

П.М. ТКАЧ, к.т.н., доц. каф. «ДВЗ і машинознавство» СНУ ім. В. Даля,
Луганськ;
О.Ю. ЧАЛА, ас. каф. «Прикладна математика» СНУ ім. В. Даля, Луганськ

ГЕОМЕТРІЯ ЦИЛІНДРИЧНИХ ПЕРЕДАЧ ЗМІШАНОГО ЗАЧЕПЛЕННЯ З КРУГОВИМИ АРКОВИМИ ЗУБЦЯМИ

У статті розглядаються питання, необхідні для вирішення основних задач синтезу і аналізу передач змішаного зачеплення з арковими зубцями, нарізаними круговими різцевими головками, за значеннями критеріїв працездатності. Побудована математична модель верстатного зачеплення і досліджена внутрішня геометрія твірної поверхні циліндричних передач змішаного зачеплення з круговим зубом. Отримані рівняння активних поверхонь кругових аркових зубців змішаного зачеплення для головки і ніжки шестерні і колеса відповідно.

Ключові слова: аркові передачі змішаного зачеплення, геометрія кругових аркових зубців

Актуальність дослідження. Найважливішим завданням машинобудування є постійне підвищення якості машин і механізмів. Істотну роль в цьому процесі відіграють зубчасті передачі, в тому числі і з арковими зубцями. Вони багато в чому визначають довговічність, надійність і конкурентоспроможність механізмів та машин, в яких вони використовуються. Тому важливість досліджень геометрії, властивостей і перспектив аркових передач, у тому числі з круговими зубцями, не знижується. Такі дослідження відповідають вимогам науково-технічного прогресу сучасного машинобудування і є актуальними.

Аналіз літератури. Аркові передачі з круговими зубцями мають відомі переваги, проте недостатня вивченість деяких аспектів такого виду зачеплення призводить до втрати великих прихованих резервів їхньої навантажувальної здатності та надійності. Найбільш поширеними методами нарізування аркових зубців є методи, засновані на використанні кругових різцевих головок з різцями, що спрофільовані у відповідності з прийнятим вихідним контуром. У сучасному машинобудуванні для профілювання різців використовуються вихідні контури, окреслені прямими [1] і дугами кіл [2, 3]. Аркові передачі з зубцями, утвореними вихідним контуром, геометрія якого синтезована за значеннями критеріїв працездатності, були досліджені у роботах [4-6]. Однак у зазначених роботах не розглянуті аркові передачі змішаного зачеплення [7], які не мають властивих позаполюсним зачепленням кінематичних і технологічних обмежень. В роботі [8] розглянуто геометрію аркової зубчастої передачі змішаного зачеплення. Проте залежності, отримані в цій роботі, неможна застосувати без додаткових перетворень до аркових передач з круговими зубцями.

Мета статті – отримати та проаналізувати рівняння, що описують геометрію аркових передач змішаного зачеплення з круговим зубом, а також аналітичні залежності, що зв'язують значення показників працездатності таких передач з геометрією зубців та інструменту.

Постановка завдання. Розглянемо зубці інструментальної рейки, що спрофільовані в нормальному перерізі несиметричним вихідним контуром (рис. 1). Їх поздовжня лінія по ширині зубчастого вінця окреслена дугою кола з радіусом R_r (рис. 2), це номінальний радіус різцевої головки.

Матеріали досліджень. Профіль вихідного контуру задамо в параметричному вигляді (для головки та ніжки відповідно)

$$\begin{cases} x_p = f_1(\lambda), \\ y_p = f_2(\lambda); \end{cases} \begin{cases} x_p = \Phi_1(\lambda), \\ y_p = \Phi_2(\lambda). \end{cases} \quad (1)$$

Тут f_1, f_2, Φ_1, Φ_2 – необхідну кількість разів диференційовані функції, залежні від параметра λ . Параметр λ надалі не будемо вказувати. Крива $\bar{r}_0(\mu)$, яка визначає

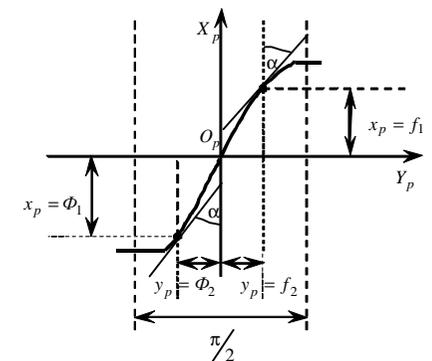


Рисунок 1 – Вихідний виробляючий рейковий контур

поздовжню форму зуба, може бути представлена в системі координат $X_n Y_n Z_n$ рівнянням

