

УДК 621.833+621.85

А. И. ПАВЛОВ, С. В. АНДРИЕНКО, Р. В. ПРОТАСОВ, А. В. УСТИНЕНКО, И. П. ГРЕЧКА**СИНТЕЗ ЗУБЧАТЫХ И ЦЕПНЫХ ВТУЛОЧНЫХ ПЕРЕДАЧ С ЭВОЛЮТНЫМ ПРОФИЛЕМ**

У статті розглянуто побудову Бобіль'є, яка полягає в заміні зубчастого механізму еквівалентним шарнірно-важільним. На її основі запропоновано спосіб знаходження робочого профілю зубців колеса зубчастої передачі або зірочки ланцюгової передачі. Перевага цього способу полягає в можливості управляти якісними показниками ланцюгового зачеплення на етапі синтезу. Виконано чисельне рішення задачі синтезу інтегруванням диференціального рівняння, яке описує профіль зуба колеса або зірочки: а) наближене у вигляді полінома за допомогою програмного комплексу Vissim; б) чисельне методом Рунге-Кутта.

Ключові слова: еволютне зачеплення, зубчаста передача, ланцюгова передача, зуб, зірочка, побудова Бобіль'є, синтез.

В статье рассмотрено построение Бобилье, которое заключается в замене зубчатого механизма эквивалентным шарнирно-рычажным. На его основе предложен способ нахождения рабочего профиля зубьев колеса зубчатой передачи или звездочки цепной передачи. Преимущество этого способа заключается в возможности управлять качественными показателями цепного зацепления на этапе синтеза. Выполнено решение задачи синтеза интегрированием дифференциального уравнения, которое описывает профиль зуба колеса или звездочки: а) приближенное в виде полинома с помощью программного комплекса Vissim; б) численное методом Рунге-Кутта.

Ключевые слова: эволютное зацепление, зубчатая передача, цепная передача, зуб, звездочка, построение Бобилье, синтез.

The article considers the Bobillier construction which is to replace the gear mechanism equivalent to hinge-lever mechanism. Based on it is proposed a method for finding the working tooth profile of gear or chain drive sprocket. The advantage of this method is smiling in-ability to manage quality indicators of chain mesh on a stage for the synthesis. Differential equations that describes the basic rack profile for gear or sprocket tooth profile for chain drive were obtained. The solution of the synthesis by integration of the differential equation was obtained: a) as a polynomial approximation using Vissim software; b) numerically by the Runge-Kutta method. For evolute gear rack the initial equation is transformed to a parametrical kind for its use in a method of profile normal. The working profile of a gear and sprocket tooth has been received.

Keywords: evolute mesh, gear, chain drive, tooth, sprocket, Bobillier construction, synthesis.

Введение. Актуальность задачи

Основные причины выхода из строя зубчатых передач – усталостное выкрашивание и износ активных поверхностей зубьев. Также интенсивный износ зубьев звездочек характерен для гусеничного движителя и для цепных передач с втулочными цепями без роликов при их применении в передачах сельскохозяйственных и горных машин. Как известно, выкрашивание и износ зубьев зависят от интенсивности контактных напряжений и скоростей скольжения в зацеплении. В свою очередь, контактные напряжения снижаются при увеличении приведенного радиуса кривизны ρ в зацеплении, что можно достичь применением зубьев с выпукло-вогнутым контактом. Следовательно, разработка и исследование новых зацеплений для зубчатых и цепных передач, обеспечивающих выпукло-вогнутый контакт и позволяющих снизить скорости скольжения профилей, является актуальной задачей современного машиностроения.

