

УДК 539.3: 004.94

**И.В. АРТЕМОВ, Е.Н. БАРЧАН, Я.Н. ЛИСОВОЛ, А.В. ГРАБОВСКИЙ, Ю.В. КОСТЕНКО,  
В.И. СЕРИКОВ, А.В. БОНДАРЕНКО, Р.В. КРАСИКОВ, М.С. РЕВУНОВ, Е.А. ЛУНЕВ**

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ВИБРОУДАРНЫХ МАШИНАХ И ОБОСНОВАНИЕ ИХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

В работе исследовано явление ударного резонанса в виброударных системах. Исследованы окolorезонансные режимы при различных значениях коэффициента вязкого трения. Исследован спектр собственных частот колебания корпуса виброударной машины. Проведен анализ динамических напряжений в металлоконструкции виброударной машины с учетом необходимости совместной отстройки от опасных режимов и обеспечения прочности и надёжности виброударной машины.

**Ключевые слова:** виброударная машина, резонанс, собственные частоты, напряженно-деформированное состояние, отстройка, метод конечных элементов, вязкое трение

This paper is devoted to research of impact resonance effect in vibroimpact systems. To simplify the description of the vibroimpact system was used different models. The difference contained in number of bodies – from 1 to 3. The equations of motion were formulated on the base of Newton laws. The impact interaction force is significantly nonlinear and can't be linearized that's why it's presented as series of harmonics. Analytical and numerical methods were used to solve the equations of motion. Different program products like Maple, Cosmos Motion to obtain the numerical solution were used. The close to resonant modes and their particular qualities caused by variation of resilient friction are researched in paper. The eigenvalue frequencies spectrum of vibroimpact machine body was researched. The analysis of dynamical stress in vibroimpact machine body was done. This analysis was done with considering of mutual tuning out from dangerous modes and conditions of strength and reliability of vibroimpact machine. The additional criteria that have to tuning out the spectrum of eigenvalues from dangerous modes were proposed. The process of tuning out is connected with the area of variable parameters. That give possibility to determine influence from single and from group of parameters. Was detected that resonant modes are possible on the frequencies that are multiple to the frequency of external perturbation.

**Keywords:** vibroimpact machine, resonant, eigenvalues, stress-strain state, tuning out, finite element method, resilient friction

В роботі досліджено явище ударного резонансу в віброударних системах. Використовуються одно-, дво- та трьох- масові моделі, рівняння руху записані на основі закону Ньютона. Досліджені близькорезонансні режими та їх особливості при варіюванні значення коефіцієнту в'язкого тертя. Проведене дослідження спектру власних частот коливаний корпусу віброударної машини, а також аналіз динамічних напружень в металоконструкції віброударної машини з урахуванням необхідності сумісного відлаштування від небезпечних режимів та забезпечення міцності й надійності віброударної машини.

**Ключові слова:** віброударна машина, резонанс, власні частоти, напружено-деформований стан, відлаштування, метод скінчених елементів, в'язке тертя

### Введение

Дальнейший прогресс в области машиностроения обуславливается уровнем расчетных методик синтеза элементов проектируемых машин, механизмов, приводов. В первую очередь это относится к наиболее нагруженным тяжелым машинам, например, виброударным. Крупнотоннажные виброударные машины (ВМ) нашли свое широкое применение как технологические машины в литейном производстве (например, машины для выбивки литья), как горношахтное оборудование (например, дробилки), в строительстве (например, устройства для уплотнения смесей), а также в других отраслях народного хозяйства (сельскохозяйственные, дорожные машины, оборудование пищевой промышленности и т. п.).

Несомненное преимущество таких машин (а именно простота конструкции и эффективность выполняемых операций) сопровождаются высоким уровнем действующих сил ударного взаимодействия технологического груза с машиной. При этом, поскольку данные силы напрямую влияют на качество выполняемой технологической операции, то и их частота, и амплитуда предписываются назначением той или иной машины. С другой стороны, параметры элементов проектируемых виброударных машин должны находиться в определенных соотношениях с эксплуатационными режимами. Так, для выбивных зарезонансных машин частоты возбуждения должны превышать собственные частоты колебаний корпуса машины, установленного на опорных пружинах, в 3-4 раза.

В то же время собственные частоты колебаний корпуса вибромашины как упруго деформируемой конструкции должны быть на 20-25% выше частоты возмущающего воздействия.

Таким образом, образуется достаточно жесткая система проектных ограничений. Однако, дополнительная, ранее не изученная проблема расчета этого класса машин состоит в том, что, кроме обычного резонанса на частоте возбуждения, задаваемой приводом, возможны также резонансы на частотах, кратных возмущающей. Это обусловлено свойствами усилий ударного взаимодействия, которые являются периодическими функциями, разложение которых в ряд Фурье содержит не только основную, но и высшие гармоники.

В связи с этим для обеспечения работоспособности на этапе обоснования параметров виброударных машин требуется совершенствование методов их расчета для отстройки от возможных резонансов при ударном нагружении на частотах, кратных основной частоте возбуждения (т.н. "ударный резонанс").

### Состояние вопроса

Расчет и обоснование рациональных параметров тяжело нагруженных виброударных машин с учетом перио-

© **Артемов И.В.**, Барчан Е.Н., Лисовол Я.Н., Грабовский А.В., Костенко Ю.В., Сериков В.И., Бондаренко А.В., Красииков Р.В., Ревунов М.С., Лунев Е.А., 2016

дического ударного воздействия сдерживается тем, что существующие методики не учитывают возможности возникновения в элементах машины резонансных режимов. В то же время такая опасность для современных крупногабаритных тяжело нагруженных машин возрастает, поскольку режимы их работы интенсифицируются, а диктуемые ограничения на качество выполнения технологических операций и стремление снизить массу этих машин приводит к тому, что спектр собственных частот колебаний (СЧК) корпусов за счет форм, вызванных упругим деформированием конструкции, распространяется вниз вплоть до рабочих частот ее возбуждения. При этом важно прогнозировать возможные эксплуатационные проблемы и предотвратить их уже на этапе проектирования. Однако ни средств расчетной идентификации режимов так называемых "ударных резонансов", ни методов расчета параметров машин, позволяющих произвести отстройку от резонансных режимов работы и тем самым обеспечить работоспособность проектируемых ВМ, в настоящее время в достаточной мере не разработано. При этом нужно заметить, что существующие методы анализа виброударных систем традиционно рассматривают в качестве объектов дискретные системы, тогда как элементы современных вновь создаваемых виброударных машин проявляют себя на низших формах колебаний как жесткие тела (т.е. дискретные системы), а на высших – как упруго-деформируемые континуальные системы. В этой связи их можно условно назвать дискретно-континуальными системами. В то же время потребность промышленности в таких методах расчета существует и возрастает. Таким образом, сложилось противоречие между возможностями существующих методик расчета ВМ и требованиями машиностроения. Следовательно, разрешение этого противоречия, а именно, совершенствование методов расчета виброударных машин в части анализа динамических процессов в них и обоснования рациональных параметров с учетом предотвращения возможности возникновения резонанса при периодическом ударном воздействии на частотах, кратных возбуждающей, является актуальной задачей.

#### Постановка задач исследования

Целью работы является совершенствование методов расчета виброударных машин как динамических упруго-деформируемых систем путем анализа виброударных процессов и обоснования параметров проектируемых машин по критерию отстройки от ударных резонансных режимов, а также создание на этой основе работоспособных конструкций ВМ с высокими техническими характеристиками для работы в составе комплекса высокопроизводительного оборудования.

Проблема совершенствования методов расчета тяжело нагруженных крупногабаритных машин с учетом возможности ударного резонанса на высоких деформационных частотах требует решения нескольких задач. Во-первых, это изучение характера движения вибромашины как динамической системы при действии периодических ударно-импульсных нагрузок. Во-вторых, это распространение и адаптация математических моделей для исследования возможности ударного резонанса с систем с конечным числом степеней свободы на случай дискретно-континуальных систем, которыми, по сути, являются корпуса ВМ на упругих опорах. В-третьих, это расширение

возможностей анализа на этапе оценки прочности путем расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) корпусов при действии динамических нагрузок. В-четвертых, это совершенствование методов обоснования параметров корпусов вибромашины по критерию отстройки от ударного резонанса.

Таким образом, сформулированная в работе задача напрямую трансформируется на ряд подзадач, которые требуют развития и адаптации традиционных подходов и математических моделей. Далее описаны эти новые подходы и усовершенствованные модели, которые в дальнейшем могут служить в качестве методологической основы для проведения комплекса численных исследований и разработки проектных рекомендаций.

#### Анализ динамических процессов в виброударных машинах с учетом периодического действия импульсных нагрузок

Виброударные крупногабаритные тяжело нагруженные машины с дебалансным возбуждением испытывают воздействие, имеющие сложный спектральный состав нагрузок [1-9]. В некоторых случаях при определенных сочетаниях характеристик возбуждения и спектральных характеристик корпусов этих вибромашины в них возможна реализация ударного резонанса. Рассмотрим, в частности, достаточно типичный пример – выбивную машину для очистки тяжелых отливок, которой оснащена автоматизированная линия "KW" в ЧАО "Азовэлектросталь" [www.azovmash.com.ua]. В работе [4] определены усилия  $F_{\text{имп}}$ , действующие в процессе ударного взаимодействия металлоконструкции машины с земляным комом. На рис. 1 представлено временное распределение  $F_{\text{имп}}(t)$  (с максимумом около 1МН) для одного из вариантов машины. Период действующего усилия  $T^*$  – около 60 мс. При этом ненулевое значение данная сила имеет только на  $1/4$  части периода ( $\sim 15$  мс). Она представима в виде следующего ряда по гармоникам с коэффициентами  $F$ :

$$F_{\text{имп}}(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_i^1 \cos(n\omega^* t) + \sum_{n=1}^{\infty} F_i^2 \sin(n\omega^* t), \quad n = 1, 2, \dots, \infty, \quad (1)$$

где  $\omega^* = 2\pi\nu^* = 2\pi/T^*$  ( $\omega^*$ ,  $\nu^*$ ,  $T^*$  – круговая частота возбуждения ( $\text{с}^{-1}$ ), частота (Гц) и период колебаний ( $\text{с}$ ) соответственно).

В соответствии с принципом суперпозиции реакция динамической системы на действие силы с компонентами в виде различных гармоник (1) представляет собой сумму реакций на каждое воздействие. При этом в исследуемой системе возможны резонансы при совпадении собственных частот системы с частотами соответствующих гармоник (1). Таким образом, необходимо определить потенциальную возможность реализации резонансных режимов для конкретного типа ВМ.

В частности, на рис. 2 представлена зависимость напряжений  $\sigma_x(t)$  (МПа) в районе опоры дебалансных валов от частоты действующего на колосниковые пластины усилия частотами  $\nu_i = i\nu^*$  (Гц). Видно, что в области до 100 Гц могут реализовываться несколько резонансных

режимов, в частности, при частоте возбуждения 96 Гц. Эта частота соответствует резонансу кратности 6 относительно рабочей частоты машины  $\nu^* = 16$  Гц. Таким образом, подтверждается потенциальная возможность реализации резонансов для данного типа машин на частотах, кратных возмущающей.

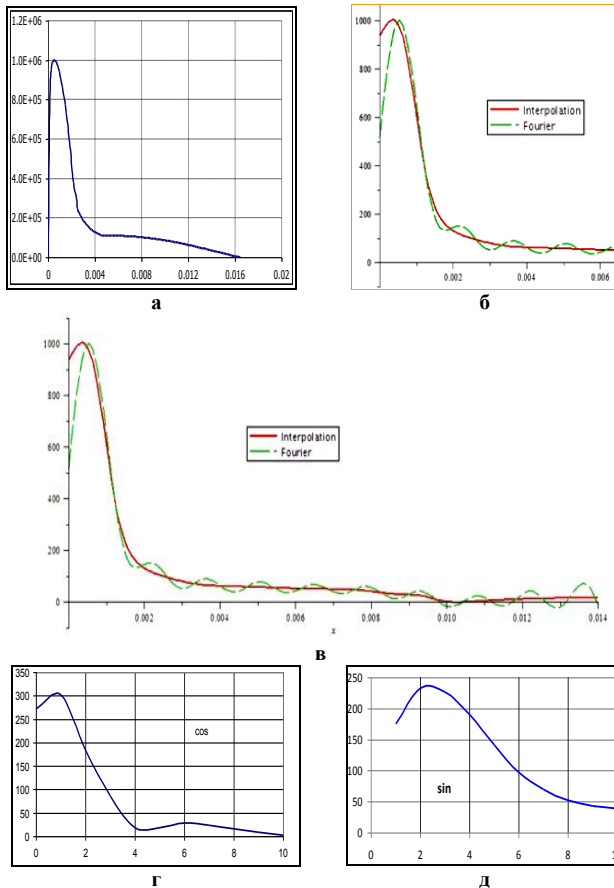


Рис. 1 – Распределение силы ударно-импульсного взаимодействия  $F_{\text{вм}}(t)$  между выбивной машиной и технологическим грузом [4] на интервале ненулевого значения (15 мс) и ее представление в виде частичной суммы ряда Фурье (см. формулу (1)):

а – исходное временное распределение силы ударно-импульсного взаимодействия; б – приближение в виде частичной суммы ряда Фурье на интервале 6 мс; в – приближение в виде частичной суммы ряда Фурье на интервале 15 мс;

г – распределение коэффициентов  $F_i^1$ , кН, (при косинусах) по номерам гармоник  $i$ ; д – распределение коэффициентов  $F_i^2$ , кН, (при синусах) по номерам гармоник  $i$

Естественно, что при этом нужно учитывать амплитудные значения компонент  $F_i^1$ ,  $F_i^2$ . На рис. 2., г, д представлены зависимости  $F_i^1$ ,  $F_i^2$  от номера гармоники  $i$ . Видно, что в целом для этих величин характерно уменьшение с ростом номера гармоники. В то же время, в интервале до 5÷6-й гармоник амплитуды  $F_i^1$ ,  $F_i^2$  находятся на уровне 5÷10% от амплитудного значения  $F_{\text{вмп}}$ . Таким образом, и с точки зрения удельного вклада резонансные режимы для исследованного типа машин вполне ожидаемо могут реализовываться на частотах до 100 Гц.

Общим выводом по проведенному экспресс-анализу является подтверждение потенциальной опасности для

обеспечения работоспособности тяжелых ВМ резонансов на частотах, кратных частоте возмущающей силы. Учитывая, что многие из этих машин работают на зарезонансных режимах по "трансляционным" частотам (то есть по частотам, соответствующим собственным формам в виде движения машины как твердого тела на упругих опорах), то, соответственно, реально опасными становятся собственные частоты, соответствующие собственным формам колебаний (СФК) металлоконструкции машины как упруго-деформируемого тела. В то же время данный критерий ранее для подобных машин не учитывался при обосновании их рациональных параметров.

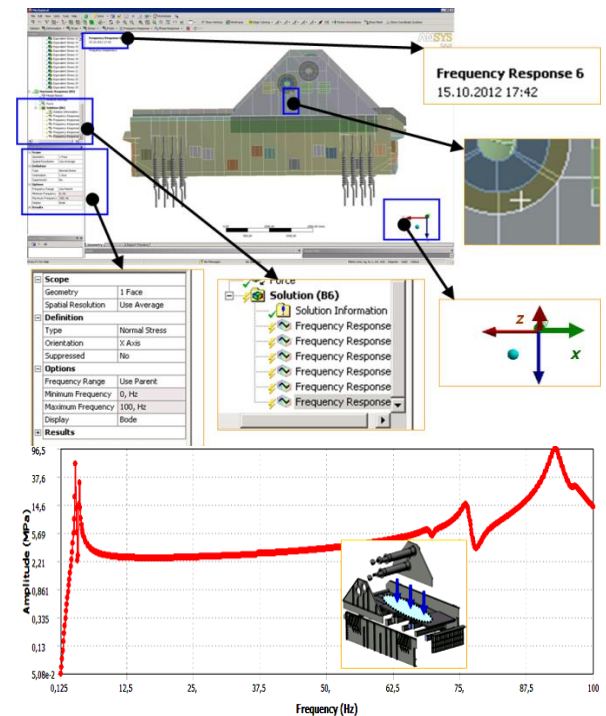


Рис. 2 – Распределение силы ударно-импульсного взаимодействия  $F_{\text{вм}}(t)$  между выбивной машиной и технологическим грузом [4] на интервале ненулевого значения (15 мс) и ее представление в виде частичной суммы ряда Фурье (см. формулу (1))

В связи с этим возникает актуальная задача исследования динамических процессов в тяжелых ВМ с целью определения опасных режимов эксплуатации, и, соответственно, разработки рекомендаций по выбору конструктивных параметров проектируемых машин с отстройкой от этих режимов. На первом этапе эта задача рассматривается на примере простейших динамических систем с конечным числом степеней свободы.

Рассмотрим несколько вариантов динамической системы, подверженной действию периодических импульсов. Данные системы образуются из простейшей одномассовой путем добавления новых звеньев (рис. 3).

При этом на первое тело  $m_1$  действует периодическая импульсная сила (рис. 4) с частотой  $\omega^* = 2\pi\nu^* = 2\pi/T^*$ . Длительность импульса  $\delta^*$  намного меньше периода  $T^*$ :

$$\delta^* \ll T^*, \quad (2)$$

что обеспечивает условие короткого удара, если только

$$\delta^* \ll T_{1,2,3}, \tag{3}$$

где  $T_1, T_2, T_3$  – периоды собственных колебаний исследуемой системы.