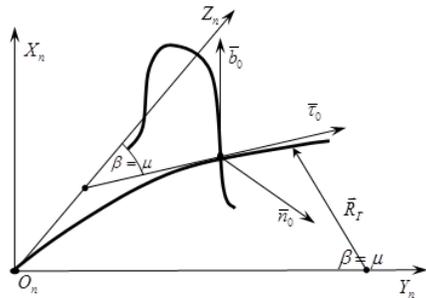


Рисунок 2 – До виводу рівняння виробляючої поверхні з круговими арковими зубцями

ці співвідношення отримано з урахуванням

$$\dot{y}_0 = R_G \sin \mu, \quad \dot{z}_0 = R_G \cos \mu, \quad \sin \beta = \sin \mu, \quad \cos \beta = \cos \mu.$$

Отже, поточний кут нахилу зубців рейки з арковими зубцями буде дорівнювати $\beta = \mu$ (див. рис. 2). Вважаючи, що площина $Y_n O_n Z_n$ є початковою площиною рейки, а початкова пряма вихідного контуру спрямована по вектору \vec{n}_0 , отримаємо рівняння поверхні зубців інструментальної рейки для опуклої сторони (голівка та ніжка відповідно)

$$\begin{cases} x_n = f_1, \\ y_n = R_G - (R_G - f_2) \cos \mu, \\ z_n = (R_G - f_2) \sin \mu; \end{cases} \quad \begin{cases} x_n = \Phi_1, \\ y_n = R_G - (R_G - \Phi_2) \cos \mu, \\ z_n = (R_G - \Phi_2) \sin \mu. \end{cases} \quad (3)$$

Рівняння поверхні зубців рейки для увігнутої сторони можуть бути отримані аналогічно, додаючи $\pi/2$ до y_n .

Проекції одиничного вектора нормалі до поверхні зубців рейки (для голівки та ніжки відповідно) мають координати [8]:

$$\vec{e}_f = \begin{cases} e_{xn} = \pm f_2'/n_f, \\ e_{yn} = -(f_1'/n_f) \cos \mu, \\ e_{zn} = (f_1'/n_f) \sin \mu; \end{cases} \quad \vec{e}_\Phi = \begin{cases} e_{xn} = \pm \Phi_2'/n_\Phi, \\ e_{yn} = -(\Phi_1'/n_\Phi) \cos \mu, \\ e_{zn} = (\Phi_1'/n_\Phi) \sin \mu. \end{cases} \quad (4)$$

Тут прийнято такі позначення $n_f = \sqrt{(f_1')^2 + (f_2')^2}$, $n_\Phi = \sqrt{(\Phi_1')^2 + (\Phi_2')^2}$.

Коефіцієнти квадратичних форм [9] виробляючої поверхні з урахуванням (3), (4) мають вигляд (для голівки та ніжки відповідно)

$$\begin{aligned} E_{nf} &= (f_1')^2 + (f_2')^2, \quad E_{n\Phi} = (\Phi_1')^2 + (\Phi_2')^2, \quad G_{nf} = (R_G \mp f_2)^2, \\ G_{n\Phi} &= (R_G \mp \Phi_2)^2, \quad N_{nf} = -\frac{f_1'}{n_f} (R_G \mp f_2), \quad N_{n\Phi} = -\frac{\Phi_1'}{n_\Phi} (R_G \mp \Phi_2), \\ F_n &= 0, \quad M_n = 0, \quad L_n = 0. \end{aligned}$$

Верхній знак відповідає опуклій стороні зуба, нижній знак – увігнутий сторони. При виведенні цих формул враховувалося, що

$$|\vec{r}_0| = R_G, \quad K = \frac{1}{R_G}, \quad K_{nf} = \frac{1}{R_G + f_2}, \quad K_{n\Phi} = \frac{1}{R_G + \Phi_2}.$$