Постановка задачи

Одним из перспективных путей решения этой задачи является применение так называемого эволютного зацепления. Это семейство профилей для зубчатых и цепных передач с выпукло-вогнутым контактом. Оно разработано украинским ученым А. И. Павловым [1] и основано на построении Бобилье [2]. Это построение заключается в замене зубчатого зацепления эквивалентным четырехзвеным шарнирно-рычажным механизмом, исследование которого существенно упрощает задачу синтеза зацепления. Регулируя геометрические размеры механизма, можно получать передачи с различными

геометро-кинематическими свойствами. В нашем случае особое внимание следует уделить изменению приведенного радиуса кривизны ρ (основной геометрический параметр, влияющий на интенсивность контактных напряжений) и скорости относительного скольжения в зацеплении λ (оказывает основное влияние на интенсивность износа профилей зубьев).

Построение Бобилье для зубчатого и цепного зацеплений

На рис. 1 приведено построение Бобилье в общем виде для двух зубчатых колес наружного зацепления [1]. Центры радиусов кривизны контактирующих в точке P' поверхностей находятся в точках C_1 и C_2 ; P – полюс зацепления.

Касательная к рабочим поверхностям при контакте в полюсе, проведенная до пересечения с лучами из центров вращения O_1 и O_2 , дает положения мгновенного центра скоростей D шатуна C_1C_2 и определяет радиусы кривизны C_1C' и C_2C' контактирующих поверхностей. Для прямозубой передачи положение точки D может быть любым и в каждый момент времени иным. Один из важнейших параметров, позволяющий управлять геометрическими характеристиками синтезируемой передачи – коэффициент разнovidности k , определяемый по зависимости

$$k = h \sin \alpha_0,$$

где h – расстояние между полюсом зацепления P и центром вращения шатуна D заменяющего ме-

© Павлов А.И., Андриенко С.В., Протасов Р.В., Устиненко А.В., Гречка И.П., 2017

ханизма;

α_0 – угол зацепления в полюсе.

На основании построения Бобилье в работе [1] получено обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) 2-го порядка, которое описывает внешнее прямозубое зацепление с выпукло-вогнутым контактом зубьев:

$$y'' = \frac{y'(1+y'^2)}{-ky'+x} \quad (1)$$

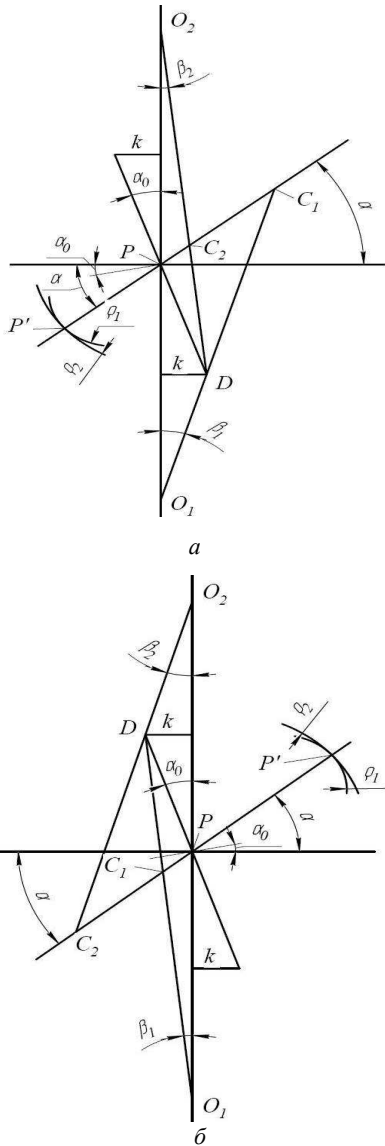


Рисунок 1 – Построение Бобилье для зубчатого зацепления:

а – дополусного; б – заплусного

$$|OP_1|=r_1; |OP_2|=r_2; |KP|=l; \rho_1=l+|PC_1|; \rho_2=l+|PC_2|$$

P' – текущая точка контакта; P – полюс зацепления; k – коэффициент разовидности; α – текущий угол зацепления; α_0 – угол зацепления в полюсе; β_1, β_2 – углы смещения

Уравнение получено в системе координат, начало которой находится в полюсе зацепления P , а оси x и y направлены соответственно вдоль и перпендикулярно межцентровой линии (трением скольжения в зацеплении пренебрегаем).

