нуль или в бесконечность вида* $\frac{0}{0}$" [2, с. 111]. Вид особой точки определяется с помощью исследования положения касательной в этой точке и направления ветвей кривой относительно касательной, с учетом их выпуклости или вогнутости. Лакруа пытается создать алгоритм для определения особых точек, рассматривая кривые $y = b + c(x-a)^m$, $\left(y - x^2\right)^2 = x^5$, $ay^2 - x^3 + (b-c)x^2 + cbx = 0$. Эти кривые, по словам Лакруа, содержат все виды особых точек.

Несмотря на попытки "улучшить приложения дифференциального исчисления к определению особых точек", у него встречается дифференциальный признак $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ или ∞, почерпнутый еще у И.Бернулли и Лопиталя, и принятый без возражения Лакруа, не характерный для точек возврата.

Общих аналитических признаков для обнаружения особых точек мы не находим в учебнике Лакруа. Однако он впервые пытается выявить возможность наличия экстремумов в особых точках. В связи с этим он приходит к ошибочному заключению о том, что в точках возврата 1-го и 2-го рода не может быть ни максимума, ни минимума. В качестве примера рассматривается кривая $y = bx^m + c(x-a)^{\frac{p}{q}}$ при $b = 1$, $m = 2$, $c = 1$, $a = 0$ и $\frac{p}{q} = \frac{5}{2}$.

В книге О.Коши (1826) [1] перечисляются особые точки кривых, приводятся разнообразные примеры, однако аналитические признаки их отыскания не указываются. К особым точкам, помимо точек перегиба, возврата 1-го и 2-го рода и узловых, он впервые относит точки разрыва функций, а именно точки прекращения, выходящие (точки разрыва 1-го рода – скачки) и угловые, а также особые точки кривых вида

$$y = x\sin\frac{1}{x}, \quad (1)$$

в которых направление касательных не определено [1, с.76]. Этот вклад Коши в формирование теории особых точек в историко-математической литературе впервые был отмечен автором в [3].

Детальное исследование различных видов особых точек кривых с целью выяснения того, в каких из них может быть экстремум, мы находим у А.Н.Коркина в статье «О наибольших и наименьших величинах функций»(1857). В IV главе он приходит к выводу, что в кратных точках (узел – в современной терминологии), точках перегиба и сопряженных (изолированных) экстремума быть не может. Коркин доказывает, что не может быть экстремума в начале координат и у кривой (1), указанной Коши.

Точки, в которых может быть экстремум, Коркин разделяет на "два отдела". К первому "отделу" относит точки возврата 1-го рода в случае, когда касательная перпендикулярна оси Ox, и точки разрыва функций 1-го рода. Второй "отдел" составляют точки возврата 2-го рода и точки возврата 1-го рода, не ходящие в первый, а также некоторые точки разрыва 1-го рода. Для отыскания экстремума в особых точках Коркин исследует знак первой производной в окрестности особой точки x_0, учитывая, действительное или мнимое значение принимает функция в точках $x_0+\varepsilon$ и $x_0-\varepsilon$.

Коши и Коркин рассматривают кривые, заданные в явном виде.

В современных учебниках исследования на экстремум в особых точках, как правило, не представлены, поэтому статья Коркина может быть полезной для студентов и преподавателей при изучении теории экстремумов и построении графиков функций.

Первым отечественным учебником, в котором достаточно подробно исследуются вопросы, связанные с нахождением особых точек, можно считать книгу Н. Е. Зернова «Дифференциальное исчисление и применение его к геометрии»(1842). Однако к особым точкам он относит и точки экстремума, так как видит сходство в нахождении тех и других. Опираясь на известные учебники О. Коши [1] и Ж. Лагранжа «Теория аналитических функций»(1797), Зернов исследует особые точки посредством разложения функции в ряд и приводит уже известные примеры кривых, имеющих особенности различных типов.