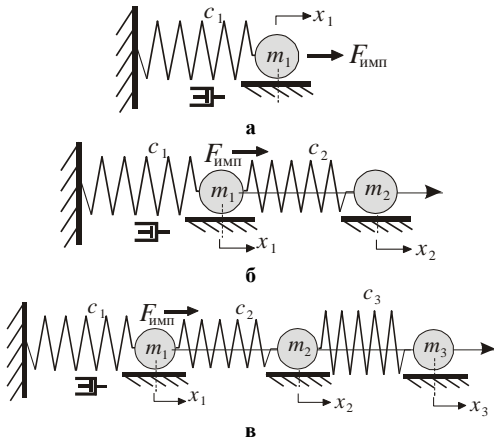


Рис. 3 – Динамические системы:  
а – одномассовая, б – двухмассовая, в – трехмассовая

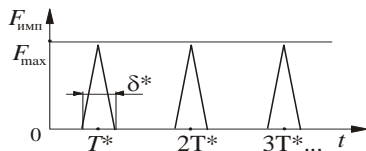


Рис. 4 – Распределение периодической импульсной силы во времени

**I. Одномассовая система.** В этом случае вид распределения  $F_{имп}$  на интервале, где сила – ненулевая, слабо влияет на характер движения системы в целом, если только импульс единичного всплеска силы

$$S = \int_{T^*} F_{имп} dt = const. \tag{4}$$

Тогда, обозначая

$$F_{имп}(t) = F_{max} \cdot \varphi(t), \tag{5}$$

из (4) имеем при кусочно-линейном виде  $\varphi(t)$

$$S = F_{max} \int_{(T^*)} \varphi(t) dt = 1/2 F_{max} \cdot \delta^*. \tag{6}$$

Уравнения движения системы имеют вид  $m_1 \ddot{x} + k_1 \dot{x} + c_1 x = F_{имп}(t)$ , или  $\ddot{x} + 2\eta \dot{x} + \omega^2 x = A\varphi(t)$ , где  $A = F_{max}(t) / m_1$ . Данная система имеет при малом трении одну собственную частоту

$$\omega_{11}^2 \approx \omega^2 = c_1 / m_1. \tag{7}$$

Для анализа ударного резонанса в данной системе можно использовать несколько способов. Рассмотрим два из них – аналитический и численный.

**Аналитический метод.** Следуя работе, можно применить аналитический способ исследования режимов движения данной системы. Устремляя длительность действия силы  $\delta^*$  к нулю, но сохраняя ее импульс, для опре-

деления установившегося движения используются условия "сшивания" периодических решений

$$\begin{aligned} x_1(\theta+0)^* &= x_1(\theta+T^*-0); \dot{x}_1(\theta+0)^* = \\ &= \dot{x}_1(\theta+T^*-0) + S/m, \end{aligned} \tag{8}$$

где  $\theta$  – некоторый момент начала очередного периода движения ( $\theta = T^* \cdot n, n = 0, 1, 2, \dots$ ) (в соотношениях (8) левые части соотношений определяются в начале периода (то есть в момент  $\theta+0$ ), а в правой части – в конце (в момент  $\theta+T^*-0$ )). Далее полагается  $\theta = 0$ .

При этом исследуется система без трения  $\ddot{x} + \omega^2 x = A\varphi(x)$ , периодическое решение которой

$$x = \alpha_1 \sin \omega t + \alpha_2 \cos \omega t. \tag{9}$$

Устремляя длительность импульсного ударного воздействия к нулю (т.е.  $\delta^* \rightarrow 0$ ), перепишем условия (8) в виде:

$$\begin{cases} x(\delta^*) = x(T^* - \delta^*); \\ \dot{x}(\delta^*) = \dot{x}(T^* - \delta^*) + S/m. \end{cases} \tag{10}$$

Подставляя (9) в условия (10), получаем

$$\begin{cases} \alpha_2 = \alpha_1 \sin \omega T^* + \alpha_2 \cos \omega T^*; \\ \alpha_1 = \alpha_1 \cos \omega T^* - \alpha_2 \sin \omega T^* + S/(m \cdot \omega); \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \frac{S}{2m\omega} \operatorname{ctg} \frac{\omega T^*}{2}; \alpha_1 = \frac{S}{2m\omega} \dots$$

Отсюда условие резонанса

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \frac{\omega T^*}{2} \rightarrow \infty &\Rightarrow \frac{\omega T^*}{2} = n\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\omega^*} \cdot \frac{\omega}{2\pi} = n \Rightarrow \tag{11} \\ &\Rightarrow \omega = n\omega^*; T^* = T \cdot n. \end{aligned}$$

Таким образом, в системе реализуется множество ударных резонансов, начиная с основного ( $\omega^* = \omega_{11}$ ) и затем – на режимах различной кратности  $n (n = 1, 2, 3, \dots)$  по собственным частотам  $\omega$  относительно возмущающей периодической силы  $\omega^*$  (или долиности по периодам соответственно).

**Численное решение.** Аналитическое решение сложно использовать при анализе движения многомассовых систем. В этом случае удобнее применить прямое численное интегрирование системы (6), наблюдая установившиеся режимы ее движения. В частности, может быть использована схема интегрирования Рунге-Кутты, реализованная в пакете Maple. Тогда при ненулевых  $\delta^*$  имеем непрерывную функцию  $F_{имп}(t)$  (см. рис. 4), и задавая шаг интегрирования  $\Delta \ll \delta^*$ , можно получать численные решения, с достаточной точностью отражающие поведение динамической системы. Для анализа решения удобно ввести безразмерные время  $\tau$  и координату  $y_1$ :

$$\tau = t/T^*; y_{11}(\tau) = x_1(t)/x_{1cr}, x_{1cr} = F_{max}/c_1. \tag{12}$$

Перебирая периодичность действия импульсов

$$T^* = \alpha_1 T_{11}, \tag{13}$$

где  $\alpha_1 = [\alpha_1^-, \alpha_1^+]$  – некоторый коэффициент из

задаваемого интервала изменения, можно получить искомый набор характеристик движения на дискретном множестве  $\alpha_1$ .

Эта информация служит в качестве базовой для анализа поведения системы, поскольку путем изменения  $\alpha$  можно изменять частоту действия импульсных внешних сил относительно собственной частоты исследуемой системы. Далее этот коэффициент  $\alpha$  можно назвать коэффициентом повторности импульсов.

**II. Двухмассовая система.** Уравнения движения системы (см. рис. 2):

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 \dot{x}_1 + c_1 x_1 + c_2 (x_1 - x_2) = F_{\text{имп}}(t); \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) = 0, \end{cases} \quad (14)$$

или

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\eta \dot{x}_1 + \bar{\omega}_1^2 x_1 + \bar{\omega}_{12}^2 (x_1 - x_2) = A\varphi(t); \\ \ddot{x}_2 + \bar{\omega}_2^2 (x_2 - x_1) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

**Аналитический способ решения.** В данном случае определим только собственные частоты системы (14), (15). При малом трении собственные частоты колебаний двухмассовой системы определяются из характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_2 - m_1 \omega^2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\omega^4 - \omega^2 \cdot \bar{\omega}_3^2 + \bar{\omega}_1^2 \bar{\omega}_2^2 = 0,$$

где  $\bar{\omega}_3^2 = \bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_2^2 + \bar{\omega}_{12}^2$  (см. (15)).

Тогда собственные частоты колебаний имеют вид:

$$\omega_{(1,2)}^2 = 0,5(\bar{\omega}_3^2 \mp \sqrt{\bar{\omega}_3^4 - 4\bar{\omega}_1^2 \cdot \bar{\omega}_2^2}). \quad (16)$$

Введя в рассмотрение безразмерные параметры  $\lambda = \omega^2 / \bar{\omega}_1^2$ ;  $\delta_2 = \bar{\omega}_2^2 / \bar{\omega}_1^2$ ;  $\delta_{12} = \bar{\omega}_{12}^2 / \bar{\omega}_1^2$ , из (16) можно определить поведение частот:

$$\lambda_{1,2} = 0,5 \left[ \delta_2 + 1 + \delta_{12} \mp \sqrt{(\delta_2 + 1 + \delta_{12})^2 - 4\delta_2^2} \right].$$

В итоге получаем зависимости относительных собственных частот (их квадратов) как функций относительных характеристик "присоединенной" к исходной одно-массовой дополнительной части системы. Учитывая, что при этом можно рассмотреть случаи  $m_2 \leq m_1$ ,  $c_2 \geq c_1$ , имеем  $\delta_2 \geq \delta_{12}$ ,  $\delta_2 \geq 1$ . С учетом этих ограничений и варьируя  $\delta_2$ ,  $\delta_{12}$ , можно проследить "миграцию" спектров, определяемую параметром  $\lambda$ . Таким образом можно определить потенциально опасные режимы с точки зрения возникновения ударного резонанса, а именно с периодами, кратными собственным частотам.

**Численный метод.** Применяется тот же подход, что и для одномассовой системы, однако в этом случае добавляется вторая контролируемая координата –  $x_2(t)$ , а в остальном процесс аналогичен описанному выше.

**Анализ процесса в среде Cosmos Motion.** В настоящее время для моделирования динамики сложных систем во

все большей мере используются САЕ-системы типа Cosmos Motion, MSC.Adams, UM. Их несомненным преимуществом является интуитивно понимаемый и удобный интерфейс пре- и постпроцессинга, возможности визуализации и обработки результатов. Более того, эти системы удобно использовать не только для систем материальных точек, но и для реальных тел с той или иной геометрической формы, размерами и свойствами материалов отдельных деталей. В данном случае удобно рассмотреть возможности исследуемой системы, имея в виду использование ее в ходе дальнейших исследований, с одной стороны, а с другой – соотнося полученные с ее помощью результаты с результатами аналитического и численного моделирования. Последнее дает некоторую оценку точности и достоверности для выбранной системой, например, Cosmos Motion, при удовлетворительных результатах, т.е. когда

$$\begin{cases} \left\{ \max |x_{CM} - x_M| / |x_A| \right\} \leq \varepsilon, \\ \left\{ \max |x_{CM} - x_A| / |x_A| \right\} \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (17)$$

Здесь  $x_{CM}, x_M, x_A$  – компоненты решения  $x_1, x_2$ , определяемые в среде Cosmos Motion, Maple и при аналитических вычислениях соответственно, а  $\varepsilon$  – допустимая погрешность, в дальнейшем можно использовать именно систему Cosmos Motion для моделирования динамики исследуемых систем.

**III. Трехмассовая система.** Для этой системы (см. рис. 2.3) уравнения движения

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 \dot{x}_1 + c_1 x_1 + c_2 (x_1 - x_2) = F_{\text{имп}}(t); \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) + c_3 (x_2 - x_3) = 0; \\ m_3 \ddot{x}_3 + c_3 (x_3 - x_2) = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Для исследования этой системы применяется численное интегрирование в системах Maple и Cosmos Motion. Предварительная оценка собственных частот проводится по корням характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_2 - m_1 \omega^2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 - m_2 \omega^2 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 - m_3 \omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

В остальном расчеты – аналогично предыдущим вариантам системы.

### Результаты тестовых расчетов

**I. Одномассовая система.** На рис. 5 представлена амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) одномассовой системы. На рис. 6-10 показан характер динамических процессов в системе при  $\alpha_1 \in \{0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 5,0\}$ , полученных численно. Интегрирование ведется при нулевых начальных условиях. Здесь и далее результаты приведены для системы с параметрами  $m_1 = 15960$  кг,  $c_1 = 5,28 \cdot 10^6$  Н/м, вязкость 12768 (Н·с)/м, амплитуда силы  $A = 2 \cdot 10^6$  Н, по оси ординат – перемещение  $x_1$  в м, по оси абсцисс – время в дискретах  $3,6 \cdot 10^{-4}$  с. На рис. 11 представлена зависимость амплитуды установившихся колебаний от коэффициентом повторности импульсов, отне-

сенных к амплитуде при  $\alpha = 1$ . На этой сводной диаграмме показаны также данные для  $\alpha = 2,5; 3,5; 4,5$ .

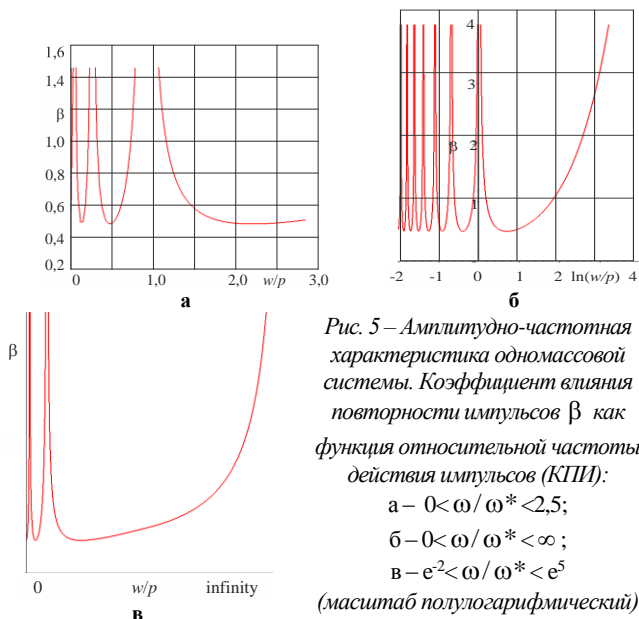


Рис. 5 – Амплитудно-частотная характеристика одномассовой системы. Коэффициент влияния повторности импульсов  $\beta$  как функция относительной частоты действия импульсов (КПИ):  
 а –  $0 < \omega / \omega^* < 2,5$ ;  
 б –  $0 < \omega / \omega^* < \infty$  ;  
 в –  $e^{-2} < \omega / \omega^* < e^5$   
 (масштаб полулогарифмический)

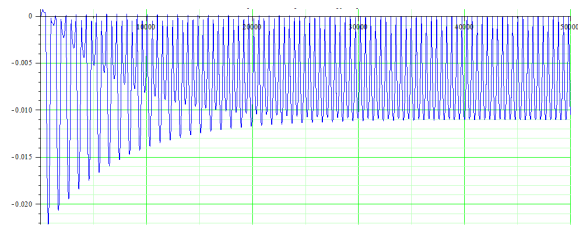


Рис. 6 – Динамический процесс в одномассовой системе при  $\alpha_1 = 0,5$

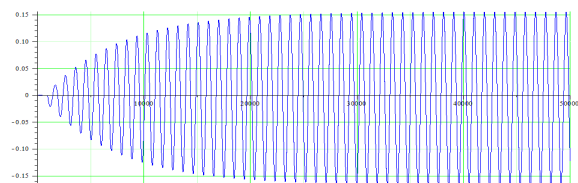


Рис. 7 – Динамический процесс в одномассовой системе при  $\alpha_1 = 1,0$

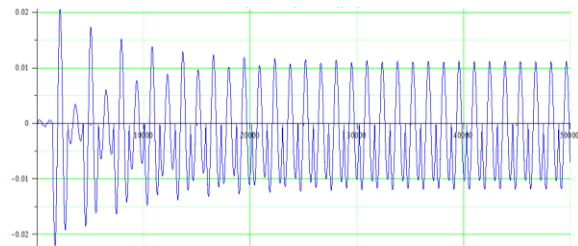


Рис. 8 – Динамический процесс в одномассовой системе при  $\alpha_1 = 1,5$

Полученные численные результаты корреспондируют с результатами аналитических исследований. Так, на частотах возмущения, дольных от собственной частоты, амплитуды колебаний резко превышают амплитуды, достигаемые при удалении частот возмущения от указанных. Наибольшие амплитуды достигаются на основной

частоте ( $\alpha_1 = 1,0$ ), далее с дискретным ростом  $\alpha_1$  они уменьшаются (при сохранении амплитуды и длительности единичного удара).

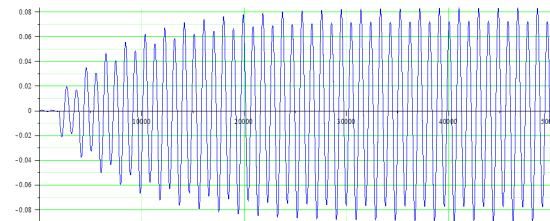


Рис. 9 – Динамический процесс в одномассовой системе при  $\alpha_1 = 2,0$

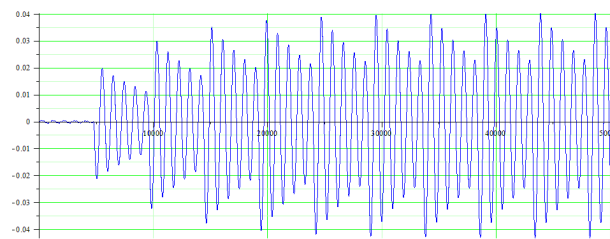


Рис. 10 – Динамический процесс в одномассовой системе при  $\alpha_1 = 5,0$

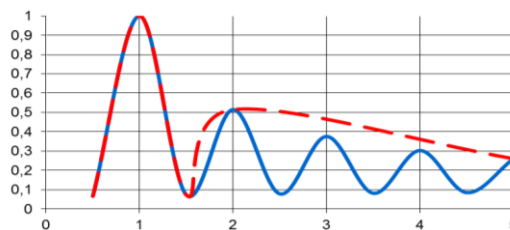


Рис. 11 – Зависимости амплитуды установившихся колебаний от коэффициента повторности импульсов, отнесенных к амплитуде при  $\alpha = 1$

Таким образом, с точки зрения интенсивности колебаний при изменении коэффициента повторности импульсов достаточно отслеживать собственные частоты с кратностью по сравнению с возмущающей частотой до  $\alpha = 3 \div 5$ .