В случае цепной передачи заменим одно из

зубчатых колес цевочным и придадим цевке движение, характерное втулке цепи, с учетом фазы выстоя и условия контакта втулки с дном впадины между зубьями в этой фазе. В этом случае мы получаем построение, приведенное на рис. 2 [3]. На нем показано текущее положение, соответствующее перемещению втулки по профилю зуба до момента начала фазы выстоя.

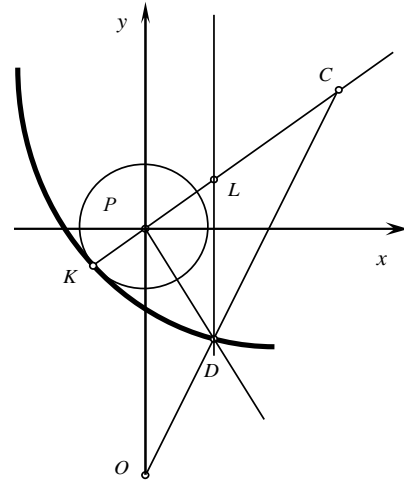


Рисунок 2 – Построение Бобилье для зацепления зуба звездочки со втулкой цепи:

K – текущая точка контакта втулки с зубом; C – центр кривизны боковой поверхности зуба;

KP – полюсное расстояние

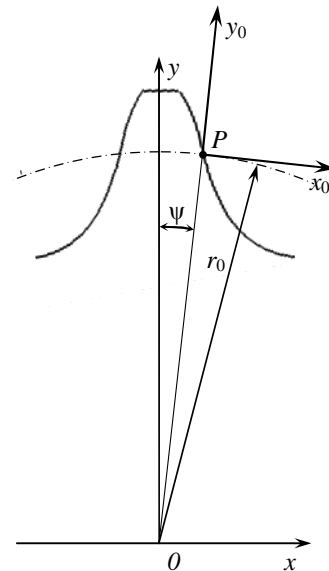


Рисунок 3 – Системы координат, применяемые при синтезе профиля зуба звездочки цепной передачи:

P – полюс зацепления;

r_0 – радиус делительной окружности

На основании этого построения в работе [3] получено следующее обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$$\frac{1+y_0'^2}{y_0''} = \frac{x_0}{y_0'} + \frac{r_0kf}{(r_0f-k)(1-Ay_0')}, \quad (2)$$

где x_0, y_0 – координаты точек профиля зуба звездочки в системе координат, центр которой совпадает с полюсом зацепления P , а ось x_0 является касательной к делительной окружности радиусом r_0 (рис. 3);

f – коэффициент трения скольжения в зацеплении;

$$A = \frac{k}{\sqrt{(r_0 - k/f)^2 + k^2}}.$$

Для удобства решения с помощью программных средств запишем ОДУ (5) в форме Коши:

$$y_0'' = \frac{y_0'(1 + y_0'^2)(r_0 f - k)(1 - A y_0')}{x_0(r_0 f - k)(1 - A y_0') + y_0' r_0 k f}. \quad (3)$$

Решение дифференциальных уравнений (1) и (3)

Решая уравнение (1), мы получаем исходный контур, от которого известными методами [2] можно перейти к профилю зуба. При решении уравнения (3) мы сразу получаем профиль зуба звездочки.

Для решения этих дифференциальных уравнений предложено два подхода.