Розглядаючи зачеплення інструментальної рейки з зубчастими колесами, отримаємо рівняння зубців рейки в нерухомій системі координат XYZ ($m = 1\text{мм}$) для опуклої сторони зубців рейки (голівка та ніжка відповідно)

$$\begin{cases} x = f_1, \\ y = R_G (1 - \cos \mu) + f_2 \cos \mu - R_i \varphi_i, \\ z = (R_G - f_2) \sin \mu; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \Phi_1, \\ y = R_G (1 - \cos \mu) + \Phi_2 \cos \mu - R_i \varphi_i, \\ z = (R_G - \Phi_2) \sin \mu. \end{cases} \quad (5)$$

Аналогічні рівняння легко отримати для увігнутої сторони зубців рейки, додаючи $\pi/2$ до y_n . В рівняннях (5) R_i – радіус початкового кола, φ_i – кут повороту навколо своєї осі шестерні (при $i = 1$) і колеса (при $i = 2$). Вектори відносних швидкостей у верстатному зачепленні опуклої сторони зубців рейки з шестірнею (на голівці і ніжці відповідно) при колових швидкостях $\omega_1 = \omega_2 = 1\text{с}^{-1}$

$$\begin{aligned} \vec{V}_f^{p1} &= -[R_G (1 - \cos \mu) + f_2 \cos \mu - R_1 \varphi_1] \vec{i} + f_1 \vec{j} - 0 \cdot \vec{k}, \\ \vec{V}_\Phi^{p1} &= -[R_G (1 - \cos \mu) + \Phi_2 \cos \mu - R_1 \varphi_1] \vec{i} + \Phi_1 \vec{j} - 0 \cdot \vec{k}. \end{aligned} \quad (6)$$

Вектори відносних швидкостей при зачепленні опуклої сторони зубців рейки з колесом (на голівці і ніжці відповідно)

$$\begin{aligned} \vec{V}_f^{p2} &= [R_G (1 - \cos \mu) + f_2 \cos \mu - R_2 \varphi_2] \vec{i} - f_1 \vec{j} - 0 \cdot \vec{k}, \\ \vec{V}_\Phi^{p2} &= [R_G (1 - \cos \mu) + \Phi_2 \cos \mu - R_2 \varphi_2] \vec{i} - \Phi_1 \vec{j} - 0 \cdot \vec{k}. \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогічні рівняння виходять для увігнутої сторони зубців рейки, якщо додати $\pi/2$ до y_n .

Рівняння зачеплення з урахуванням(5)-(7), мають вигляд:

1. Для колеса (для голівки та ніжки відповідно) –

$$F_{if} = \frac{f_2'}{n_f} [\pm \Omega_{2f} \cos \mu \pm R_f (1 - \cos \mu) \mp R_i \varphi_i] = 0, \quad (8)$$

$$F_{i\phi} = \frac{\Phi_2'}{n_\phi} [\pm \Omega_{2\phi} \cos \mu \pm R_f (1 - \cos \mu) \mp R_i \varphi_i] = 0.$$

2. Для шестірні (для головки та ніжки відповідно)

$$F_{if} = \frac{f_2'}{n_f} [\mp \Omega_{2f} \cos \mu \pm R_f (1 - \cos \mu) \pm \pi/2 \mp R_i \varphi_i] = 0, \quad (9)$$

$$F_{i\phi} = \frac{\Phi_2'}{n_\phi} [\mp \Omega_{2\phi} \cos \mu \pm R_f (1 - \cos \mu) \pm \pi/2 \mp R_i \varphi_i] = 0.$$

У наведених співвідношеннях верхній знак відповідає опуклій стороні зуба, нижній знак – увігнутий стороні. Крім того, прийняті наступні позначення

$$\Omega_{1f} = \frac{f_1 f_1'}{f_2'}, \quad \Omega_{1\phi} = \frac{\Phi_1 \Phi_1'}{\Phi_2'}, \quad \Omega_{2f} = \Omega_{1f} + f_2, \quad \Omega_{2\phi} = \Omega_{1\phi} + \Phi_2.$$

Вектори відносних швидкостей представимо у вигляді (для точок на голівці і ніжці відповідно) [8]

$$\vec{V}_f^{p1} = (\Omega_{1f} \cos \mu) \vec{i} + f_1 \vec{j} + 0 \vec{k}, \quad \vec{V}_\phi^{p1} = (\Omega_{1\phi} \cos \mu) \vec{i} + \Phi_1 \vec{j} + 0 \vec{k},$$

$$\vec{V}_f^{p2} = (-\Omega_{1f} \cos \mu) \vec{i} - f_1 \vec{j} + 0 \vec{k}; \quad \vec{V}_\phi^{p2} = (-\Omega_{1\phi} \cos \mu) \vec{i} - \Phi_1 \vec{j} + 0 \vec{k}.$$