Из представленных временных распределений и сводной диаграммы видно, что при  $\alpha_1 \in \{1,0; 2,0; 5,0\}$  (т.е. целом коэффициенте повторности импульсов) наблюдается резкое возрастание амплитуд колебаний в исследуемой системе, чего не наблюдается при  $\alpha_1 \in \{0,5; 1,5; 2,5; 3,5; 4,5\}$ .

**II. Двухмассовая система.** Для случая  $m_2 = 0,5m_1$ ,  $c_2 = 10c_1 \in \{1; 2; 10\}$  проведено исследование движения системы аналогично (13) ( $T^* = \alpha_2 T_{21}$ ) в диапазоне  $\alpha_2 \in \{0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 5,0\}$  (примеры – на рис. 12-14).

На рис. 15 представлена сводная диаграмма, характеризующая влияние коэффициентов повторности импульсов  $\alpha$  на относительные амплитуды колебаний обоих тел исследуемой системы. Данная диаграмма по характеру зависимостей полностью соответствует диаграмме для одномассовой системы (см. рис. 11). Видно, что в этой системе также наблюдаются ударные резонансы. Поскольку вторая собственная частота системы намного

выше первой, то движение тела 2 практически синхронизировано с движением тела 1. Необходимо при этом отметить, что более важным является не подтверждение возможности ударных резонансов, а возможность получения этих режимов путем численного интегрирования.

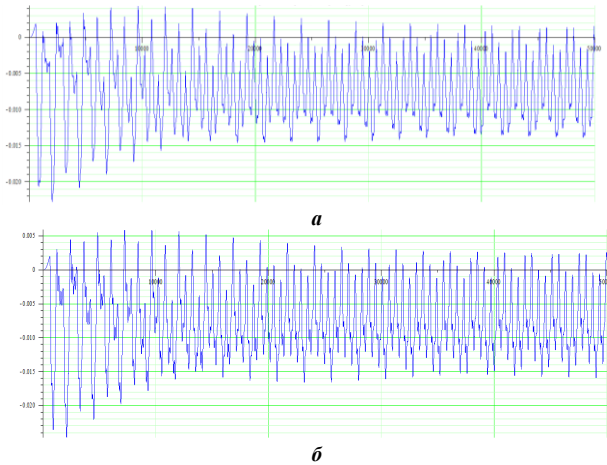


Рис. 12 – Динамический процесс в двухмассовой системе при  $\alpha_2 = 0,5$ : а – тело 1; б – тело 2

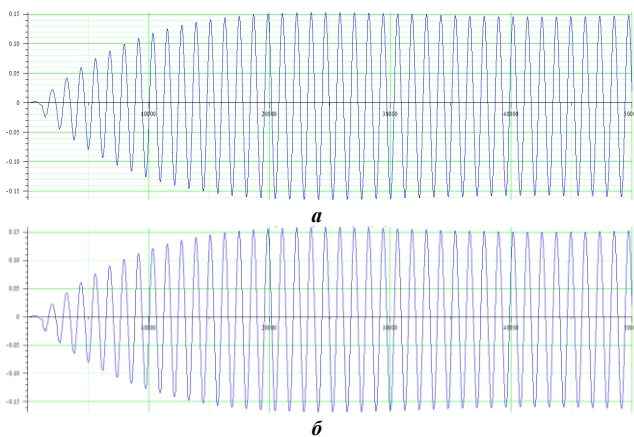


Рис. 13 – Динамический процесс в двухмассовой системе при  $\alpha_2 = 1,0$ : а – тело 1; б – тело 2

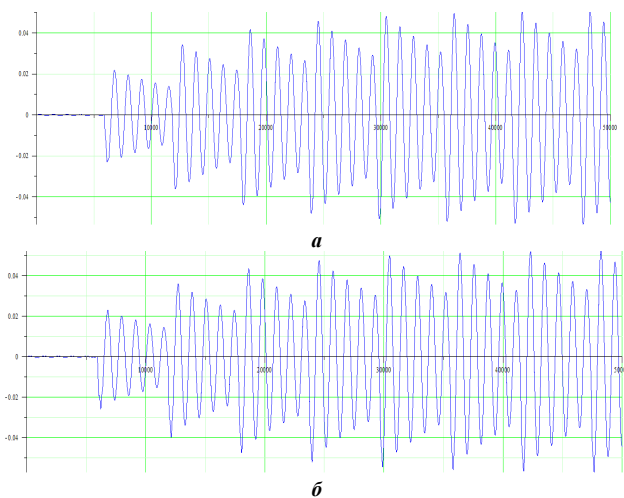


Рис. 14 – Динамический процесс в двухмассовой системе при  $\alpha_2 = 5,0$ : а – тело 1; б – тело 2



Рис. 15 – Зависимости амплитуды установившихся колебаний элементов двухмассовой системы, отнесенные к амплитуде при  $\alpha = 1$ , от коэффициента повторности импульсов

**III. Трехмассовая система.** В данном случае принципиальных отличий в поведении системы по сравнению с двухмассовой не наблюдается. В связи с этим проведено исследование динамики в диапазоне  $\alpha_3 \in \{0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 5,0\}$  ( $T^* = \alpha_3 T_{31}$ ) для конкретного случая  $m_2 = m_3 = 0,5m_1, c_2 = c_3 = 10c_1$ . На рис.16-18 представлены результаты исследований для тела (массы) 1 (для тел 2 и 3 – аналогичные распределения) для отдельных  $\alpha_3$ . Ударный резонанс достигается как на второй, так и на третьей массе. На рис.19 приведена сводная диаграмма влияния коэффициента повторности импульсов на амплитуды колебаний в установившемся режиме для этой системы. По виду данная диаграмма аналогична диаграммам для одно- и двухмассовой систем (см. рис. 11, 15).

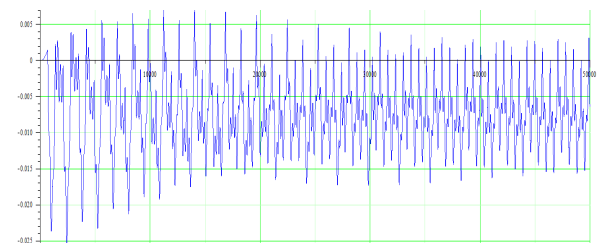


Рис. 16 – Динамический процесс в трехмассовой системе при  $\alpha_3 = 0,5$

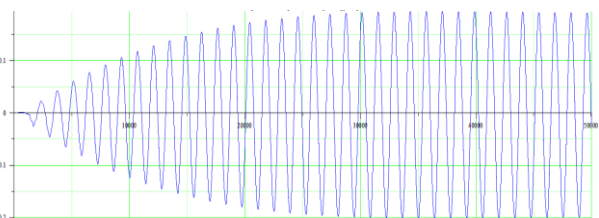


Рис. 17 – Динамический процесс в трехмассовой системе при  $\alpha_3 = 1,0$

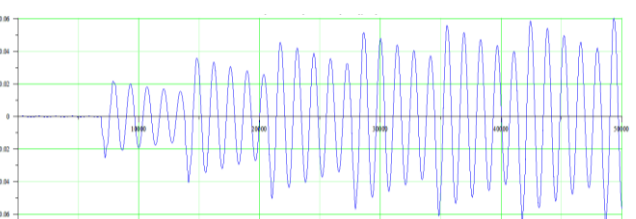


Рис. 18 – Динамический процесс в трехмассовой системе при  $\alpha_3 = 5$

Таким образом, основным выводом по проведенным исследованиям является подтверждение возможности ударных резонансов на частотах возмущения, дальних от собственных частот колебаний системы, причем эти резонансные режимы четко проявляются при численном интегрировании. При этом, чем выше коэффициент повторности импульсов, тем менее опасен ударный резонанс.

**Околорезонансные режимы**

Резонансные режимы в системе с конечным числом степеней свободы соответствуют точной кратности собственных частот частоте возбуждающей силы. Естественно, что при нарушении кратности процесс в исследуемой системе изменяется. Отследить это влияние можно, варьируя частоту внешнего воздействия.

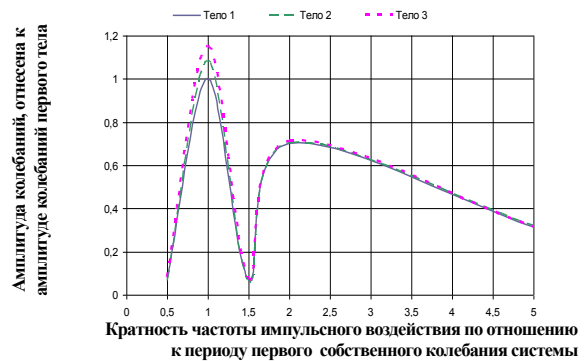


Рис. 19 – Зависимости амплитуды установившихся колебаний элементов трехмассовой системы, отнесенные к амплитуде при  $\alpha = 1$ , от коэффициента повторности импульсов  $\alpha$

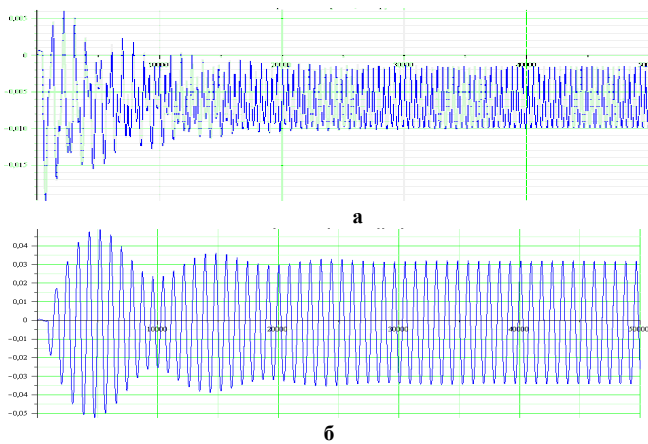


Рис. 20 – Динамический процесс в одномассовой системе при:  
 а —  $\alpha_1 = 0,5+10\%$ ; б —  $\alpha_1 = 1,0+10\%$ ; в —  $\alpha_1 = 1,5+10\%$ ;  
 г —  $\alpha_1 = 2,0+10\%$ ; д —  $\alpha_1 = 5,0+10\%$

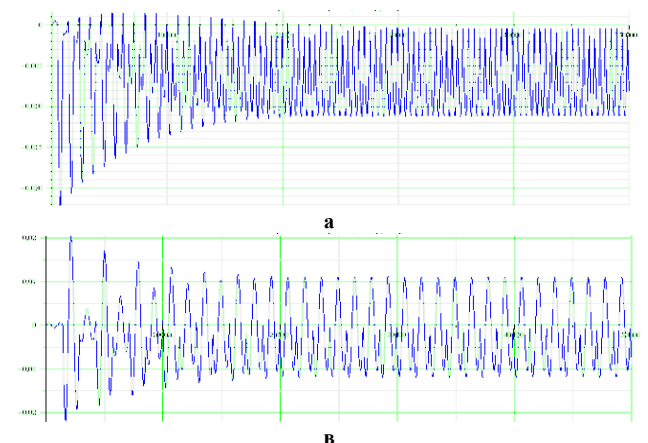
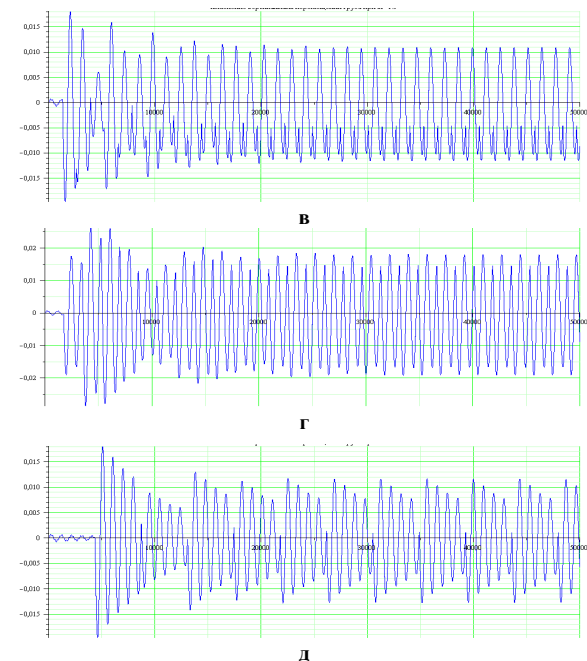
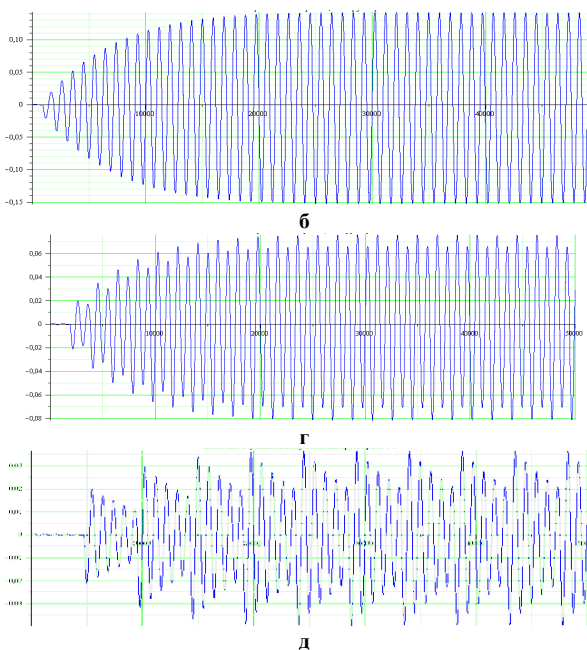


Рис. 21 – Динамический процесс в одномассовой системе при:  
 а —  $\alpha_1 = 0,5+1\%$ ; б —  $\alpha_1 = 1,0+1\%$ ; в —  $\alpha_1 = 1,5+1\%$ ;  
 г —  $\alpha_1 = 2,0+10\%$ ; д —  $\alpha_1 = 5,0+1\%$





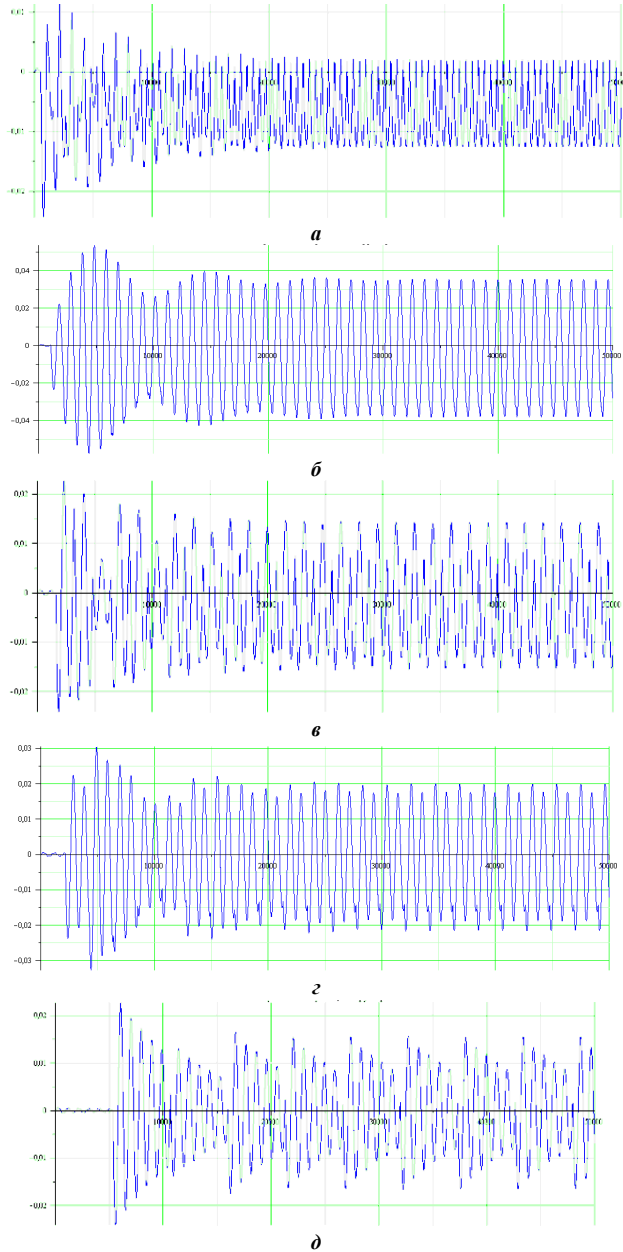


Рис. 22 – Динамический процесс в одномассовой системе при:  
 а –  $\alpha_1 = 0,5-10\%$ ; б –  $\alpha_1 = 1,0-10\%$ ; в –  $\alpha_1 = 1,5-10\%$ ;  
 г –  $\alpha_1 = 2,0-10\%$ ; д –  $\alpha_1 = 5,0-10\%$