1. Приближенное решение в виде полинома с помощью программного комплекса Vissim [1]. В качестве начальных условий использовано прохождение кривой, описывающей профиль зуба, в начальный момент зацепления через полюс зацепления. В этом случае решение имеет вид

$$y_0(x_0) = C_1 x_0 + C_2 x_0^3 + \dots + C_n x_0^n. \quad (4)$$

Преимуществом такого подхода является получение уравнения профиля зуба в явном виде, что позволяет достаточно просто профилировать зуборезный инструмент и исследовать геометро-кинематические характеристики передачи. Однако аппроксимация профиля полиномами высоких нечетных степеней (чаще всего 7-й) часто приводит к неустойчивости решения и большим отклонениям от теоретически точного профиля в приполюсной зоне (в особых точках и их окрестностях при смене знака кривизны профиля).

2. Численное решение на основе современных методов, например, Рунге-Кутта [4], может быть выполнено при помощи программных пакетов, таких как Maple и MathCAD. В этом случае решение представляет собой набор координат точек профиля зуба звездочки. Преимущество такого подхода заключается в простоте компьютерной реализации, а недостаток – в отсутствии уравнения профиля зуба, что не дает возможность напрямую исследовать характеристики зацепления. Однако этот недостаток может быть устранен двумя факторами:

– исследование контактного взаимодействия зуба и втулки целесообразно выполнять методом

конечных элементов. Для его применения вполне достаточно иметь координаты точек профиля зуба;

– при исследовании качественных показателей зацепления (кривизны профиля, скоростей скольжения, контактных давлений, интенсивности износа и т.д.) можно применить подход, предложенный в работах [5–6]. Он заключается в аппроксимации профиля сплайнами, например, кривыми Безье. В дальнейшем по этой аппроксимации можно получить значения кривизны профиля и других геометро-кинематических характеристик.

При применении системы MathCAD решение находится при помощи встроенной функции **Rkadapt**, основанной на методе Рунге-Кутта четвертого порядка с адаптивной подстройкой шага интегрирования по требуемой точности решения,

$$\mathbf{Rkadapt}(y, x_1, x_2, m, \mathbf{F}),$$

которая возвращает матрицу решений методом Рунге-Кутта с переменным шагом. Здесь y – вектор начальных условий размерности n (n – порядок ОДУ или число уравнений в системе); x_1, x_2 – начало и конец интервала интегрирования, на котором ищется решение; m – число точек (не считая начальной), в которых ищется решение; \mathbf{F} – символьный вектор, содержащий правые части уравнений.

Моделирование эволютных профилей зубьев

Ниже рассмотрим построение эволютного профиля для зубчатой передачи в случае получения решения в виде полинома (4), а для цепной передачи – в случае численного решения.

Зубчатая передача. Уравнение профиля зуба исходного контура (4) получено в относительных величинах [1], где x_0 изменяется в пределах от -1 до $+1$, см. рис. 4, а. Для удобства моделирования выполнялось его преобразование в параметрический вид (5), с заменой координатных осей на традиционные в абсолютных единицах (рис. 4, б):

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= f_1(x_0); \\ y_1 &= f_2(x_0). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Для построения профиля зуба шестерни по заданному профилю исходного контура был использован метод профильных нормалей [2].

Сопряженный профиль в системе координат x_2, y_2 , связанной с центром зубчатого колеса, получается применением уравнений перехода:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= (x_1 - a) \cos \varphi_2 + (y_1 + r_2) \sin \varphi_2; \\ y_2 &= -(x_1 - a) \sin \varphi_2 + (y_1 + r_2) \cos \varphi_2, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где r_2 – радиус центроиды (начальной окружности) колеса;

a – текущее значение поступательного перемещения рейки;

$$\varphi_2 = a / r_2.$$

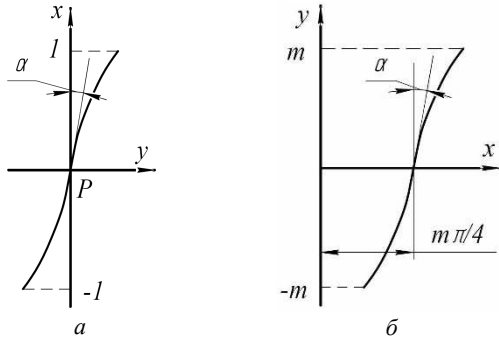


Рисунок 4 – Профиль зуба исходного контура:
а – в исходной системе координат;
б – в принятой системе координат

На рис. 5 показана синтезированная пара сопряженных зубьев со следующими основными параметрами: модуль $m = 4$ мм; угол зацепления в полюсе $\alpha_0 = 15^\circ$; числа зубьев $z_1 = 20$, $z_2 = 40$; коэффициент разновидности $k = 5$ [7].

