

УДК 621.833

**Д.А. ФЕДИН, Б.В. ВИНОГРАДОВ****О РЕЗОНАНСНЫХ РЕЖИМАХ РАБОТЫ ОТКРЫТЫХ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ БАРАБАННЫХ МЕЛЬНИЦ**

Приведено літературний огляд математичних моделей динаміки зубчастих передач з урахуванням змінної жорсткості та кінематичної похибки зацеплення. З використанням методу скінченних елементів проведено інженерний аналіз характеру зміни жорсткості зубчастої передачі барабанного млина. Запропоновано математичну модель динаміки зубчастої передачі барабанного млина, яка враховує характер зміни жорсткості та кінематичної похибки зацеплення. Визначено межі виникнення параметричного та силового резонанса.

**Ключові слова:** зубчаста передача, барабанний млин, коливання, параметричний резонанс.

Приведен литературный обзор математических моделей динамики зубчатых передач с учетом переменной жесткости и кинематической погрешности зацепления. С использованием метода конечных элементов проведен инженерный анализ характера изменения жесткости зубчатой передачи барабанной мельницы. Предложена математическая модель динамики открытой зубчатой передачи барабанной мельницы с учетом переменной жесткости и кинематической погрешности зацепления. Определены области возникновения параметрического и силового резонанса.

**Ключевые слова:** зубчатая передача, барабанная мельница, колебания, параметрический резонанс.

The aim of the study is the creation of mathematical model of tumbling mill open gearing which taking into account parametric and kinematic excitation of vibration and analysis of resonance mode of tumbling mill gearing work. Analytical review of resented work in the field of mathematical models of gearings is done. Investigation of stiffness variation of tumbling mill gearing using finite elements analysis is carried out. Mathematical model of tumbling mill open gearing which taking into account parametric and kinematic excitation of vibration is proposed. Ranges resonant frequencies of tumbling mill open gearing are determined. Dangerous velocities of pinion rotation are determined.

**Keywords:** gearing, drum mill, vibration, parametric resonance

**Введение**

При работе зубчатых передач возможны резонансные режимы нагружения, вызванные кинематической погрешностью и периодическим изменением жесткости зубчатой передачи. В первом случае при определенных условиях возможен силовой, а во втором – параметрический резонанс. Поскольку резонансные режимы работы зубчатых передач недопустимы, то задача определения областей их возникновения и выбора динамических параметров, исключающих их возникновение, представляет большой практический интерес.

*Цель работы* – разработка математической модели зубчатой передачи, позволяющей учесть влияние вынужденных и параметрически возбуждаемых колебаний, и определение с ее использованием областей динамической неустойчивости открытой зубчатой передачи барабанной мельницы.

**Анализ исследований**

Возникновение внутренних динамических нагрузок на зубья связано с периодическим действием сил при входе зубьев в зацепление, а также ударов, вызванных кинематической погрешностью зубьев. Расчет динамических нагрузок на зубья является сложной задачей, которая до сих пор не решена полностью. Одним из основных направлений исследования является теоретический расчет усилий, возникающих в зубчатой передаче.

К первым работам, в которых зубчатая передача представлена как колебательная система, следует отнести работы [1]. Петрусевич А.И. и Генкин М.Д. рассмотрели простейшую модель зубчатой передачи как колебательной системы с одной степенью свободы, состоящей из приведенной массы шестерни и зубчатого колеса и упругой связи с жесткостью, эквивалентной жесткости зубчатой передачи [1].

С тех пор опубликовано много работ, посвященных моделированию зубчатых передач с рассмотрением различных возмущающих факторов. Наиболее полный обзор и классификация моделей сделана авторами Ozgüven и Houser [2]. С точки зрения прочности зубчатой передачи наибольший интерес представляет группа моделей, в которой все элементы привода, кроме зубчатых колес, приняты абсолютно жесткими. Данное допущение справедливо для большинства задач, так как жесткость зубчатой передачи намного больше жесткости валов, подшипников и т.д. Поэтому колебания в других элементах привода незначительно влияют на динамику зубчатой передачи. Такая модель позволяет учесть влияние переменной жесткости, демпфирования колебаний кинематической погрешности на внутреннюю динамику зубчатой передачи [3].