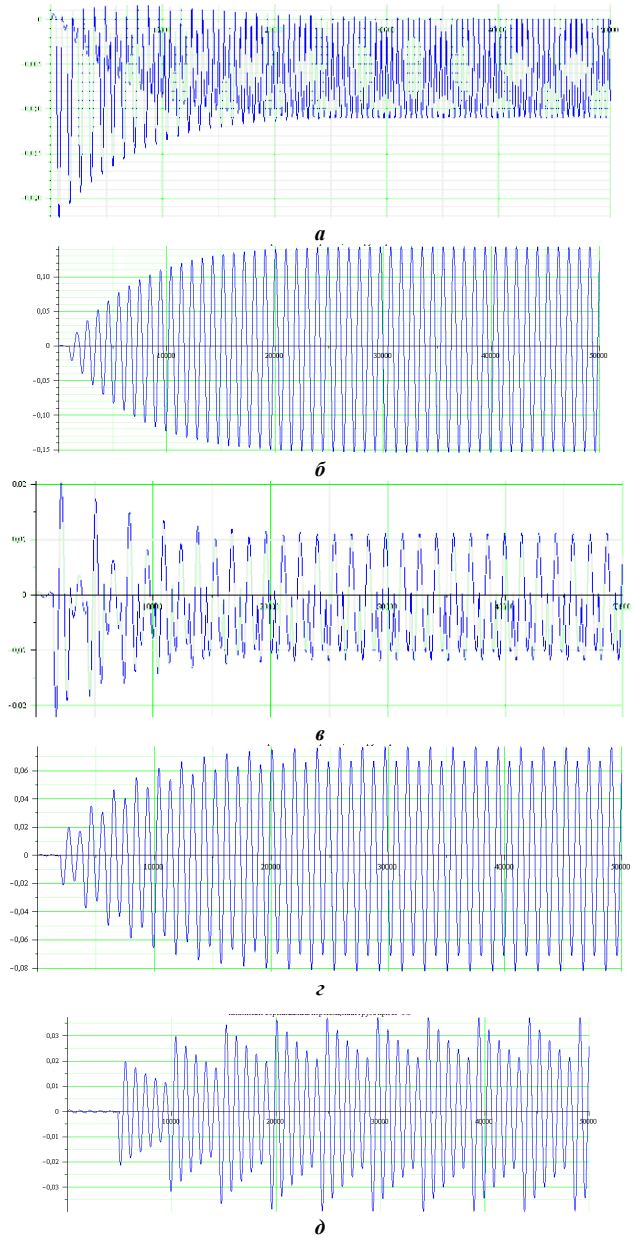


Рис. 23 – Динамический процесс в одномассовой системе при:  
 а –  $\alpha_1 = 0,5-1\%$ ; б –  $\alpha_1 = 1,0-1\%$ ; в –  $\alpha_1 = 1,5-1\%$ ;  
 г –  $\alpha_1 = 2,0-1\%$ ; д –  $\alpha_1 = 5,0-1\%$

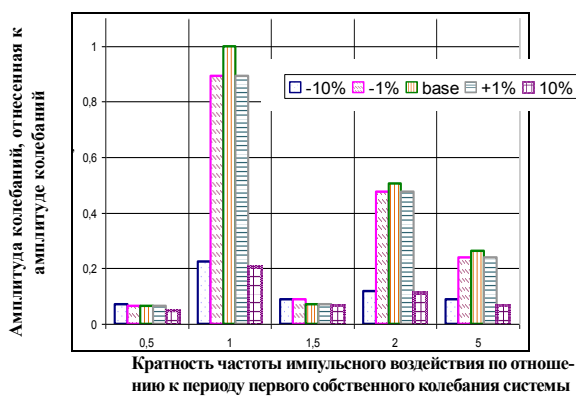


Рис. 24 – Зависимости амплитуд установившихся колебаний одномассовой системы, отнесенные к амплитуде при  $\alpha = 1$ , при различных отстройках от резонансной частоты ( $\pm 1\%$ ,  $\pm 10\%$ )

На рис. 20-23 представлены временные распределения перемещения одномассовой системы при варьировании на  $\pm 1\%$ ,  $\pm 10\%$  частоты возбуждения от кратной резонансной. Видно, что в отличие от отстройки  $\pm 1\%$ , отстройка частоты от резонансной уже на  $10\%$  приводит к качественно иному поведению системы. При этом количественно это выражается в снижении амплитуды в несколько раз. Сводная картина зависимости амплитуд колебаний от коэффициентов повторности импульсов и степени отстройки более наглядно видна из диаграммы, представленной на рис. 24. Таким образом, для отстройки от ударного резонанса достаточно незначительного изменения частоты внешнего возмущения (или собственных частот конструкции машины).

### Влияние вязкого трения

Вязкое трение в виброударной системе является фактором, сдерживающим рост амплитуды вынужденных колебаний. При этом данное влияние тем сильнее, чем

выше коэффициент демпфирования (рис. 25-30). На рис. 31 представлена сводная диаграмма, отражающая степень этого влияния.

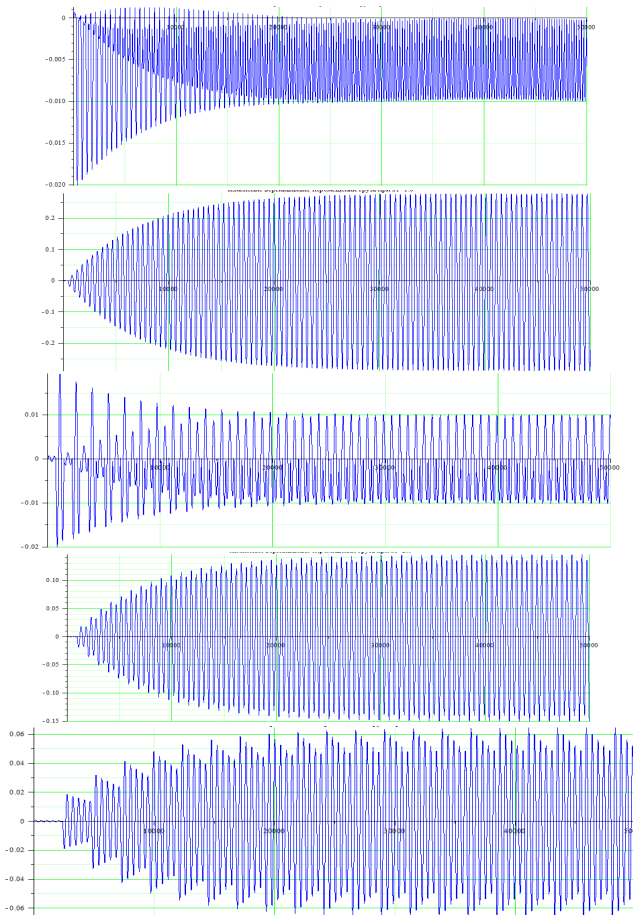


Рис. 25 – Динамический процесс в одномассовой системе при уменьшенном коэффициенте вязкого трения в 2 раза:  
а –  $\alpha_1 = 0,5$ ; б –  $\alpha_1 = 1,0$ ; в –  $\alpha_1 = 1,5$ ; г –  $\alpha_1 = 2,0$ ; д –  $\alpha_1 = 5,0$

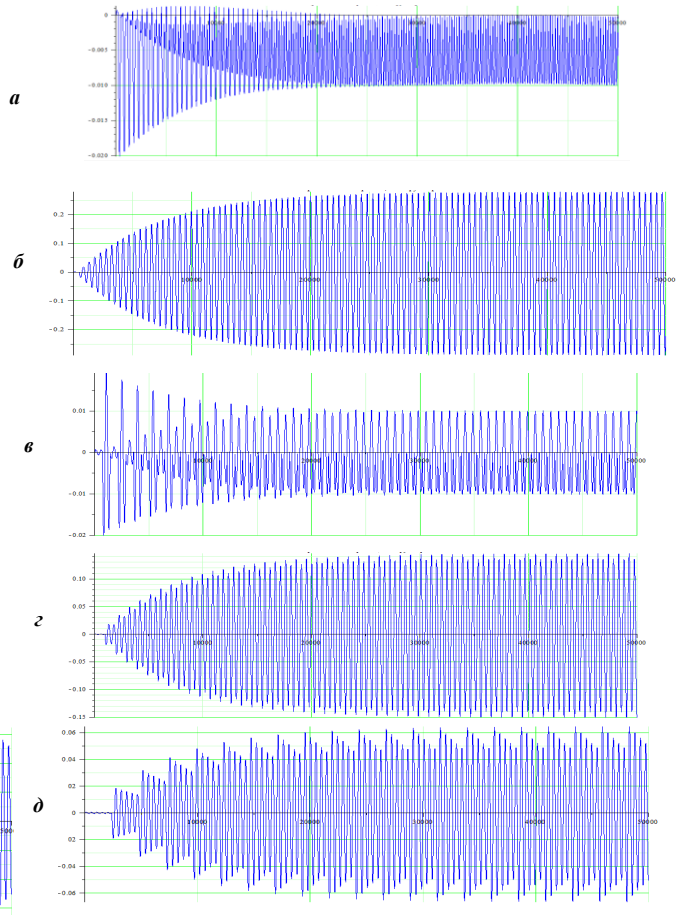


Рис. 26 – Динамический процесс в одномассовой системе при увеличенном коэффициенте вязкого трения в 2 раза:  
а –  $\alpha_1 = 0,5$ ; б –  $\alpha_1 = 1,0$ ; в –  $\alpha_1 = 1,5$ ; г –  $\alpha_1 = 2,0$ ; д –  $\alpha_1 = 5,0$

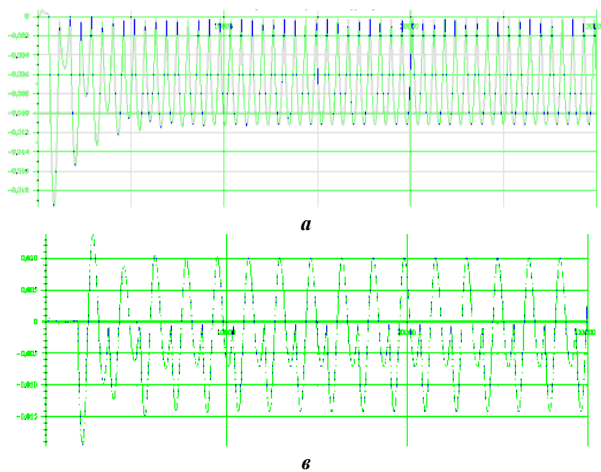
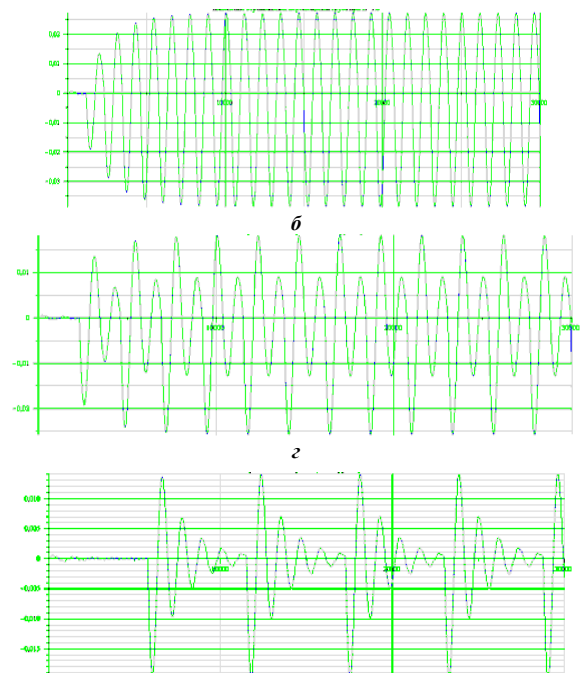


Рис. 27 – Динамический процесс в одномассовой системе при увеличенном коэффициенте вязкого трения в 5 раз:  
а –  $\alpha_1 = 0,5$ ; б –  $\alpha_1 = 1,0$ ; в –  $\alpha_1 = 1,5$ ;  
г –  $\alpha_1 = 2,0$ ; д –  $\alpha_1 = 5,0$



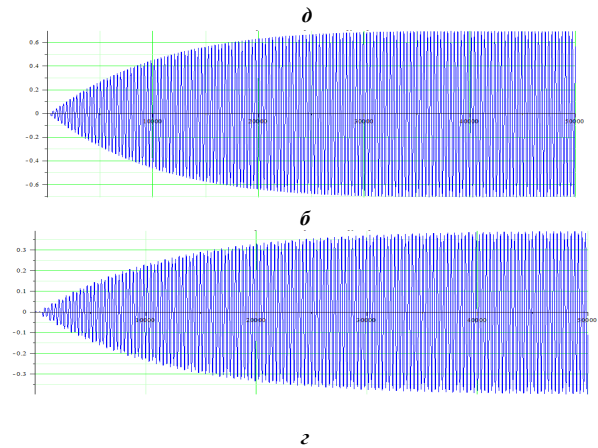
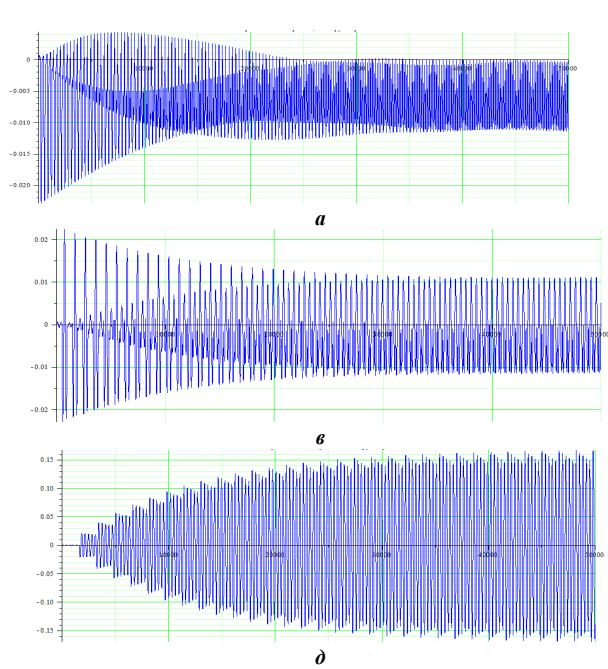


Рис. 28 – Динамический процесс в одномассовой системе при уменьшенном коэффициенте вязкого трения в 5 раз:

$$а - \alpha_1 = 0,5; б - \alpha_1 = 1,0; в - \alpha_1 = 1,5;$$

$$г - \alpha_1 = 2,0; д - \alpha_1 = 5,0$$

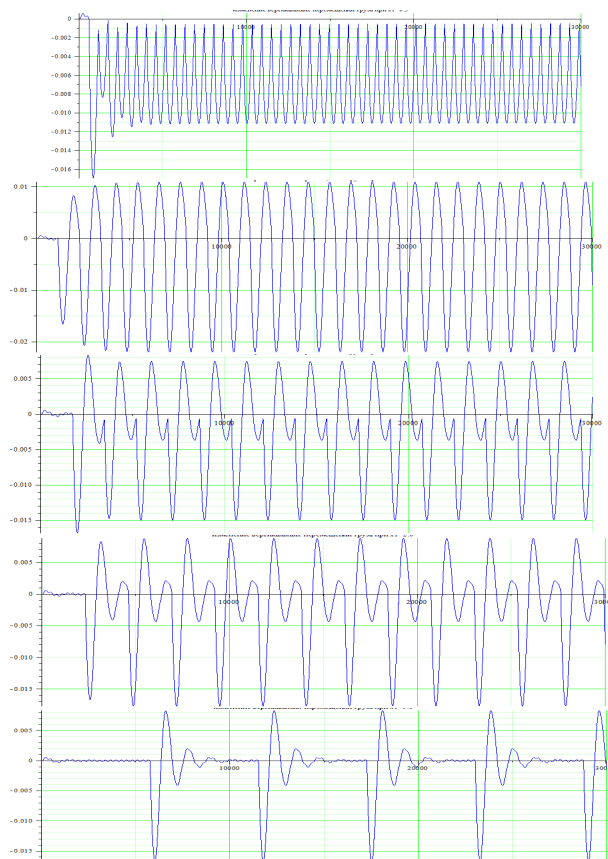


Рис. 29 – Динамический процесс в одномассовой системе при увеличенном коэффициенте вязкого трения в 10 раз:

$$а - \alpha_1 = 0,5; б - \alpha_1 = 1,0; в - \alpha_1 = 1,5; г - \alpha_1 = 2,0; д - \alpha_1 = 5,0$$

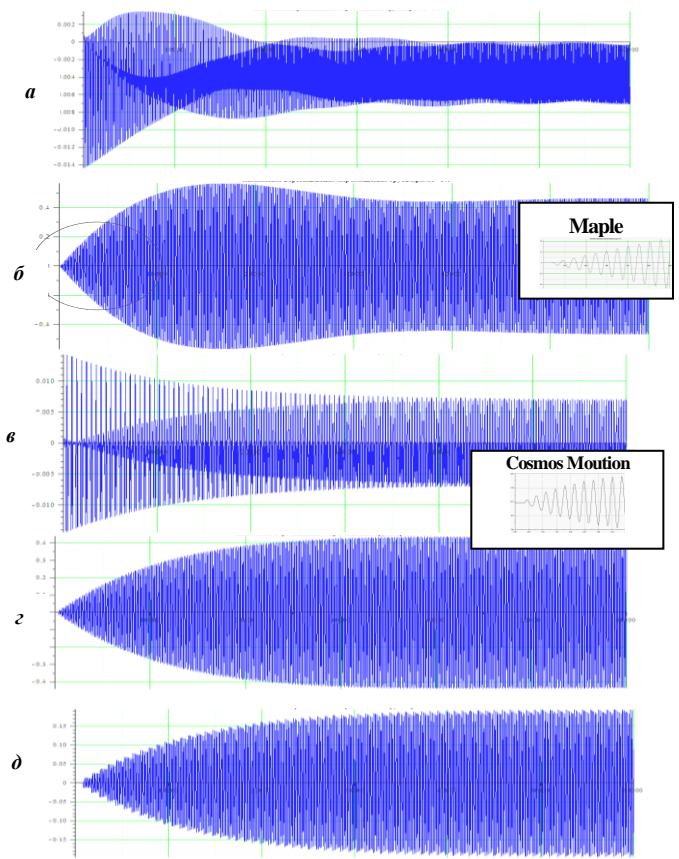


Рис. 30 – Динамический процесс в одномассовой системе при уменьшенном коэффициенте вязкого трения в 10 раз:

$$а - \alpha_1 = 0,5; б - \alpha_1 = 1,0; в - \alpha_1 = 1,5; г - \alpha_1 = 2,0; д - \alpha_1 = 5,0$$

Из представленных данных можно сделать вывод, что наряду с отстройкой от резонансных частот эффективным средством гашения колебаний при ударном полиимпульсном возбуждении является наличие сильного вязкого трения.