На рис. 6 приведены варианты эволютных передач: с двусторонним (дозаполненным) и односторонним (до- или заполненным) зацеплением.

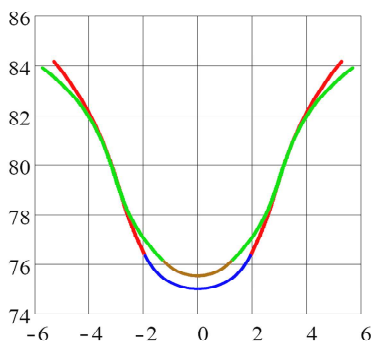


Рисунок 5 – Профили синтезированной пары зубьев с параметрами: $m = 4$ мм; $\alpha_0 = 15^\circ$; $z_1 = 20$; $z_2 = 40$; $k = 5$

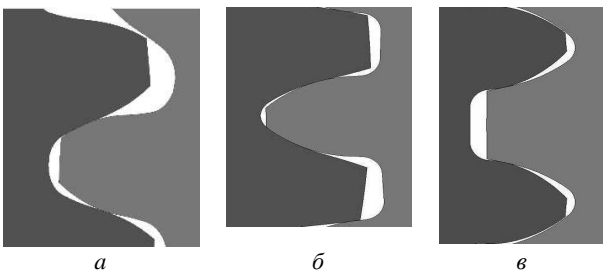


Рисунок 6 – Сопряженные профили шестерни и колеса:
а – двустороннее зацепление;
б, в – одностороннее зацепление

Цепная передача. В качестве примера на рис. 7 показан синтезированный по предложенной методике профиль зуба звездочки со следующими основными параметрами: число зубьев $z = 20$; шаг цепи $t = 25,4$ мм; коэффициент трения скольжения $f = 0,2$; коэффициент разновидности $k = -5$ [6]. Профиль построен в системе координат x, y , центр которой совпадает с центром вращения колеса, а ось y

совпадает с осью симметрии зуба (рис. 3). Координаты точек профиля рассчитываются по зависимостям

$$\begin{cases} x_j = r_0 \sin \psi + x_{0j} \cos \psi + y_{0j} \sin \psi; \\ y_j = r_0 \cos \psi - x_{0j} \sin \psi + y_{0j} \cos \psi, \end{cases} \quad (7)$$

где ψ – центральный угол, соответствующий половине толщины зуба по дуге делительной окружности;
 $j = 1, 2, \dots, n$ (n – задаваемое нами количество расчетных точек профиля).

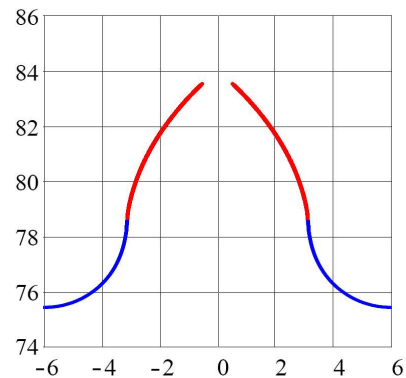


Рис. 7 – Профиль синтезированного зуба звездочки цепной передачи с параметрами:
шаг цепи $t = 25,4$ мм; $z = 20$; $k = -5$

Выводы

1. Эволютное зацепление с выпукло-вогнутым контактом позволяет повысить нагрузочную способность зубчатых и цепных передач по критериям контактной выносливости и износостойкости.