Особым точкам посвящен большой раздел в учебнике Ш. Штурма «Курс анализа»(1858).(Русский перевод1868). В нем рассматриваются только плоские кривые. Особыми точками кривой он называет такие, которые имеют "*некоторые замечательные свойства, независящие от положения кривой относительно осей координат*" [6, с.330]. К ним относятся и точки перегиба. Под кратной точкой Штурм подразумевает ту, через которую проходит несколько ветвей одной и той же кривой. Кривая имеет в такой точке несколько касательных. Возможность слияния двух касательных в одну в этом случае исключается. Для кривой, заданной неявно условием $f(x,y)=0$, он получает уравнение

$$\frac{d^2 f}{dx^2}+2\frac{d^2 f}{dxdy}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{d^2 f}{dy^2}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0 \text{ ,(2)}$$

дает два действительных различных значения для $\frac{dy}{dx}$, при ненулевых коэффициентах. Это означает, что в рассматриваемой точке имеются две касательные; следовательно, две ветви кривой пересекаются в этой точке. Такую точку Штурм называет двойной. Условиями существования тройной точки являются: $\frac{df}{dx}=0$, $\frac{df}{dy}=0$, $\frac{d^2 f}{dx^2}=0$, $\frac{d^2 f}{dy^2}=0$, $\frac{d^2 f}{dxdy}=0$. (Сохранены обозначения Штурма. Везде имеются ввиду соответствующие частные производные). Аналогичным образом поступают, когда исследуемая точка имеет более высокий порядок кратности.

Отдельно Штурмом рассматриваются точки возврата, которые он определяет как такие, в которых две ветви кривой «останавливаются», и в которых они имеют общую касательную. Аналитические условия для точек возврата им не даются, однако указывается, что в этом случае две величины $\frac{dy}{dx}$, отыскиваемые из уравнения (2), должны быть равны. Он различает возврат 1-го и 2-го рода “*по знаку* $\frac{d^2 y}{dx^2}$ *на двух ветвях около рассматриваемой точки*’’ [6, с. 318]. В качестве примеров рассматриваются лишь функции, заданные в явном виде. Например, кривая

$$y=\varphi(x)\pm(x-a)^{\frac{p}{q}}\psi(x)$$

имеет точку возврата 1-го или 2-го рода в зависимости от значения положительной несократимой дроби $\frac{p}{q}$ с четным знаменателем. У кривой $y^2=x^2\left(1-x^2\right)$ точка (0,0) – двойная (известна еще Коши [1, с.74]). Для отыскания изолированной (уединенной или сопряженной) точки мы не находим никаких признаков. Штурмом рассматривается лишь пример кривой $y=\pm(x-a)\sqrt{x-b}\quad(a<b)$, для которой точка $(a,0)$ – изолированная [4].

Подобно Коши, Штурм включает в число особых точек и точки разрыва функций: точки прекращения (пресечения) и угловые точки. Для кривых

$$y=e^{\frac{1}{x}} \text{ ,(3)}$$

$$y=\frac{1}{\ln x} \text{ (4)}$$

начало координат является точкой прекращения, для кривой

$$y=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} \text{ (5)}$$

точка (0,0) – угловая. Исследования на экстремум в особых точках Штурмом не проводятся.

Таким образом, в учебнике Штурма новых фактов по теории особых точек нет, за исключением определения. То, что особенности кривых не зависят от положения кривой относительно осей координат, математики понимали и раньше, однако Штурмом этот факт был сформулирован в виде определения впервые. Под это определение подходили и точки перегиба. Однако появление учебника Штурма можно считать важным этапом в становлении теории особых точек, сравнимым по значению с “Анализом” Лопиталя для дифференциального исчисления. В учебнике впервые была предпринята попытка создания стройной теории изложения аналитически всех основных методов исследования особых точек.

В учебнике Ж.А.Серре «Cours de calcul differential et intégral »(1862) также даются современные определения особых точек, их классификация. Каждый тип особых точек иллюстрируется примером функции достаточно общего вида. Аналогичные примеры функций мы встречаем у Ш.Штурма. В качестве примера Серре включает также функции (3), (5), известные еще О.Коши [1].

Серре дает аналитическую характеристику особых точек. Он раскладывает функцию $f(x,y)=0$ в ряд Тейлора в окрестности особой точки, затем переходит к полярным координатам и исследует поведение кривой в окрестности особой точки, изучая ее положение относительно касательной в этой точке.

Далее Серре вводит однородные координаты. Тогда кривая может быть представлена однородным уравнением $u(x,y,z)=0$. Исходя из того, что в особой точке три первые производные: $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ обращаются в нуль, Серре приходит к выводу о том, что в особой точке гессиан функции u равен нулю. Здесь впервые для нахождения особых точек применяется гессиан.

Основные положения своей теории Серре почерпнул, по-видимому, из статьи Ш.Брио "Теория особых точек плоских алгебраических кривых" (1845) [4].

В начале статьи автор обращает внимание на то, что главная идея исследования принадлежит Штурму и указана Ж.Лиувиллем в его курсе математического анализа, читаемом в Политехнической школе.