Анализ представленных материалов дает основа-

ние для следующих выводов.

1. Для исследования ударного резонанса в динамических системах предложено использование комплексного подхода, сочетающего аналитические вычисления, численное интегрирование уравнений движения и симулирование в САЕ-пакетах. Продемон-

стрировано, что все три способа обеспечивают адекватное моделирование и точное определение условий для достижения ударного резонанса, в связи с чем можно констатировать, что в зависимости от особенностей исследуемой системы или задачи можно применять любой из способов или их комбинацию.

2. Ударный резонанс в системе может реализовываться при условии кратности периода возбуждения к периоду любого из собственных частот колебаний или высокой степени близости к ней (около 1-3 %). При этом как особенность можно отметить сильное влияние частотной отстройки на уменьшение амплитуд установившихся колебаний.

3. Вязкое трение уменьшает амплитуды резонансных колебаний при ударном резонансе.

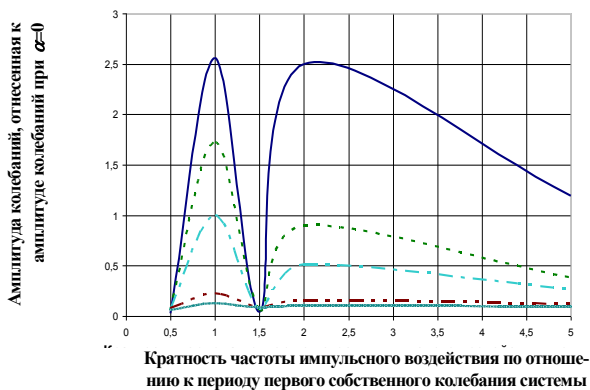


Рис. 31 – Зависимости амплитуд установившихся колебаний одномассовой системы, отнесенных к амплитуде при  $\alpha = 1$ , при различных коэффициентах вязкого трения (0,1 от базового варианта; 0,5 от базового варианта; базовый вариант; удесятеренный коэффициент трения; удесятеренный коэффициент трения)

Таким образом, основным выводом по проведенным исследованиям является подтверждение возможности ударных резонансов на частотах возмущения, дольных от собственных частот колебаний, причем эти резонансные режимы четко выявляются при численном интегрировании. При этом численным интегрированием подтверждено, что чем выше КПИ, больше коэффициент вязкого трения или величина отстройки от резонансной частоты, тем менее опасен ударный резонанс.

Полученные результаты могут быть распространены и на дискретно-континуальные системы. Действительно, после проведения процедуры дискретизации любой конструкции получается система с конечным, хотя, быть может, и очень большим числом степеней свободы, а для нее справедливы все обнаруженные и описанные в данной работе особенности.

Рассмотрим, в частности, многомассовую систему, уравнения движения которой

$$M\ddot{X} + K\dot{X} + CX = Y f_{\text{имп}}(t). \quad (19)$$

Здесь  $X = \{X_1, X_2, \dots, X_N\}^T$ ,  $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_N\}^T$  – вектор-столбец обобщенных координат и нагрузок соответственно,  $M, K, C$  – матрицы масс, демпфирования и упругих характеристик, а функция  $f_{\text{имп}}(t)$  имеет вид, представленный на рис. 4, только с единич-

ной амплитудой.

Рассматривая аналогично случаю с одной степенью свободы, уравнение (19) для случая отсутствия трения

$$M\ddot{X} + CX = Y f_{\text{имп}}(t), \quad (20)$$

получим условие резонанса при периодическом ударном воздействии.

Как известно, с помощью некоторого преобразования  $H$  исходную систему (20) можно свести к набору разделенных уравнений относительно собственных форм  $Z_i$ :

$$H : \{Z = H \cdot X; W = H \cdot Y\} \Rightarrow \Rightarrow \ddot{Z}_i + p_i^2 Z_i = W_i f_{\text{имп}}(t), \quad i = 1, \dots, N. \quad (21)$$

При этом в силу независимости этих уравнений получаем наборы условий наступления резонанса

$$\omega^* = p_i / n; \quad (22)$$

$$p_i = \omega^* \cdot n; \quad T^* = T_i \cdot n; \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (23)$$

Эти резонансы наступают при кратности периода возмущающей силы периоду любого собственного колебания. Таким образом, в данном случае имеем гораздо больше условий резонанса, чем в случае с системой, имеющей одну степень свободы.

#### Моделирование динамических процессов в дискретно-континуальной системе при периодическом ударном нагружении

Обоснование рациональных, конструктивных и технологических параметров, а также определение эксплуатационных режимов для крупногабаритных тяжело нагруженных ВМ является достаточно сложной научно-технической задачей. При этом традиционные подходы [1] применительно к крупногабаритным машинам, кроме известных критериев и ограничений, имеют свои дополнительные особенности. Это касается, например, методов уточнения нагрузок при взаимодействии подбрасываемого технологического груза с корпусом колеблющейся машины [4]. Кроме того, важным ограничительным фактором, формирующим соответствующие ограничения, является учет деформационных частот и форм колебаний корпусов проектируемых машин с точки зрения возможного резонанса [5].

Указанные физико-механические процессы, порождающие новые критерии и ограничения, ужесточают требования к проектированию виброударных тяжело нагруженных машин. В то же время углубленный анализ протекающих в процессе эксплуатации вибромашин физико-механических процессов позволил выявить новый проблемный фактор – возможность ударного резонанса в исследуемых ВМ, еще более ограничивающий свободу выбора их проектных параметров и конструктивных схем.

В отличие от известных методик расчета ударного резонанса для систем с одной степенью свободы, в данном случае наблюдается более сложное сочетание факторов:

- исследуемая конструкция является системой со многими степенями свободы, причем она ведет себя на нижних частотах возбуждения как твердое тело на

упругих опорах (т.е. как система с конечным числом степеней свободы), а на высоких начинают проявляться формы колебаний металлоконструкции как упруго-деформируемой системы;

– основная возбуждающая ударная сила в этих машинах является внутренней по природе своего возникновения для системы "колеблющийся корпус – вибрирующий с подбрасыванием технологический груз", причем ее распределение во времени определяется физико-механическими свойствами машины и груза, а также эксплуатационными режимами (амплитуды и частоты возбуждения). Соответственно, возникают дополнительные сочетания конструктивных параметров и режимов работы ВМ, опасные с точки зрения возникновения ударного резонанса. При этом особое внимание следует уделить спектрам колебаний корпусов проектируемых машин, в которых, собственно, такое явление может возникать. В данной работе исследуются собственные частоты и формы колебаний на примере вибрационной машины для выбивки литья конструкции и производства ОАО "Азовмаш" [4, 5].

Цель исследований, описанных далее, – определить проблемные режимы возбуждения этой машины, опираясь на изучение спектра и форм колебаний ее корпуса.

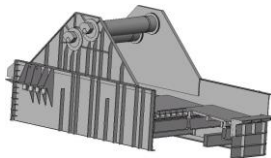
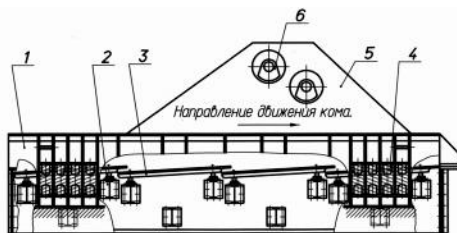


Рис. 32 – Выбивная транспортирующая машина с дебалансным приводом

Выбивная машины [4, 5] (рис. 32) для извлечения крупного вагонного литья из песчано-глинистых форм представляет собой крупногабаритную сборно-сварную конструкцию, опирающуюся на упругие опоры и приводимую в действие за счет инерционных сил от вращения дебалансных валов (рис. 33).



- 1 – корпус; 2 – балки;  
3 – колосниковые решетки;  
4 – упругие опоры; 5 – щеки опор дебалансных валов;  
6 – валы дебалансного привода

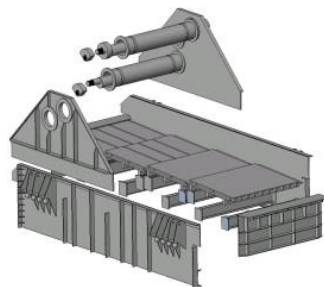


Рис. 33 – Элементы выбивной транспортирующей машины

Данная конструкция представляет собой динамическую систему, в данной работе условно называемую

дискретно-континуальной. Ее дискретная часть состоит из корпуса, моделируемого как жесткое тело на упругих опорах, и описывается шестью степенями свободы. Континуальная часть моделирует корпус как упругое тело, деформация которого описывается бесконечным числом степеней свободы.

Учитывая, что для описания континуальных систем при применении такого мощного современного метода как метод конечных элементов (МКЭ) требуется большое, но конечное число степеней свободы (они соответствуют, например, узловым перемещениям конечно-элементной модели), в целом всю дискретно-континуальную систему можно дискретизировать, дополнив упругие опоры в созданную конечно-элементную модель (КЭМ). Тогда в целом получаем дискретную, но подробную, приближенную к дискретно-континуальной, модель исследуемой машины. Описанное выше разделение машины на дискретную и континуальную части условно, т.к. эти части механически напрямую из системы выделены быть не могут. Отличие между ними – в поведении при различных частотах возбуждения. Как правило, на нижних частотах проявляются свойства системы как дискретной, а на высоких – континуальной.

Уравнения движения ВМ после дискретизации по методу конечных элементов в первом приближении имеют вид:

$$M\ddot{x} + K\dot{x} + Cx = A \sin \omega^* t + F_{уд}(t). \quad (24)$$

Здесь  $M$ ,  $K$ ,  $C$  – матрицы масс, демпфирования и жесткости конечно-элементной модели соответственно;  $A \sin \omega^* t$  – распределенная по узлам гармоническая сила возбуждения амплитудой  $A$  от вращения дебалансных валов с частотой  $\omega^*$ ;  $F_{уд}(t)$  – сила ударного взаимодействия корпуса машины с технологическим грузом, определяемая из условий их ударного взаимодействия.

При малом демпфировании в системе (24) возможен ударный резонанс, вызываемый импульсным характером распределения силы ударного взаимодействия (рис. 34).

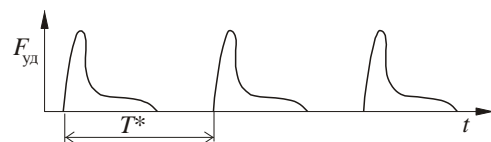


Рис. 34 – Характер распределения силы ударного взаимодействия во времени

В силу того, что машина работает с частотой  $\omega^* = 2\pi\nu^* = 2\pi/T^*$ , где  $T^*$  – период процесса, причем эта частота выше частоты собственных колебаний машины как жесткого тела на упругих опорах, ударный резонанс может приводить к возбуждению более высоких форм колебаний. В этом случае (рис. 35) машина, работающая в зарезонансном режиме по трансляционным формам колебаний корпуса (т.е. как жесткого тела [5]), может иметь совпадение (или близость) собственной частоты из диапазона  $[\omega_D^1; \infty]$  частоте, кратной  $\omega^*$ :

$$\omega_D^j \approx \omega^* \cdot n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (25)$$

В этом случае  $j$ -я деформационная форма колебаний начнет резонировать, возбуждая колебания корпуса машины как конструкции с распределенными параметрами. Примечательно, что при этом данные колебания слабо влияют на движение корпуса машины как жесткого тела (формы с частотами  $\omega_T^1 \div \omega_T^6$ ), а, значит, и не изменяются условия взаимодействия технологического груза с корпусом (т.е. внутренняя для системы сила  $F_{уд}(t)$  будет иметь практически неизменный характер распределения во времени). Такая особенность не дает возможности системе самоотстроиться от резонансного режима, т.к. импульсная сила генерируется на низких (трансляционных) формах колебаний, а воздействует – на высшие (деформационные), причем обратная связь в этом случае слабая.

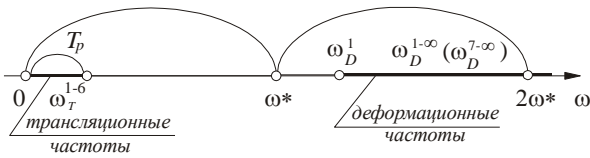


Рис. 35 – Соотношения частоты возбуждения машины, работающей в зарезонансном режиме по трансляционным формам колебаний, с высокими ("деформационными") частотами колебаний

Для определения опасных режимов из системы

$$\text{Det}(C - \omega^2 M) = 0 \quad (26)$$

определяются собственные частоты колебаний корпуса машины  $\omega^i = \{\omega_T^1, \dots, \omega_T^6, \omega_D^1, \omega_D^2, \dots\}$ , а затем возможные совпадения (или близость) частот по соотношению (25).

Определяя собственные формы колебаний  $x_i$  из соотношения

$$(C - \omega^2 M)x = 0, \quad (27)$$

можно проконтролировать, на какой форме произойдет ударный резонанс.

Таким образом, исходная дискретно-континуальная система преобразуется в дискретный аналог путем применения технологии дискретизации метода конечных элементов. Поскольку при проектировании машины в расчет следует принимать нижние из "деформационных" частот и форм колебаний, а применяемая дискретизация дает возможность определить нижнюю часть спектра достаточно точно, то можно считать, что допускаемая в результате дискретизации общая погрешность является незначительной. При этом процесс сходимости решения можно проиллюстрировать на пробных моделях. В качестве тестового объекта исследований была выбрана выбивная машина, описанная в работах [4, 5]. Масса подпружиненной части корпуса машины – около 16 т.

Для контроля качества и точности расчетов спектров колебаний были проведены на начальном этапе варьирования размеров конечных элементов (КЭ) типа Shell, которыми моделируется исследуемый корпус.

На рис. 36 представлены сравнительные спектры,

полученные при различной степени дискретизации корпуса. Видно, что получаемое в результате сгущения сетки уточнение результатов – незначительно, и в первом приближении эту модель (рис. 37, б) можно использовать в качестве оценочной для выявления опасных режимов работы машины. В дальнейших исследованиях определялись динамические характеристики корпуса. В табл. 1 и на рис. 38 представлены собственные частоты, определенные из созданной КЭМ исследуемого корпуса.

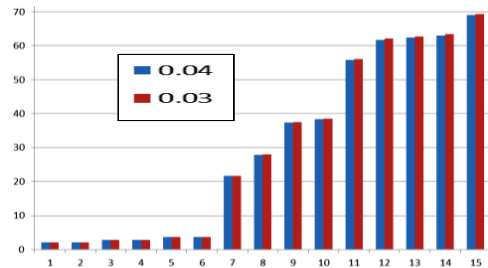


Рис. 36 – Сравнительные спектры, полученные при различной степени дискретизации корпуса: размеры конечно-элементной сетки 0,04 м и 0,03 м

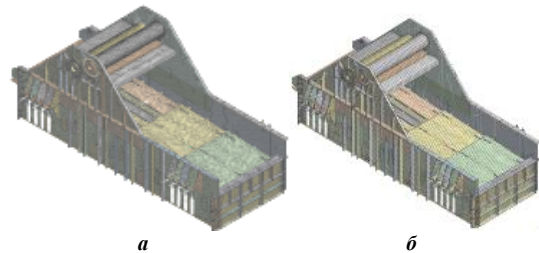


Рис. 37 – Конечно-элементные модели с разными размерами конечных Shell-элементов: а – 0,03 м; б – 0,06 м

Таблица 1 – Спектр собственных частот колебаний корпуса вибромашины

Форма	Частота, Гц	Форма	Частота, Гц	Форма	Частота, Гц
1	2,04	16	74,57	31	114,55
2	2,08	17	75,35	32	115,67
3	2,86	18	76,81	33	117,75
4	2,87	19	80,09	34	118,48
5	3,70	20	84,056	35	119,29
6	3,71	21	86,0	36	119,81
7	21,68	22	87,96	37	126,17
8	27,86	23	90,45	38	127,0
9	37,41	24	91,20	39	128,45
10	38,45	25	94,79	40	129,78
11	55,76	26	95,13	41	131,25
12	61,79	27	105,53	42	132,15
13	62,42	28	106,14	43	132,76
14	63,04	29	111,79	44	136,27
15	69,04	30	113,73	45	136,83

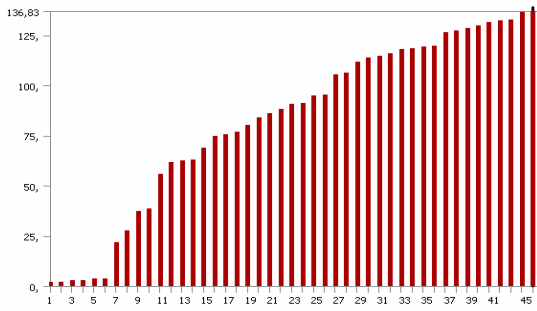


Рис. 38 – Спектр собственных частот колебаний (Гц) корпуса вибромашины

Анализ полученного спектра (см. рис. 38 и табл. 1) дает основание для следующих выводов.