2. Выполнен синтез профилей эволютного зубчатого и цепного зацеплений на основе построения Бобилье, которое позволяет получать передачи с требуемыми геометро-кинематическими свойствами.

3. Получено решение разрешающих дифференциальных уравнений, полученных на основе построения Бобилье, двумя способами:

- приближенное в виде полинома с помощью программного комплекса Vissim;
- численное методом Рунге-Кутты в системе MathCAD.

Список литературы

1. Павлов А. И. Современная теория зубчатых зацеплений / Павлов А. И. – Х.: ХНАДУ, 2005. – 100 с.
2. Литвин Ф.Л. Теория зубчатых зацеплений/ Литвин Ф.Л. – М.: Наука, 1968. – 584 с.
3. Андриенко С. В. Численное решение задачи синтеза профиля зуба звездочки цепной втулочно-роликовой передачи / Андриенко С. В., Устиненко А. В., Протасов Р. В. // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Проблеми механічного приводу. – Х.: НТУ "ХПІ", 2014. – № 31 (1074). – С. 11–15.
4. Турчак Л.И. Основы численных методов / Турчак Л.И., Плотников П.В. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002 – 304 с.
5. Воронцов Б. С. Интерактивное управление синтезом зубчатых передач / Воронцов Б. С. // Вестник НТУ "ХПІ": Тем.

- вып.: Проблемы механического привода. – X. : НТУ "ХПИ", 2005. – № 40. – С. 182–187.
6. **Андриенко С. В.** Численное моделирование профиля зуба звездочки цепной передачи / **Андриенко С. В., Устиненко А. В., Воронцов Б. С.** // Механіка та машинобудування. – X. : НТУ "ХПИ", 2014. – № 1. – С. 11–17.
 7. **Протасов Р. В.** Построение рабочих профилей зубьев эволютных передач / **Протасов Р. В., Устиненко А. В.** // Вестник НТУ "ХПИ": Тем. вып.: Машиноведение и САПР. – X. : НТУ "ХПИ", 2010. – № 19. – С. 124–128.

References (transliterated)

1. **Pavlov A. I.** Sovremennaya teoriya zubchatikh zacepleniij / **Pavlov A. I.** – Kharkov, KhNADU, 2005. – 100 p.
2. **Litvin F. L.** Teoriya zubchatikh zacepleniij / **Litvin F. L.** – Moscow: Nauka, 1968. – 584 p.
3. **Andrienko S. V.** Chislennoe reshenie zadachi sinteza profilja zuba zvezdochki cepnoj vtulochno-rolikovoij peredachi / **Andrienko S. V., Ustinenko A. V., Protasov R. V.** // Visnik NTU

- "KhPI". Serija: Problemy mehanichnogo privodu – Kharkiv, NTU "KhPI", 2014. – No. 31 (1074). – P. 10–15.
4. **Turchak L. I.** Osnovi chislennikh metodov. / **Turchak L. I., Plotnikov P. V.** – Moskov: FIZMATLIT, 2002. – 304 p.
 5. **Vorotsov B. S.** Interaktivnoe upravlenie sintezom zubchatikh peredach / **Vorotsov B. S.** // Visnik NTU "KhPI". Serija: Problemy mehanichnogo privodu. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2005. – No 40. – P. 182–187.
 6. **Andrienko S. V.** Chislennoe modelirovanie profilja zuba zvezdochki cepnoj peredachi / **Andrienko S. V., Ustinenko A. V., Vorontsov B. S.** // Mekhanika ta mashinobuduvannya. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2014. – No 1. – P. 11–17.
 7. **Protasov R. V.** Postroenie rabochikh profilej zub'ev evolutnix peredach / **Protasov R. V., Ustinenko A. V.** // Vestnik NTU "KhPI". Vyp.: Mashinovedenie i SAPR. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2010. – No 10. – P. 124–128.