Рівняння поверхонь зачеплення інструментальної рейки і нарізованих коліс в нерухомій системі XYZ, використовуючи співвідношення (5), (8), (9), мають вигляд (на голівці і ніжці відповідно)

$$\begin{cases} x = f_1, \\ y = \mp \Omega_{1f} \cos \mu, \\ z = (R_f \mp f_2) \sin \mu; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \Phi_1, \\ y = \mp \Omega_{1\phi} \cos \mu, \\ z = (R_f \mp \Phi_2) \sin \mu. \end{cases} \quad (10)$$

У співвідношеннях (10) верхній знак відповідає зачепленню опуклої сторони зубців шестерні і увігнутої сторони зубців колеса, нижній – зачепленню увігнутої сторони зубців шестірні і опуклої сторони зубців колеса. Виключивши параметр μ із двох останніх рівнянь, отримуємо (відповідно для головки та ніжки)

$$y = \mp \Omega_{1f} \sqrt{1 - \frac{z^2}{(R_f \mp f_2)^2}}, \quad y = \mp \Omega_{1\phi} \sqrt{1 - \frac{z^2}{(R_f \mp \Phi_2)^2}}. \quad (11)$$

Звідси можна одержати умови, що обмежують значення z : $z \leq R_f \mp f_2$, $z \leq R_f \mp \Phi_2$.

Із аналізу рівнянь (11) випливає, що при $z = 0$ лінія зачеплення є пряма, при $z \neq 0$ лінії зачеплення представляють собою криві другого порядку. Тоді маємо для головки і ніжки

$$\frac{y^2}{(\Omega_{1f})^2} + \frac{z^2}{(R_f \mp f_2)^2} = 1, \quad \frac{y^2}{(\Omega_{1\phi})^2} + \frac{z^2}{(R_f \mp \Phi_2)^2} = 1. \quad (12)$$

При фіксованому значенні f_1 крива (12) є еліпсом з піввіссями Ω_{1f} та $R_f \mp f_2$ для головки, а також $\Omega_{1\phi}$ та $R_f \mp \Phi_2$ для ніжки. Другу умову для визначення R_f отримаємо, прийнявши $z = 0,5B$, де B – ширина зубців зубчастого колеса. Використовуючи (10), маємо

$$R_f = \frac{0,5B}{\sin \mu_f} \pm f_2, \quad R_f = \frac{0,5B}{\sin \mu_\phi} \pm \Phi_2, \quad (13)$$

де μ_f – кут нахилу зубців рейки на торці зуба (береться верхній знак для опуклої сторони, нижній – для увігнутої сторони зубців рейки).

Фіксуємо φ_i , λ , μ , z в рівняннях зачеплення (8)-(10), будемо мати рівняння ліній зачеплення в різних перетинах поверхні зачеплення.

Рівняння поверхонь кругових аркових зубців шестірні і колеса одержимо, записуючи координати поверхонь зачеплення (11), (12) в системах $X_1 Y_1 Z_1$ і $X_2 Y_2 Z_2$, пов'язаних з шестірною і колесом:

а) рівняння поверхонь опуклої сторони зубів шестірні ($i = 1$ і верхній знак) та увігнутої – колеса ($i = 2$ і нижній знак) (для головки та ніжки відповідно)

$$\vec{r}_{if} = \begin{cases} x_i = (f_1 \pm R_i) \cos \varphi_i \pm \Omega_{1f} \cos \mu \sin \varphi_i, \\ y_i = \pm (f_1 \pm R_i) \sin \varphi_i - \Omega_{1f} \cos \mu \cos \varphi_i, \\ z_i = (R_f - f_2) \sin \mu; \end{cases}$$

$$\vec{r}_{i\phi} = \begin{cases} x_i = (\Phi_1 \pm R_i) \cos \varphi_i \pm \Omega_{1\phi} \cos \mu \sin \varphi_i, \\ y_i = \pm (\Phi_1 \pm R_i) \sin \varphi_i - \Omega_{1\phi} \cos \mu \cos \varphi_i, \\ z_i = (R_f - \Phi_2) \sin \mu; \end{cases}$$