1. На полученном спектре четко разделены диапазоны "трансляционных" (до 4 Гц) и "деформационных" (после 20 Гц) частот собственных колебаний.

2. Возмущающая сила с частотой 16 Гц [4, 5] обеспечивает работу машины в зарезонансном режиме по "трансляционным" и дорезонансном – по "деформационным" частотам.

3. Спектр "деформационных" частот достаточно густой и плавно изменяющийся. Следовательно, в такой динамической системе возможность выполнения условия (25) достаточно высока. Таким образом, данная конструкция потенциально подвержена множественным ударным резонансам.

4. У исследуемой конструкции отсутствуют собственные частоты, точно кратные частоте возбуждения. Таким образом, "сильные" и "прямые" режимы ударного резонанса в номинальном случае не должны реализовываться.

В реальных условиях проектирования и эксплуатации ни массовые, ни жесткостные характеристики исследуемой конструкции не являются зафиксированными. На этапе проектирования возможны изменения

проекта конструкции. Даже будучи незначительными, они изменяют  $M$  и  $C$  в (26) и (27), а, значит, и собственные частоты, и формы. Кроме того, в процессе работы часть материала из выбиваемого технологического груза оседает на корпусе ВМ, латентно изменяя матрицу  $M$  в этих же соотношениях с этим же эффектом. И, наконец, не является строго фиксированной частота возбуждения  $\omega^*$ . Таким образом, речь идет не о сравнении четких величин в (25), а их "размытых" аналогов:

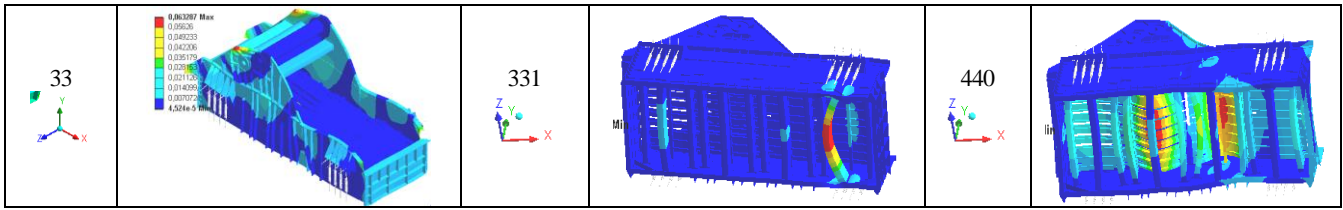
$$(\omega_D^j \pm \Delta\omega_D^j) = \tilde{\omega}_D^j \approx \tilde{\omega}^* \cdot n = (\omega^* \pm \Delta\omega^*) \cdot n, \quad n = 1, 2, \dots (28)$$

Степени "размытости" спектров  $\Delta\omega_D^j$  и частоты возбуждения  $\Delta\omega^*$  расширяют диапазоны, в которых возможно возникновение ударного резонанса. При этом следует разделить детерминированные, или определяемые (например, на этапе проектирования), и стохастические (например, на этапе изготовления машины и ее эксплуатации) составляющие  $\Delta\omega_D^j$  и  $\Delta\omega^*$ . Первая составляющая может быть предметом управления, вторая – минимизации.

Анализ конкретного спектра корпуса исследуемой машины (см. рис. 38 и табл. 1) дает возможность в качестве потенциально опасных (с учетом выводов 1)–4), см. выше) выделить следующие частоты: № 8, 9, 11, 12, 13, 14, 19, 26, 29, 30, 31, 40. При незначительных изменениях инерционно-жесткостных характеристик корпуса вибромашины, а также частоты вращения дебалансного привода ударные резонансы (или околорезонансные режимы) будут постоянно возбуждаться. Некоторые представления о формах колебаний, при которых возможны эти режимы, можно получить из табл. 2.

Таблица 2 – Формы собственных колебаний корпуса вибромашины

№ частоты	Форма колебаний	№ частоты	Форма колебаний	№ частоты	Форма колебаний
8		9		10	
12		13		14	
19		22		26	



Как видно из представленных в табл. 2 форм, они достаточно разнообразны по локализации узлов и пучностей, а также по охвату отдельных (локальные) и многих (глобальные) элементов конструкции, поэтому для более четкого прогноза опасных зон в металлоконструкции корпуса необходимы дополнительные исследования собственных форм колебаний.

Таким образом, в работе представлен новый подход к определению опасных (с точки зрения возникновения ударного резонанса) режимов работы крупногабаритных тяжелонагруженных виброударных машин. Так, традиционное требование о зарезонансности рабочего режима [1] (рис. 39) имеет вид:

$$\omega^* / \omega_6^T \geq k_1. \tag{29}$$

Здесь  $k_1 \approx 3,5 \div 4$  – коэффициент, обеспечивающий стабильность режима работы машины в зарезонансной области (по трансляционным частотам);  $\omega^*$  – частота внешнего возмущения;  $\omega_i^T, i=1, \dots, 6$  – собственные трансляционные формы колебаний [5].

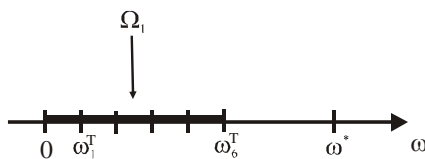


Рис. 39 – К ограничению спектра частот по условию зарезонансного режима работы

Если в спектре собственных частот исследуемых машин значительное влияние имеют деформационные частоты  $\omega_j^D$ , то естественным требованием при их проектировании является отстройка от частоты возбуждения [5]:

$$\omega_1^D / \omega^* \geq k_2, \tag{30}$$

где  $k_2 \approx 1,2 \div 1,5$  – коэффициент отстройки, что обеспечивает устойчивый передрезонансный режим работы машины по нижней деформационной частоте собственных колебаний (рис. 40).

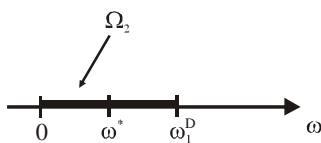


Рис. 40 – К ограничению спектра частот по условию передрезонансного режима работы

В отличие от традиционных подходов к синтезу параметров виброударных машин, в данном случае в расчет принимается дополнительный важный фактор –

возможность возникновения ударных резонансов на высоких частотах, которые кратны частоте нагружения. Данным частотам соответствуют формы колебаний, вызываемые упругим деформированием корпуса вибромашины. В отличие от известных методик, в работе виброударная машина рассматривается как дискретно-континуальная динамическая система, т.е. сочетающая характерные свойства и дискретной, и распределенной. Дискретизация системы проводится с использованием метода конечных элементов.

В этой связи естественным требованием является отстройка от некоторого числа первых  $N$  деформационных частот спектра собственных колебаний машины:

$$n_j \mu_j^- \leq (\omega_j^D / \omega^*) \leq n_j \mu_j^+ \quad (j=2,3, \dots, N). \tag{31}$$

Здесь  $\mu_j^- = 0,9 \div 0,95$  – коэффициент, ограничивающий запретную область снизу,  $\mu_j^+ = 1,05 \div 1,1$  – аналогичный коэффициент для ограничения сверху,  $n_j$  – целые числа (рис. 41). Соответственно, ограничения (29)-(31) определяют области  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  (см. рис. 39-41), причем трансляционные частоты  $\omega_1^T, \dots, \omega_6^T$  не должны выходить за пределы  $\Omega_1$ , т.е.

$$\omega_i^T \in \Omega_1, \quad i=1, \dots, 6, \tag{32}$$

а деформационные частоты не должны попадать в области  $\Omega_2, \Omega_3$ :

$$\omega_j^D \notin \Omega_2 \cup \Omega_3. \tag{33}$$

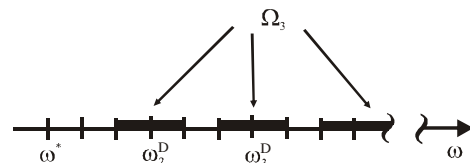


Рис. 41 – К ограничению спектра частот по условию ударного резонанса

Условия (32), (33) являются критериально-ограничительными. Чтобы удовлетворить этим критериям и ограничениям, необходимо варьировать некоторыми параметрами вибромашины.

Данный подход дает возможность не только выявлять потенциально опасные режимы работы, но и ставить задачи: минимизации их влияния путем конструктивного изменения корпуса; отстройки от неблагоприятных режимов за счет изменения структуры и параметров корпуса; определения допустимых отклонений на те или иные конструктивные параметры в процессе их изготовления и на частоту вращения дебалансного привода.



### Анализ динамических напряжений в металлоконструкции виброударной машины

Решение задачи о реакции виброударной машины как динамической системы на серию периодических импульсных нагрузок необходимо завершить анализом динамических напряжений, возникающих в наиболее нагруженных и ответственных силовых элементах ее конструкции. В работе [4] установлено, что доминирующими напряжениями в крупногабаритных тяжело-нагруженных ВМ являются напряжения от действия импульсных сил ударного взаимодействия. Эти напряжения, например, для выбивных машин превышают на порядок динамические напряжения от воздействия гармонического возбуждения при вращении приводных дебалансных валов. Поэтому основное внимание следует уделить определению НДС при действии единичного импульсного воздействия, причем временное его распределение и величину можно получить из серии расчетно-экспериментальных исследований. В частности, такие исследования для выбивной машины были проведены и описаны в диссертационной работе А.В. Грабовского [4] (см. рис. 1, а).

В работе максимальная действующая ударная нагрузка  $F_{уд\max}$  выбирается, следуя диссертации [4], но с учетом более благоприятных режимов работы, равной 1,0 мН. Для описания напряженно-деформированного состояния применяются соотношения МКС:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F_{уд}(t). \quad (34)$$

Здесь матрицы  $M$ ,  $C$ ,  $K$  являются функциями от обобщенных параметров  $p_i$ .

Таким образом, если формально переписать (34) в виде:

$$M(p)\ddot{x} + C(p)\dot{x} + K(p)x = F_{уд}(t), \quad (35)$$

где  $p$  – массив обобщенных параметров, то получаем в результате решения системы разрешающих дифференциальных уравнений (35), например, методом Ньюмарка, параметрическую зависимость

$$x = x(t, p). \quad (36)$$

Такой подход позволяет определять компоненты НДС исследуемых элементов виброударных машин в виде пространственно-временных распределений.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}(r, t, p); \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(r, t, p); \\ u_i &= u_i(r, t, p), \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $u_i$  – компоненты тензоров напряжений, деформаций и вектора перемещений точек исследуемой конструкции;  $r$  – радиус-вектор произвольной точки конструкции;  $t$  – время и  $p$  – массив обобщенных параметров.

Соотношения (37) автоматически реализуются в пакетах конечно-элементного анализа (то есть восстанавливаются  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ , и по узловым значениям  $x(t, p)$  как решения (35)). Следует заметить, что традиционный конечно-элементный анализ не распространяется на

варьируемые обобщенные параметры, и поэтому требуется дополнительная процедура их варьирования и генерирования соответствующих конструктивных вариантов машин. Здесь подразумевается, что такое варьирование возможно, и поэтому соотношения (37) можно принимать как семейство пространственно-временных распределений с массивом параметров  $p$ .

Соотношения (37) дают возможность получать отклик напряженно-деформированного состояния динамической системы на варьирование тех или иных обобщенных параметров для последующего обоснования рациональных конструктивных решений проектируемой машины. Это отличает его от традиционного подхода, примененного в [4], где варьировались только числовые параметры (толщины стенок боковин и подрешетных балок). При использовании же предлагаемого подхода можно варьировать и схему усиления корпуса машины, и геометрическую форму его элементов, и структуру проектируемой конструкции. Таким образом, можно определять прочностные характеристики варьируемой виброударной машины при динамическом нагружении, что является существенным преимуществом в процессе проектных исследований тяжело-нагруженных крупногабаритных машин.

### Обоснование конструктивных схем и параметров виброударных машин по критерию отстройки от резонанса при ударных воздействиях

Если основные проектные параметры виброударной машины определены из рассмотрения ее как дискретной динамической системы (см. работы А.В. Грабовского [4, 8, 9] и Е.Н. Барчана [5]), то в дальнейшем при незначительных изменениях жесткостных характеристик упругих опор и массово-инерционных свойств корпуса существенного изменения характера взаимодействия с технологическим грузом происходить не будет. Исходя из этого, корпус вибромашины на упругих опорах можно вычленивать в отдельную подсистему, рассматривая силовое воздействие на нее от технологического груза как внешнее. В этих условиях можно поставить задачу обоснования проектных решений и конструктивных параметров корпуса по критерию отстройки от ударного резонанса.

Рассмотрим основные отличительные особенности поставленной задачи.

1. *Объект обоснования (виброударная машина)* является дискретно-континуальной системой. Соответственно, можно выделить собственные формы ее колебаний как твердого тела ("трансляционные" формы и, соответственно, частоты  $\omega_i^T, i=1 \div 6$ ), а также как упругого ("деформационные" формы и, соответственно, частоты  $\omega_i^D, i=1, \dots, \infty$ ) [5]. При этом трансляционные и деформационные спектры для машин, работающих в резонансном режиме, разделены рабочей частотой возбуждения  $\omega^*$ , причем (рис. 42)

$$\omega_6^T \ll \omega^* < \omega_1^D. \quad (38)$$

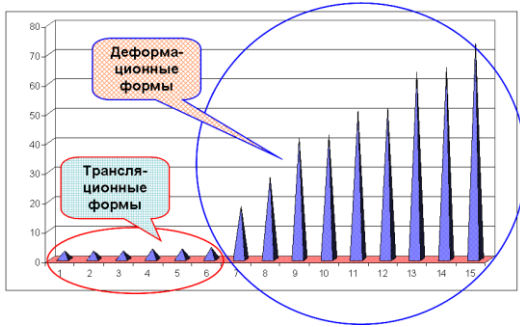


Рис.42. Спектры трансляционных и деформационных частот собственных колебаний виброударной машины с резонансным режимом работы

Исходя из этого, трансляционные частоты не участвуют в критериальных требованиях, формируемых из условий отстройки от ударного резонанса. Они входят только в ограничения

$$K_T \omega_6^T = \omega^*, \tag{39}$$

где  $K_T = 3,5 \div 4$  [1] – коэффициент, определяемый из условия работы машины в резонансном режиме.

Так как  $\omega_i^D$  зависят в основном от массово-инерционных и жесткостных характеристик корпуса, рассматриваемого как твердое тело на упругих опорах, то для соблюдения условия (39) при сохранении массово-инерционных характеристик (массы  $m$  и моментов инерции  $I$ ):

$$m \approx \text{const}, I_{kj} \approx \text{const}, \tag{40}$$

достаточно зафиксировать характеристики упругих опор

$$c_i \approx \text{const}, i = 1, \dots, N_c, \tag{41}$$

где  $N_c$  – количество упругих опор.

Таким образом, за счет перераспределения толщин между отдельными листами, которые формируют корпус, можно "заморозить" "трансляционную" часть спектра собственных частот:

$$\omega_i^T \approx \text{const}, i = 1 \div 6. \tag{42}$$

В этом случае можно добиться удовлетворения условия (39) только для одного из вариантов конструкции (не обращая внимания на "деформационную" составляющую спектра собственных частот). Для остальных вариантов конструкции данное условие выполнится заведомо. В связи с этим на следующем этапе можно обратить внимание на распределение "деформационных" частот.

2. Критериальные величины для исследуемого объекта (с учетом приведенных выше условий) можно формировать в основном только для "деформационной" части спектра. В отличие от ограничения

$$\omega_1^T \geq K_D \cdot \omega^*, \tag{43}$$

которое использовано в работе [5] и справедливо для случая основного классического резонанса, аналогичного варианту воздействия гармонической силы с частотой  $\omega^*$ , при учете явления ударного резонанса

условия (43) недостаточно, поскольку возможны ударные резонансы.

Исходя из этого, нужно предложить новый критерий при обосновании конструктивных схем и параметров корпусов виброударных машин, учитывающий не только нижнюю "деформационную" частоту  $\omega_1^D$ , но и более высокие частоты:

$$I = I(\omega_s^D). \tag{44}$$

Естественно, наличие трения приводит к тому, что на более высоких частотах ( $s \gg 1$ ) в силу высокой диссипации амплитуды колебаний намного меньше, чем на основной частоте. Иначе говоря, при совершении нескольких махов свободных колебаний между действиями ударных импульсов силы от технологического груза амплитуды отклонений экспоненциально уменьшаются. Таким образом, в расчет нужно принимать не весь спектр "деформационных" частот колебаний, а только нижний интервал частот (до частоты с номером  $N_s$ ):

$$s = 1 \div N_s; \omega_{N_s}^D \leq K_s \cdot \omega^*, \tag{45}$$

где  $K_s \approx 5 \div 6$  – коэффициент превышения (определяется степенью диссипативности в образуемой динамической системе, в том числе из экспериментальных испытаний).