Статья начинается с изучения поведения функции в окрестности особой точки с помощью ряда Тейлора в полярных координатах, которые у Брио и Серре идентичны. Брио делает это впервые так подробно. Однако Брио для нахождения особых точек гессиан не применяет.

В рассмотрении вопроса о типе особой точки существенную роль играет положение ветвей касательной в этой точке. Угловые коэффициенты касательных к ветвям кривой $f(x,y)=0$ в k-кратной точке определяются, как известно, из уравнения

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}+C_1^k\,\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-1}\partial y}\cdot y'+C_2^k\,\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-2}\partial y^2}\cdot y'^2+\ldots+\frac{\partial^k f}{\partial y^k}\cdot y'^k=0\cdot(6)$$

Основная трудность заключается в отыскании корней того уравнения. Брио впервые предпринимает попытку определить эти корни. Делает он это с использованием теоремы Штурма о числе действительных корней многочлена с действительными коэффициентами. В заключение Брио указывает, что изложенный метод применим и для изучения особых точек пространственных кривых. Этому вопросу он предполагал посветить отдельную статью.

Таким образом, Брио впервые детально изучил поведение функции в окрестности особой точки, использовав ряд Тейлора в полярных координатах. Он также впервые пытается найти корни уравнения (6) с помощью теоремы Штурма. Исследования Брио продолжил Серре, который впервые для отыскания особых точек привлекает гессиан.

В дальнейшем в учебниках Лорана «Traité d’analyse »(1887) и Чезаро «Элементарный учебник алгебраического анализа» (1914) изложение вопроса ведется в русле исследований Брио и Серре.

Выводы. Таким образом, к концу шестидесятых годов XIX века получены условия существования особых точек в том виде, в котором они входят в современные учебники математического анализа. Оставался вопрос о решении соответствующей системы уравнений для нахождения координат особых точек. Один из методов решения таких систем был предложен М.А.Тихомандрицким (1891). Подробнее об этом рассказано в статье [5].

Список літератури: **1.** *Cochy A.* Leçons des application de calcul infinitésimal à la Geometric. – Paris. – De L‘imprimerie royale. – 1826. – 424 p. **2.** *Лакруа С.Ф.* Начальные основания дифференциального исчисления. / С. Ф. Лакру. – СПб. – 1822. – 350 с. **3.** *Ермакова В.Д.* К вопросу об особых точках плоских кривых / В. Д. Ермакова, О. М. Прохорова //История и методология науки. – Пермь: Пермский университет, 1999. – Вып.6. – С.116-129. **4.** *Прохорова О.М.* О теории особых точек плоских кривых в XIX веке / О. М. Прохорова // История и методология науки. – Пермь: Пермский университет, 2001. – Вып.8. – С.36-38. **5.** *Прохорова О.М.* К вопросу об особых точках плоских кривых / О. М. Прохорова // Вестник НТУ “ХПИ”. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2001. – № 7. – С. 159 – 162. **6.** *Штурм Ш.* Курс анализа. / Ш. Штурм. – СПб.; М.: Т-во М.О.Вольф, 1868. – Т.2. – 458 с. **7.** *Математика* XIX в.: Геометрия. Теория аналитических функций. – М. : Наука, 1981. – 270 с. **8.** *Ахиезер Е.Б.* О формировании теории особых точек плоских алгебраических кривых / Е. Б. Ахиезер, О. М. Прохорова // Вестник Пермского университета. – Пермь: ПГУ, 2011. – Вып.2(6). – С.96-100. **9.** *Эйлер Л.* Введение в анализ бесконечных./ Л. Эйлер. – М. : Физматгиз, 1961. – Т.2. – 390с.

Надійшла до редакції 11.04.2013 р.

УДК 001.71

О развитии теории особых точек плоских алгебраических кривых после 18 века / О. М. Прохорова // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Історія науки і техніки. – Х. : НТУ «ХПІ», 2013. – № 48 (1021). – С. 137–144. – Бібліогр.: 9 назв.

Простежено розвиток теорії особливих точок плоских кривих у 19 сторіччі, досліджено процес проникання отриманих результатів до учбової літератури, а також в науконесок вітчизняних математиків до цієї теорії.

Ключові слова: особові точки: возврата 1-го та 2-го роду, самоперетину, k -кратні; криві: алгебраїчні, плоскі.

In the article the main steps of the theory of special points of plane curves development in XIX century are reviewed. Entreating of these results to educational books and contribution of national mathematicians were investigated.

Keywords: points: special, self-intersection, k -fold, points of return; curves: algebraic.