б) рівняння поверхонь увігнутої сторони зубів шестерні і опуклою – колеса (для головки і ніжки відповідно)

$$\vec{r}_{if} = \begin{cases} x_i = (f_1 \pm R_i) \cos \varphi_i \mp \Omega_{1f} \cos \mu \sin \varphi_i, \\ y_i = \pm (f_1 \pm R_i) \sin \varphi_i + \Omega_{1f} \cos \mu \cos \varphi_i, \\ z_i = (R_f + f_2) \sin \mu. \end{cases}$$

$$\vec{r}_{i\phi} = \begin{cases} x_i = (\Phi_1 \pm R_i) \cos \varphi_i \mp \Omega_{1\phi} \cos \mu \sin \varphi_i, \\ y_i = \pm (\Phi_1 \pm R_i) \sin \varphi_i + \Omega_{1\phi} \cos \mu \cos \varphi_i, \\ z_i = (R_i + \Phi_2) \sin \mu. \end{cases}$$

Якщо прийняти $z_i = const$, $\mu = const$, $\varphi_i = const$, то, використовуючи рівняння зачеплення (8), (9), можна отримати рівняння торцевого і нормального перерізу зубців і рівняння миттєвих контактних ліній на поверхні зубців зубчастого колеса.

Координати одиничних векторів нормалі до поверхонь зубців в системах координат $X_1Y_1Z_1$ та $X_2Y_2Z_2$ мають вигляд (для головки і ніжки відповідно)

$$\vec{e}_{f1} = \begin{cases} e_{x1} = (\pm f_2' \cos \varphi_1 + f_1' \cos \mu \sin \varphi_1) / n_f, \\ e_{y1} = (\pm f_2' \sin \varphi_1 - f_1' \cos \mu \cos \varphi_1) / n_f, \\ e_{z1} = (f_1' \sin \mu) / n_f; \end{cases}$$

$$\vec{e}_{\Phi 1} = \begin{cases} e_{x1} = (\pm \Phi_2' \cos \varphi_1 + \Phi_1' \cos \mu \sin \varphi_1) / n_\Phi, \\ e_{y1} = (\pm \Phi_2' \sin \varphi_1 - \Phi_1' \cos \mu \cos \varphi_1) / n_\Phi, \\ e_{z1} = (\Phi_1' \sin \mu) / n_\Phi; \end{cases}$$

$$\vec{e}_{f2} = \begin{cases} e_{x2} = (\pm f_2' \cos \varphi_2 - f_1' \cos \mu \sin \varphi_2) / n_f, \\ e_{y2} = (\mp f_2' \sin \varphi_2 - f_1' \cos \mu \cos \varphi_2) / n_f, \\ e_{z2} = (f_1' \sin \mu) / n_f; \end{cases}$$

$$\vec{e}_{\Phi 2} = \begin{cases} e_{x2} = (\pm \Phi_2' \cos \varphi_2 - \Phi_1' \cos \mu \sin \varphi_2) / n_\Phi, \\ e_{y2} = (\mp \Phi_2' \sin \varphi_2 - \Phi_1' \cos \mu \cos \varphi_2) / n_\Phi, \\ e_{z2} = (\Phi_1' \sin \mu) / n_\Phi. \end{cases}$$

За відповідними формулами [9], враховуючи (2), а також умову $\beta = \mu$, можна визначити коефіцієнти квадратичних форм поверхонь кругових аркових зубців, а також кривизну поверхонь зубців в заданих напрямках.

Для визначення меж поля зачеплення можна використовувати формули, за якими визначаються радіуси циліндрів [4], прийнявши $R_{1b} = R_{a1}$ і $R_{2b} = R_{a2}$,

$$R_{a1}^2 = (f_{11} + R_1)^2 + (f_{11}\Omega_{1f}' \cos \mu)^2; R_{a2}^2 = (\Phi_{12} + R_2)^2 + (\Phi_{12}\Omega_{1\phi}' \cos \mu)^2, \quad (14)$$

де f_{11} , Φ_{12} – значення f_1 , Φ_1 для вершин зубців шестірні та колеса. Розв'язуючи рівняння (14), отримуємо такі залежності:

$$f_{11} = \frac{\sqrt{R_1^2 - (1 + (\Omega_{1f}')^2 \cos^2 \mu)(R_1^2 - R_{a1}^2)} - R_1}{1 + (\Omega_{1f}')^2 \cos^2 \mu}, \quad (15)$$

$$\Phi_{12} = \frac{R_2 - \sqrt{R_2^2 - (1 + (\Omega_{1\phi}')^2 \cos^2 \mu)(R_2^2 - R_{a2}^2)}}{1 + (\Omega_{1\phi}')^2 \cos^2 \mu}.$$

Значення (15) можна визначити, задаючи $0 \leq \mu \leq \mu_T$, де μ_T наближено визначається з (14) при $f_1 = 0$ і $\Phi_1 = 0$.