Тогда можно предположить функционал  $I$ , например, в виде:

$$I = \sum_{i,s=1}^{N_s} \varphi_{s_i} \psi_i = \sum_{i,s=1}^{N_s} \left( \frac{\omega_s^D - i\omega^*}{i\omega^*} \right)^2 \psi_i \rightarrow \max. \tag{46}$$

Здесь  $\psi_i$  – весовые коэффициенты слагаемых, определяющие степень возбудимости отдельных "деформационных" форм:

$$\sum_{i=1}^{N_s} \psi_i = 1, \psi_j > \psi_k, \forall j > k. \tag{47}$$

Можно предложить другую структуру функций близости собственных частот  $\omega_s^D$  к кратным частотам возбуждения  $i\omega^*$ , однако важно, чтобы выполнялись для них условия:  $\varphi_{s_i} \geq 0 \forall s, i, \varphi_{s_i} = 0$  при  $\omega_s^D = i\omega^*$ . Таким образом, преобразуя ограничение (45) к аддитивному виду

$$G = \sum_e G_e(p_e), \tag{48}$$

где  $p_e$  – варьируемые параметры, составляющие массив  $p$ , можно задачу отстройки от режимов ударного резонанса представить в виде:

$$\det(C(p) - \omega^2 M(p)) = 0 \Rightarrow \omega_j^D = \omega_{j+6}, j = 1, 2, \dots; \tag{49}$$

$$G(p) = G_H = \text{const}; \tag{50}$$

$$I(p) \rightarrow \max. \tag{51}$$

Здесь (49) – уравнение для определения частот собственных колебаний, следующее из системы уравнений

движения в дискретизированном виде (например, для конечно-элементной модели). Соотношение (50) определяет ту номинальную массу  $G_H$  корпуса вибромашины, которую нужно обеспечить из условий качества выполнения технологической операции. Критерий (51) диктует тенденции перераспределения варьируемых параметров из принципа минимума динамической нагруженности корпуса вибромашины.

Система соотношений (49)-(51) образует некоторую задачу обоснования рациональных параметров вибромашины как динамической системы. Ее новыми отличительными особенностями являются:

- сочетание дискретности и континуальности в исследуемой динамической системе;
- новый тип резонансных режимов, учитываемых в совокупности факторов при расчете проектных параметров корпуса вибромашины;
- сформированные новые критерии для обоснования параметров корпусов проектируемых вибромашин.

3. *Пространство варьируемых параметров.* Сформированная выше задача (49)-(51), рассматриваемая с формальной точки зрения в общем виде, является традиционной задачей нелинейного программирования. В то же время, кроме отмеченных выше физических особенностей, получаемая задача имеет также и формально-математическую. Речь идет о множестве варьируемых параметров, в пространстве которых производится поиск оптимального решения. Поскольку задачу синтеза изначально нужно ставить с учетом варьируемости структуры и вариантов конструктивных решений корпуса машины, а не только численных величин, как в традиционных случаях, то необходимо разработать подход, который дает возможность оперировать с полным набором искомым вариантов проектируемой машины. Для этой цели можно привлечь метод обобщенного параметрического описания, адаптированный с учетом характерных свойств исследуемого объекта. Частично это было реализовано в работах [4, 5], однако без учета возможности ударного резонанса, а, соответственно, привносимых особенностей спектра собственных частот колебаний дискретно-континуальной динамической системы. Кроме того, варьируемым, уточняемым, искомым является не только множество и значения обобщенных параметров  $p$ , но также набор частот и форм колебаний, учитываемых в критерии (46). Дело в том, что в количестве  $N_s$  частот и форм, учитываемых в контексте отстройки от ударного резонанса, следует в первую очередь учитывать резонирование на глобальных формах колебаний. Локальные формы, соответствующие критерию (46), изменяются, как правило, путем целенаправленного изменения конструктивного исполнения или параметров соответствующих элементов, возбуждаемых на той или иной частоте. На массово-инерционных свойствах характеристиках такое варьирование сказывается незначительно, и ограничения (50) приближенно соблюдаются. Также при этом можно учесть влияние сил трения, оказывающее различное влияние на разных частотах на амплитудно-частотную характеристику исследуемой системы.

Таким образом, рассматривая множество обобщенных параметров ВМ и вычлняя отдельные из них,

можно записать комплекс требований к составу этого множества и способу описания объекта:

- 1) однозначность, бесконфликтность и конструктивность описания;
- 2) сохранение свойств 1) при варьировании отдельных обобщенных параметров или отдельного их подмножества.

В связи с условиями 1), 2) множество обобщенных параметров для того или иного объекта можно пополнять, изменять, разбивать на подмножества, то есть оперировать формально так же, как и с традиционными численными параметрами. Таким образом, получаемый алгоритм описания может быть встроены в процесс идентификации объекта варьируемой структуры и с варьируемыми параметрами.

4. *Алгоритмы поиска рациональных параметров.* Способ обобщенного параметрического описания, привлекаемый для решения задачи синтеза корпусов вибромашин, дает возможность применять, а также адаптировать для поиска рациональных решений традиционные алгоритмы. В частности, для применения методов нулевого порядка, требующих вычисления только значений самой критериальной функции, необходимо только адаптировать способ варьирования обобщенных параметров. Методы высших порядков требуют адаптации понятия производных от критериальной функции по обобщенным параметрам. Это является сдерживающим фактором для их применения в данном случае. Кроме того, обобщенные нечисловые параметры не имеют механизма определения соразмерности с числовыми параметрами. В связи с этим в работе был создан алгоритм, учитывающий особенности исследуемого объекта.

В частности, из множества варьируемых параметров вычлняется подмножество тех параметров, которые оказывают наиболее значительное влияние на изменение критериальной функции. Для этого можно использовать критерий чувствительности.

$$\bar{V}_i = (\Delta I / I) / [(\Delta m(\Delta p_i) / m)], \quad (52)$$

который можно трактовать как скорость изменения функционала (критерия качества, критериальной функции) при варьировании некоторого параметра  $p_i$  и, соответственно, массы машины. Преимущество предложенного критерия в том, что здесь вводится числовая мера – "посредник" для параметров  $p_i$  (в том числе и нечисловых), а, значит, и для оценки степени влияния их изменения на такую важную величину как масса машины. А уже путем варьирования  $p_i$  (с некоторым шагом  $\Delta p_i$ , который для нечисловой величины формализовать достаточно сложно) можно по приближенной формуле (52) вычислить чувствительность максимизируемого (минимизируемого) функционала  $I$  к варьированию  $p_i$ . Тогда, вычисляя отдельные параметры, оказывающие наибольшее влияние на поведение целевой функции, можно уточнить параметрическое пространство  $p$ , в котором будет проводиться поиск рационального решения.

Коль скоро в число обобщенных параметров про-

странства  $p^*$  могут попасть нечисловые  $p_i$ , то сразу возникает проблема описания конструктивных решений машин, этим параметрам соответствующих, а также, что еще более важно, механизма варьирования и самих параметров, и зависящих от них вариантов конструктивных решений. Эта задача является трудноформализуемой для общего случая. В то же время, привлекая подход, основанный на обобщенном параметрическом описании конкретного класса вибромашин, данную задачу можно решить с привлечением технологии "черного ящика". Для этого требуется создание двух моделей, реализующих функции варьирования обобщенных параметров  $p_i$ , с одной стороны, и генерирования конструктивных вариантов ВМ по заданным значениям множества параметров, с другой. Таким образом, удастся разделить задачу на две подзадачи, которые удобно решать именно для конкретных машин или их классов, опираясь на проектный опыт, который накоплен для этих объектов. Тогда путь генерирования моделей машин и обоснования их параметров выглядит следующим образом:

1) определение чувствительности критерия качества к варьированию параметров (см. (52)) и формирование пространства значимых варьируемых параметров  $p^*$ ;

2) задание текущего (или начального) набора обобщенных параметров  $p_i$ ;

3) формирование описание конструктивного исполнения проектируемой машины по текущему набору параметров;

4) построение расчетных схем исследуемой ВМ;

5) определение динамических характеристик исследуемого объекта и вычисление соответствующей функции качества;

6) варьирование обобщенных параметров с повторением этапов 2) – 5);

7) вычисление целенаправленного изменения обобщенных параметров  $p_i$ , минимизирующих (максимизирующих) функции качества;

8) повторение этапов 6), 7) до достижения экстремума целевой функции с задаваемой заранее точностью;

9) формирование выходного набора рациональных параметров  $p_i^*$  и проведение проверочного расчета проектируемой машины.

В частности, учитывая специфические особенности виброударных выбивных машин, для итерационного уточнения их параметров можно применить метод покоординатного спуска:

$$p_k^{(q)} = p_k^{(q-1)} + \Delta p_k^{(q)}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad q = 1, 2, \dots \quad (53)$$

Здесь для числовых параметров приращение  $\Delta p_k^{(q)}$  определяется из условия экстремума целевой функции в направлении координаты (параметра)  $p_k$ :

$$\Delta p_k^{(q)} = \arg \min(\max) \left( I(p^{(q)} + \Delta p_k^{(q)}) \right), \quad (54)$$

то есть в непрерывном случае:

$$\frac{\partial I(p_k)}{\partial p_k} = 0. \quad (55)$$

Для случая дискретного изменения  $p_k$  (например, толщины листов силовой структуры) можно применять или напрямую условие (54), имея в виду дискретность варьирования  $p_k$ , или проводить изменение  $p_k$  на величину соответствующей дискреты (например, исходя из сортамента прокатных листов). Для случая нечисловых параметров варьируемым, например, может быть номер варианта конструктивного исполнения, соответствующего тому или иному параметру.

Таким образом, в целом, сочетая различные алгоритмы варьирования параметров, в ходе итерационной процедуры можно определить тот их набор, который удовлетворяет критерию минимальности (максимальности) функционала  $I(p)$ .

Нужно заметить, что для реальных конструкций необходимо сочетать различные методы поиска рациональных проектных решений. Это вызвано тем, что минимизируемая (максимизируемая) функция качества может иметь множество локальных экстремумов, оврагов и других особенностей, затрудняющих применение простых алгоритмов. Можно предложить комбинированный подход: начальное приближение ищется на грубой сетке, набрасываемой на множество параметров, а затем с применением других алгоритмов (например, упомянутого выше покоординатного спуска) находить последующие улучшенные решения. Естественно, что в таком случае получаем не оптимальное (наилучшее), а некоторое рациональное решение. Однако для практики такое решение представляет большой интерес.

5. *Параметрический анализ.* Во многих случаях требуется не просто поиск рациональных решений при проектировании виброударных машин, а достаточно подробный параметрический анализ. Он состоит в том, что при варьировании тех или иных параметров исследуется реакция элементов машины на это их изменение. Набор этих параметров сильно зависит от специфики условий ее работы и технологических ограничений на ее изготовление. Поэтому рассмотрим процесс выбора параметров на конкретном примере. Исследуется модель корпуса виброударной машины, представленная на рис.43.

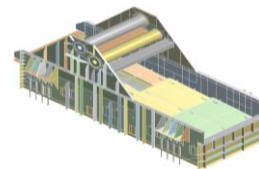


Рис. 43 – Геометрическая модель корпуса ВМ

В этой модели варьируемой могут быть толщина листов корпуса, его структура, свойства материала, распределение материала технологического груза по металлоконструкции после частичного его разрушения. Из всего разнообразия исследуемых параметров на первом этапе выделим два:  $p_1 = h/h_0$ ,  $p_2 = (\gamma - \gamma_0)/\gamma_0$ . Здесь  $p_1$  – относительная толщина элементов корпуса,  $h$  – текущая толщина,  $h_0$  – базовая (начальная) толщина;  $p_2$  – относительная часть присоединенного материала с плотностью  $\gamma$ ;  $\gamma_0$  – плотность

материала корпуса машины. Тогда, создав первоначальную модель, можно варьировать  $p_1$  и  $p_2$ , и после решения задачи (49) получить искомые зависимости:  $\omega_j = \omega_j(p_1, p_2)$ .

Полученные поверхности отклика позволяют определить в пространстве варьируемых параметров те области, в которых удовлетворяются требования (32), (33), и, соответственно, руководствуясь конструктивными, технологическими и экономическими соображениями, окончательно определить параметры проектируемой машины.

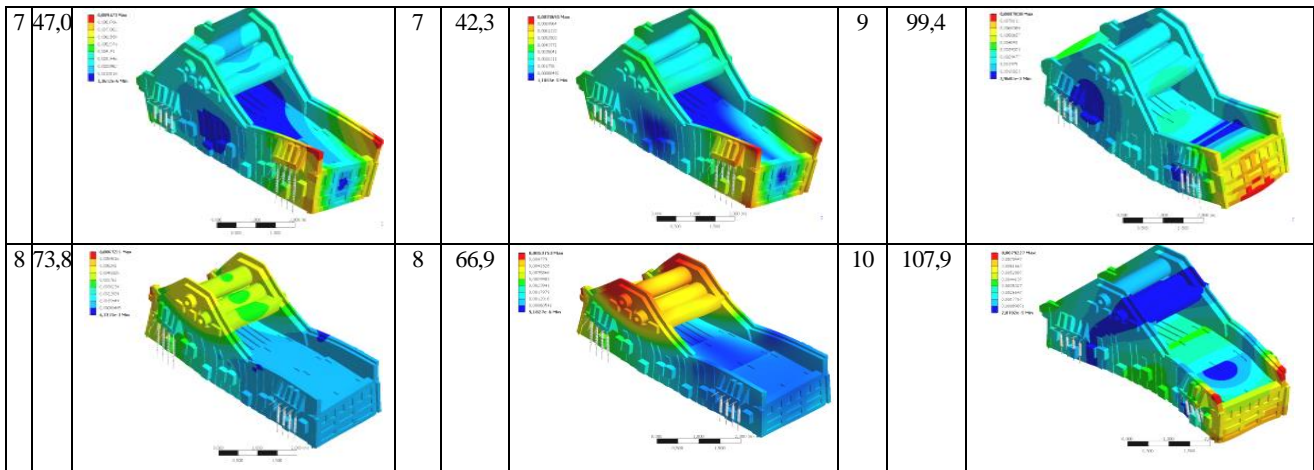
**Результаты расчета на примере вибрационной машины с дебалансным приводом**

Базовая модель ВМ имеет параметры: масса

15960 кг, материал – сталь 09Г2С, длина 5800 мм, ширина 2000 мм. Варьируемые параметры  $p_1, p_2$  меняются в пределах  $p_1 \in [0,1; 10]$ ;  $p_2 \in [0; 5]$ . При этом существенно меняются спектры их собственных колебаний (рис. 44-47). В табл. 3 приведены изменения частот и деформационных форм колебаний, выявленные при варьировании параметров  $p_1$  и  $p_2$ . Поскольку нижняя деформационная частота, как указывалось выше, является обычно первой после трансляционных (их 6 по числу степеней свободы корпуса как твердого тела), то ее номер 7 в общем спектре частот, однако для очень тонкостенных конструкций нижние деформационные частоты появляются ниже в общем спектре конструкции, чем трансляционные (см. табл. 3).

Таблица 3 – "Деформационные" частоты и формы колебаний конструкции корпуса выбивной машины

№ формы	Частота, Гц	Форма колебаний	№ формы	Частота, Гц	Форма колебаний	№ формы	Частота, Гц	Форма колебаний
1	4,6		1	3,0		7	22,0	
2	5,6		2	4,8		8	26,6	
3	6,4		3	5,2		9	38,0	
4	6,7		4	6,0		10	39,3	
$p_1 = 10; p_2 = 0$			$p_1 = 10; p_2 = 5$			$p_1 = 10; p_2 = 0$		



Окончание табл. 3

№ формы	Частота, Гц	Форма колебаний	№ формы	Частота, Гц	Форма колебаний
$p_1 = 10; p_2 = 5$					
9	79,6		10	89,4	

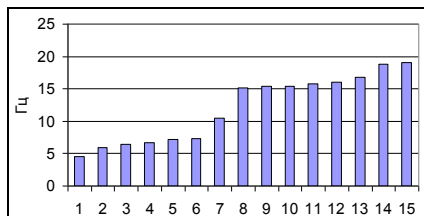


Рис. 44 – Спектр колебаний при  $p_1 = 0,1; p_2 = 0$

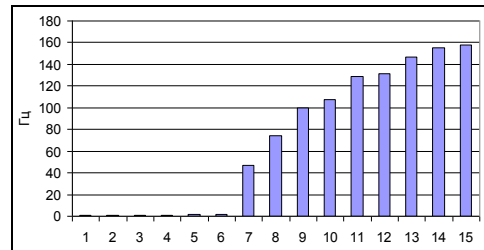


Рис. 47 – Спектр колебаний при  $p_1 = 10; p_2 = 0$

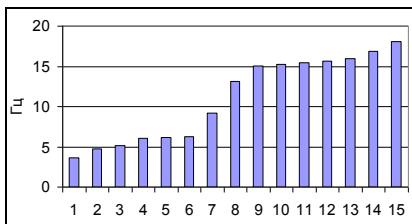


Рис. 45 – Спектр колебаний при  $p_1 = 0,1; p_2 = 5$

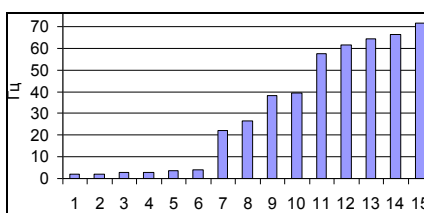


Рис. 46 – Спектр колебаний при  $p_1 = 5; p_2 = 2,5$

На рис. 48 изображены зависимости нижней деформационной частоты от варьируемых параметров.