Поступила (received) 01.02.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Синтез зубчатих та ланцюгових втулкових передач з еволютним профілем / А. І. Павлов, С. В. Андриєнко, Р. В. Протасов, О. В. Устиненко, І. П. Гречка // Вісник НТУ "ХПИ". Серія: Машинознавство та САПР. – Харків: НТУ "ХПИ", 2017. – № 12 (1234). – С. 76–80. – Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2079-0775.

Синтез зубчатых и цепных втулочных передач с эволютным профилем / А. И. Павлов, С. В. Андриенко, Р. В. Протасов, А. В. Устиненко, И. П. Гречка // Вестник НТУ "ХПИ". Серія: Машиноведение и САПР. – Харьков: НТУ "ХПИ", 2017. – № 12 (1234). – С. 76–80. – Библиогр.: 7 назв. – ISSN 2079-0775.

Synthesis of gear and bushing chain drive with evolute profile / A. I. Pavlov, S. V. Andrienko, R. V. Protasov, A. V. Ustinenko, I. P. Grechka // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Engineering and CAD. – Kharkiv : NTU "KhPI", 2017. – No 12 (1234). – P. 76–80. – ISSN 2079-0775.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Андриєнко Сергій Володимирович – Харківський національний автомобільно-дорожній університет, викладач кафедри інженерної та комп'ютерної графіки; тел.: (057) 707-37-24; e-mail: andrisergejj@rambler.ru.

Андриєнко Сергій Владимирович – Харківський національний автомобільно-дорожній університет, преподаватель кафедри інженерної та комп'ютерної графіки; тел.: (057) 707-37-24; e-mail: andrisergejj@rambler.ru.

Андриєнко Сергій Владимирович – Kharkov National Automobile and Highway University, Lecturer at the Department of engineering and computer graphics; tel.: (057) 707-37-24; e-mail: andrisergejj@rambler.ru.

Протасов Роман Васильович – НТУ "ХПИ", старший викладач кафедри теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин; тел.: (057) 707-64-78; e-mail: protasov@tmm-sapr.org.

Протасов Роман Васильевич – НТУ "ХПИ", старший преподаватель кафедри теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин; тел.: (057) 707-64-78; e-mail: protasov@tmm-sapr.org.

Протасов Роман Васильевич – NTU "KhPI", Senior Lecturer of Theory and Systems of Mechanisms and Machines Automated Design Department; tel.: (057) 707-64-78; e-mail: protasov@tmm-sapr.org.

Устиненко Олександр Віталійович – кандидат технічних наук, доцент, старший науковий співробітник, НТУ "ХПИ", професор кафедри теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин; тел.: (057) 707-64-78; e-mail: ustin1964@tmm-sapr.org.

Устиненко Олександр Віталіевич – кандидат технических наук, доцент, старший научный сотрудник, НТУ "ХПИ", профессор кафедры теории и систем автоматизированного проектирования механизмов и машин; тел.: (057) 707-64-78; e-mail: ustin1964@tmm-sapr.org.

Устиненко Александр Витальевич – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Docent, SRF, NTU "KhPI", Professor of Theory and Systems of Mechanisms and Machines Automated Design Department; tel.: (057) 707-64-78; e-mail: ustin1964@tmm-sapr.org.

Гречка Ірина Павлівна – кандидат технічних наук, НТУ "ХПИ", доцент кафедри теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин; тел. (057) 707-69-01; e-mail: Iri-@mail.ru.

Гречка Ірина Павлівна – кандидат технических наук, НТУ "ХПИ", доцент кафедри теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин; тел.: (057) 707-69-01; e-mail: Iri-@mail.ru.

Grechka Iryna Pavlivna – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), NTU "KhPI", Associate Professor of Theory and Systems of Mechanisms and Machines Automated Design Department; tel.: (057) 707-69-01; e-mail: Iri-@mail.ru.