Висновки. 1. Побудовано математичну модель верстатного зачеплення і досліджено внутрішню геометрію твірної поверхні аркових циліндричних передач змішаного зачеплення з круговим зубом; отримано рівняння активних поверхонь кругових аркових зубців змішаного зачеплення для головки і ніжки шестірні і колеса відповідно.

2. Отримані формули можуть бути використані при аналізі показників працездатності аркових передач змішаного зачеплення з зубцями, нарізаними круговими різцевими головками, а також для синтезу геометрії вихідного контуру за значенням якісних показників працездатності.

Список літератури: 1. Сидоренко А.К. Новые виды зубчатых передач. – М.: Машиностроение, 1990. – 128с. 2. Склярков А.Е. Исследование цилиндрических передач с круговыми зубьями: Дис... канд. техн. наук: 05.02.02. – Ворошиловград, 1973. – 167 с. 3. Грибанов В.М. и др. Сравнительный анализ зубчатых цилиндрических передач Новикова с арочным зубом // Вестник Национального технического университета «ХПИ». – 2001. – Вып. 13. – С. 43-51. 4. Шишов В.П., Носко П.Л., Ревакина О.А. Цилиндрические передачи с арочными зубьями (теория, анализ, синтез): Монография. – Луганск: Изд-во ВНУ им. В.Даля, 2004. – 336с. 5. Шишов В.П., Носко П.Л., Ткач П.М., Филь П.В. Високонавантажені циліндричні передачі з двоопукло-ввігнутими зубцями. СНУ ім. В.Даля, Луганськ, 2005. 6. Шишов В.П., Филь П.В., Ревакина О.А., Мухоматов А.А. Геометро-кинематические показатели цилиндрических зубчатых передач с арочными зубьями // Ресурсосберегающие технологии производства и обработки давлением материалов в машиностроении. Сб. науч. работ. – Луганск, Изд. ВНУ, 2001. – С. 193-200. 7. Журавлев Г.А. Зубчатая передача точечного или смешанного зацепления // Патент РФ № 1075041, 5F 16H 55/08, 26.12.1980, Б.И. №7, 1984. 8. Shishov V., Tkach P., Chalaya E., Juravlyova T. Internal geometry of active surfaces of teeth of cylindrical gear arch mixed gearing. TEKA Commission of Motorization and Power Industry in Agriculture, Vol.13, №3, 2013, p.203-208. 9. Раивеский П.К. Курс дифференциальной геометрии. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 420 с.

Надійшла до редколегії 15.03.2014

УДК 621.833

Геометрія циліндричних передач змішаного зачеплення з круговими арковими зубцями / П.М. Ткач, О.Ю. Чала // Вісник НТУ «ХПИ». Серія: Проблеми механічного приводу. – Х.: НТУ «ХПИ», 2014. – № 29 (1072). – С. 150-158. – Бібліогр.: 9 назв. ISSN 2079-0075.

В статье рассматриваются вопросы, необходимые для решения основных задач синтеза и анализа передач смешанного зацепления с арочными зубьями, нарезанными круговыми резцовыми головками, по значениям критериев работоспособности. Построена математическая модель станочного зацепления и исследована внутренняя геометрия образующей поверхности цилиндрических передач смешанного зацепления с круговым зубом. Получены уравнения активных поверхностей круговых арочных зубьев смешанного зацепления для головки и ножки шестерни и колеса соответственно.

Ключевые слова: арочные передачи смешанного зацепления, геометрия круговых арочных зубьев

The article discusses the issues necessary to resolve the fundamental problems of synthesis and analysis of mixed gearing with arched teeth, cut by circular cutting heads, by the values of criteria of efficiency. Mathematical model of tool gearing and investigated the internal geometry, forming the surface of cylindrical mixed gearing with

circular tooth. The equations of active surfaces of circular arch teeth of mixed gearing for the addendum and dedendum of gear's teeth respectively.

Keywords: arched mixed gearing, geometry of circular arch teeth