Таким образом, продемонстрированы возможности анализа физических эффектов при изменении параметров проектируемой машины, что очень важно для принятия окончательных взвешенных решений.

В целом намеченный в работе комплекс шагов и этапов определяет только общий алгоритм действий. Он требует конкретизации применительно к той или иной конструкции вибромашины, с учетом различных условий их работы, свойств технологического груза и материалов, используемых для изготовления силовых элементов машин. В данном случае конкретная реализация предложенных алгоритмов осуществлена на примере виброударных машин для извлечения отливок крупного вагонного литья (элементы тележек железнодорожных вагонов) из песчано-глинистых форм.

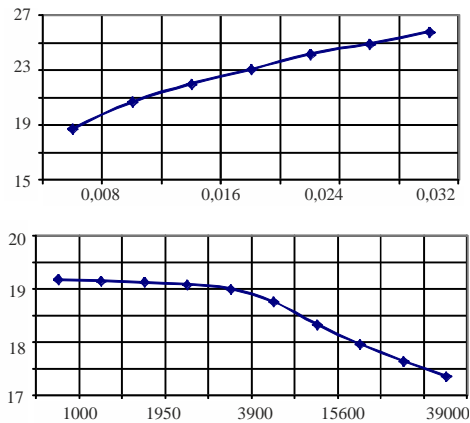


Рис. 48 – Зависимости  $\omega_1^D(p_1, p_2)$   
(нижняя деформационная частота)

### Заклучение

В работе предложен новый подход и усовершенствована математическая модель как основа обоснования проектных решений и конструктивных параметров виброударных машин с учетом недопущения ударного резонанса на высших частотах собственных колебаний.

При этом получены следующие новые результаты.

1. На примере модельных динамических систем с различным конечным числом степеней свободы установлено, что в данных системах наблюдается ударный резонанс на собственных частотах, кратных возмущающей частоте, причем для обнаружения резонансных режимов можно применять и аналитические, и численные методы. При этом наибольшая амплитуда колебаний соответствует совпадению частот, а для более высоких частот амплитуда монотонно уменьшается с ростом частоты (и при сохранении импульса силы единичного ударного воздействия). Влияние вязкого трения соответствует случаю обычного резонанса: чем

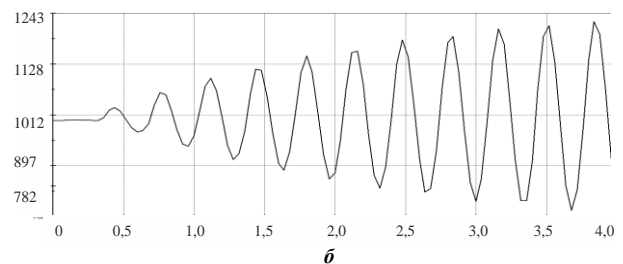
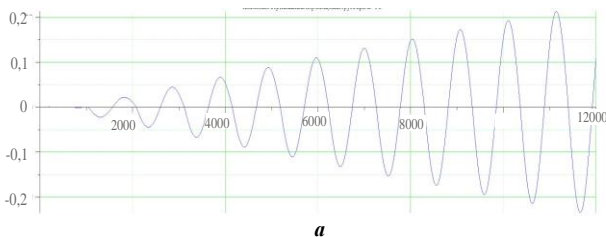


Рис. 49. Сравнительные картины временных распределений перемещений в виброударной системе в различных программных комплексах: а – Maple (смещение тела из исходного положения, м), б – Cosmos (длина упругого элемента, мм)

5. В ходе сопоставления аналитических и численных решений установлено полное качественное и удовлетворительное количественное соответствие получаемых результатов численного интегрирования динамических процессов в виброударных системах. В частности, получаем практически идентичные временные распределения перемещений в различных программных комплексах (рис. 49, по оси абсцисс – время в различных единицах, но на одном интервале). Это дает возможность применять в дальнейшем любой из удобных инструментов исследования.

Таким образом, для проектных расчетов крупногабаритных тяжело нагруженных виброударных машин разработан усовершенствованный подход к обоснова-

нию их параметров, учитывающий возможность явления ударного резонанса в элементах проектируемой машины. Это дает возможность перейти в дальнейшем к построению на этой основе параметрических численных моделей и программных средств, реализующих описанную математическую модель.

2. Математическая модель ударного резонанса распространена с дискретных на дискретно-континуальные динамические системы, что дает возможность учесть деформационные формы колебаний силовых элементов виброударных машин как упруго-деформируемых составных их элементов. Это отличает данную модель от традиционных математических моделей для одномассовых систем или систем с конечным числом степеней свободы.

3. Предложена математическая модель для определения напряженно-деформированного состояния силовых элементов виброударных машин при действии импульсных нагрузок, отличающаяся учетом действия на них сил ударного взаимодействия, вычисляемых по уточненным соотношениям, которые определены в ходе расчетно-экспериментальных исследований виброударных машин данного типа.

4. Для обоснования параметров виброударных машин разработана адаптация метода обобщенного параметрического описания элементов проектируемой машины, включая конструктивные схемы усиления. Это отличает данный подход от традиционных, в которых варьируемыми являются только обычные числовые параметры. Кроме того, впервые предложен вид целевой функции для обоснования проектных параметров машины, обеспечивающих отстройку от ударного резонанса.

### Список литературы

1. Горский А.И. Расчет машин и механизмов автоматических линий литейного производства / А.И. Горский. – М. Машиностроение, 1978. – 552 с.
2. Schiehlen W. Multibody dynamics in computational mechanics and engineering applications / W. Schiehlen, N. Guse, R. Seifried // Comput. Methods Appl. Mech. Engng. – 2006. – pp. 5509-5522.
3. Pogorelov D. Some developments in computational techniques in

modeling advanced mechanical systems / **D. Pogorelov** // D. H. van Campen (ed.). Interaction between Dynamics and Control in Advanced Mechanical Systems / Proc. IUTAM Symp. Eindhoven. – Dordrecht : Kluwer Acad. Publ, 1997. – pp. 313

4. **Грабовский А.В.** Ударное взаимодействие и динамические процессы в виброударных машинах с частичным разрушением технологического груза: дис. кандидата техн. наук: 05.02.09 / **Грабовский Андрей Владимирович**. – Харьков, 2010. – 181 с.

5. **Барчан Є.М.** Удосконалення методів розрахунку та конструкції вибивної транспортувальної машини для формувальних ліній крупного литва : дис. канд. техн. наук : 05.02.02 / **Барчан Євген Миколайович**. – Маріуполь. – 2008. – 178 с.

6. **Grabovskiy A.V.** An approach to identification of impact interaction model for a vibroimpact system / **N.N. Tkachuk, A.V. Grabovskiy, N.A. Tkachuk** / The Third Conference Nonlinear Dynamics. – Харьков: ООО "ЭДЕНА". – 2010. – С. 207-212.

7. **Назаренко І.І.** Критерії оцінювання ефективності роботи резонансного вібраційного грохота / **І.І. Назаренко, С.В. Орищенко** // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні. – Львів: Вид-во Львівської політехніки, 2011. – № 45. – С. 217-221.

8. **Костенко Ю.В.** Анализ параметров динамических процессов в виброударных машинах с изменяющимися массово-жесткостными характеристиками: дис. кандидата техн. наук: 05.02.09 / **Костенко Юрий Викторович**. – Харьков, 2016. – 193 с.

9. **Kostenko Yu.V.** Subharmonic modes in vibroimpact systems / **Yuri Kostenko, Mykola M.Tkachuk, Andrey Grabovsky, Mykola A.Tkachuk** / The Third Conference Nonlinear Dynamics. – Харьков: ООО "ЭДЕНА", 2010. – С. 207-212.

10. **Mykola M. Tkachuk** Parameter analysis of vibroimpact machines dynamics with variable mass and stiffness / **Mykola M. Tkachuk, Iurii Kostenko, Andriy Grabovsky, Mykola A. Tkachuk** // Scientific Conferences of Ukraine, 5th International Conference on Nonlinear Dynamics ND-KhPI2016. – Харьков: ООО "ЭДЕНА", 2010.

#### Bibliography (transliterated)

1. **Gorskiy A.I.** Raschet mashin i mehanizmov avtomaticheskikh liniy litejnogo proizvodstva / **A.I. Gorskiy**. – Moscow. Mashinostroenie, 1978. – 552 p.

2. **Schiehlen W.** Multibody dynamics in computational mechanics

and engineering applications / **W.Schiehlen, N. Guse, R. Seifried** // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 2006. – pp. 5509-5522.

3. **Pogorelov D.** Some developments in computational techniques in modeling advanced mechanical systems / **D. Pogorelov** // D. H. van Campen (ed.). Interaction between Dynamics and Control in Advanced Mechanical Systems / Proc. IUTAM Symp. Eindhoven. – Dordrecht : Kluwer Acad. Publ, 1997. – 313 p.

4. **Grabovskiy A.V.** Udamoe vzaimodejstvie i dinamicheskie processy v vibroudarnykh mashinakh s chastichnym razrusheniem tehnologicheskogo gruzha: dis. kandidata teh. nauk: 05.02.09 / **Grabovskiy Andrej Vladimirovich**. – Kharkiv, 2010. – 181 p.

5. **Barchan Ye. M.** Udokonalennya metodiv rozrakhunku ta konstruktsiyi vybyvnoyi transportuyuchoyi mashyny dlya formuvalnykh liniy krupnogo lytva : dys. kand. tekhn. nauk : 05.02.02 / **Barchan Yevhen Mykolayovych**. – Mariupol'. – 2008. – 178 p.

6. **Grabovskiy A.V.** An approach to identification of impact interaction model for a vibroimpact system / **N.N. Tkachuk, A.V. Grabovskiy, N.A. Tkachuk** / The Third Conference Nonlinear Dynamics. – Kharkiv: ООО "EDENA". – 2010. – P. 207-212.

7. **Nazarenko I.I.** Kriteriyi otsinyuvannya efektyvnosti roboty rezonansnoho vibratsiynoho hrokhota / **I.I. Nazarenko, S.V. Oryshchenko** // Avtomatyzatsiya vyrobnychyykh protsesiv u mashynobuduvanni ta prylobuduvanni. – L'viv: Vyd-vo L'vivskoyi politekhniki, 2011. – No 45. – P. 217-221.

8. **Kostenko Ju.V.** Analiz parametrov dinamicheskikh processov v vibroudarnykh mashinakh s izmenyayushhimisya massovo-zhestkostnyimi harakteristikami: dis. kandidata teh. nauk: 05.02.09 / **Kostenko Jurij Viktorovich**. – Kharkiv, 2016. – 193 p.

9. **Kostenko Yu.V.** Subharmonic modes in vibroimpact systems // **Yuri Kostenko, Mykola M.Tkachuk, Andrey Grabovsky, Mykola A.Tkachuk** / The Third Conference Nonlinear Dynamics. – Kharkiv: ООО "EDENA", 2010. – P. 207-212.

10. **Mykola M. Tkachuk** Parameter analysis of vibroimpact machines dynamics with variable mass and stiffness / **Mykola M. Tkachuk, Iurii Kostenko, Andriy Grabovsky, Mykola A. Tkachuk** // Scientific Conferences of Ukraine, 5th International Conference on Nonlinear Dynamics ND-KhPI2016. – Kharkiv: ООО "EDENA", 2016.

Поступила (received) 17.10.2016

#### Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Математическое и численное моделирование динамических процессов в виброударных машинах и обоснование их рациональных параметров / **И.В. Артемов, Е.Н. Барчан, Я.Н. Лисовол, А.В. Грабовский, Ю.В. Костенко, В.И. Сериков, А.В. Бондаренко, М.С. Ревунов, Р.В. Красиков, Е.А. Лунев** // Вестник НТУ "ХПИ". Серия: Машиноведение и САПР. – Харьков: НТУ "ХПИ", 2016. – № 39(1211). – С. 3-26. – Библиогр.: 10 назв.– ISSN 2079-0775.

Математичне і чисельне моделювання динамічних процесів в віброударних машинах і обґрунтування їх раціональних параметрів / **І.В. Артемов, Є.М. Барчан, Я.М. Лисовол, А.В. Грабовський, Ю.В. Костенко, В.І. Сериков, О.В. Бондаренко, М.С. Ревунов, Р.В. Красиков, Є.О. Луньов** // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Машинознавство та САПР. – Харків: НТУ "ХПІ", 2016. – № 39(1211). – С. 3-26. – Бібліогр. 10 назв. – SSN 2079-0775.

Mathematical and numerical modeling of dynamics of vibroimpact machines and determination of their rational parameters / **I.V. Artemov, Y.M. Barhan, Ya.M. Lisovol, A.V. Grabowski, Y.V. Kostenko, V.I. Sierykov, O.V. Bondarenko, M.S. Revunov, R.V. Krasikov, Ye.O. Lunyov** // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Machines and CAD. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2016. – No 39 (1211). – P. 3-26. – ISSN 2079-0775.

#### Відомості про авторів / About the Authors

**Барчан Євген Миколайович** – кандидат технічних наук, Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут", кафедра "Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин", м. Харків; тел.: (057) 707-69-01 ; e mail :

**Barhan Eugene** – candidate of Technical Sciences (Ph. D.), National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", the department "The theory and computer aided design of mechanisms and machines", Kharkiv, phone: +38 (057) 707-69-01; e-mail:

**Лисовол Яна Миколаївна** – викладач–стажист, НТУ "ХПІ", кафедра "Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин", м. Харків; тел.: (057) 707-69-01 ; e mail : [yana.lisovol@yandex.ru](mailto:yana.lisovol@yandex.ru).

**Lisovol Yana** – teacher–stazhist, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", the department "The theory and computer aided design of mechanisms and machines", Kharkiv, phone: +38 (057) 707-69-01; e-mail: [yana.lisovol@yandex.ru](mailto:yana.lisovol@yandex.ru).

**Грабовський Андрій Володимирович** – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, НТУ "ХПІ", старший науковий співробітник кафедри "Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин"; тел.: (057)7076166; e-mail: [andrej8383@gmail.com](mailto:andrej8383@gmail.com)

**Grabovskiy Andrey** – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), NTU "KhPI", Senior Researcher of Theory and Systems of Mechanisms and Machines Automated Design Department, tel.: (057)7076166; e-mail: [andrej8383@gmail.com](mailto:andrej8383@gmail.com)

**Костенко Юрій Вікторович** – кандидат технічних наук, НТУ "ХПІ", молодший науковий співробітник кафедри "Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів та машин", Харків; тел.: (057) 707-69-01; e-mail: [kostenko.yuriy@gmail.com](mailto:kostenko.yuriy@gmail.com)



**Kostenko Yuriy** – candidate of Technical Sciences (Ph. D.), NTU "KhPI", junior researcher the department "The theory and computer aided design of mechanisms and machines", Kharkiv, phone: +38 (057) 707-69-01; e-mail: [kostenko.yuriy@gmail.com](mailto:kostenko.yuriy@gmail.com)

**Сериков Володимир Іванович** – кандидат технічних наук, доцент, НТУ "ХПІ", кафедра «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів та машин» м. Харків; тел.: (057) 707-69-01; e-mail: [serikovvi@tmm-sapr.org](mailto:serikovvi@tmm-sapr.org).

**Sterykov Volodymyr** – associate professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", the department "The theory and computer aided design of mechanisms and machines", Kharkiv, phone: +38 (057) 707-69-01; e-mail: [serikovvi@tmm-sapr.org](mailto:serikovvi@tmm-sapr.org).

**Бондаренко Олексій Вікторович** – кандидат технічних наук, НТУ "ХПІ", старший викладач кафедри "Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів та машин", м. Харків; тел.: (057) 707-69-01; e-mail: [avbondarenko@yandex.ua](mailto:avbondarenko@yandex.ua).

**Bondarenko Aleksey** – candidate of Technical Sciences (Ph. D.), National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", senior lecturer the department "The theory and computer aided design of mechanisms and machines", Kharkiv, phone: +38 (057) 707-69-01; e-mail: [avbondarenko@yandex.ua](mailto:avbondarenko@yandex.ua).

**Красіков Роман Віталійович** – НТУ "ХПІ", студент кафедри "Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин", Харків; тел.: (057) 707-69-01

**Krasikov Roman** – National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", student the department "The theory and computer aided design of mechanisms and machines", Kharkiv, phone: +38 (057) 707-69-01

**Ревунов Михайло Сергійович** – НТУ "ХПІ", студент кафедри "Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин", Харків; тел.: (057) 707-69-01

**Revunov Michael** – National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", student the department "The theory and computer aided design of mechanisms and machines", Kharkiv, phone: +38 (057) 707-69-01

**Луньов Євген Олександрович** – НТУ "ХПІ", здобувач кафедри "Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин", Харків;

**Lunyov Eugene** – National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", applicant the department "The theory and computer aided design of mechanisms and machines", Kharkiv, phone: +38 (057) 707-69-01