Система дифференциальных уравнений движения зубчатых колес, записанная в матричной форме, имеет вид [4]

$$J\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + Kf(\theta) = F(t, \theta, \dot{\theta}), \quad (1)$$

где  $\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots]^T$  – угловое перемещение элементов зубчатой передачи,  $J$  – матрица моментов инерции;  $C$  – матрица, определяющая затухание колебаний;  $K$  – матрица жесткостей;  $F(t, \theta, \dot{\theta})$  – функция, описывающая возмущение движущего момента;  $f(\theta)$  – функция, описывающая изменение жесткости зацепления. С использованием указанной модели показано [4], что периодическое изменение жесткости является источником динамической нагрузки на зубчатую передачу, величина которой сильно зависит от геометрии зубьев и кинематической погрешности зубчатой передачи.

© Д. А. Федин, Б. В. Виноградов, 2017

Функция жесткости  $f(\theta)$  задается зависимостями, вычисленными аналитически, или полученными путем аппроксимации экспериментальных данных рядом Фурье. При исследовании параметрического возбуждения динамических явлений в зубчатой передаче необходимо тщательное обоснование выбора соответствующей функции, вид которой должен учитывать геометрию зацепления и в то же время не должен значительно усложнять математическую модель [5].

**Обоснование расчетной схемы**

Открытая зубчатая передача барабанной мельницы выполнена в виде приводной шестерни 1 (рис. 1), посаженной на вал с ротором двигателя 2, и зубчатого венца 3, посаженного на барабан мельницы.

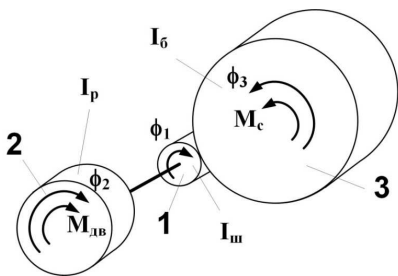


Рисунок 1 – Схема привода барабанной мельницы

Крутящий момент двигателя  $M_{дв}$  передается через вал шестерне 1 и через зубчатое зацепление зубчатому венцу 3. На барабан мельницы действует момент сопротивления  $M_c$ . Жесткость зубчатой передачи намного больше жесткости валопровода, как правило, оснащенного упругой муфтой, что позволяет при рассмотрении внутренней динамики перейти к двухмассовой динамической модели зубчатого зацепления (рис. 2). Здесь  $I_1$  – момент инерции приводной шестерни,  $I_2$  – момент инерции зубчатого венца с барабаном мельницы.

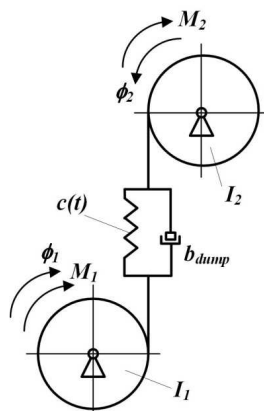


Рисунок 2 – Расчетная схема привода барабанной мельницы

**Обоснование математической модели**

Число степеней свободы системы, приведенной на рис. 2, составляет  $i = 2$ . Следовательно, уравнения движения в форме Лагранжа представляют собой систему из двух уравнений

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_1}{\partial \dot{\phi}_1} \right) - \frac{\partial T_1}{\partial \phi_1} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \phi_1} + Q_1 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_2}{\partial \dot{\phi}_2} \right) - \frac{\partial T_2}{\partial \phi_2} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \phi_2} + Q_2 \end{cases}, \quad (2)$$

где  $T_1$  и  $T_2$  – кинетическая энергия тел 1 и 2 соответственно;  $\phi_1$  и  $\phi_2$  – обобщенные координаты, представляющие собой угловые перемещения зубчатых колес  $\phi_1$  и  $\phi_2$ ;  $\Pi$  – потенциальная энергия силы упругости зубчатой передачи;  $Q_1$  и  $Q_2$  – обобщенные непотенциальные силы.

Учитывая, что

$$- \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = -c(\phi_1 - \phi_2 - \Delta(t)), \quad - \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = c(\phi_1 - \phi_2 - \Delta(t)), \quad (3)$$

где  $\Delta(t)$  – кинематическая погрешность зубчатой передачи, а также

$$Q_1 = M_1 - \mu(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2), \quad (4)$$

$$Q_2 = -M_2 - \mu(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2), \quad (5)$$

после несложных преобразований получаем уравнение движения

$$\ddot{\alpha} + 2b\dot{\alpha} + \frac{c}{I_{\Pi}} \alpha = c\Delta(t), \quad (6)$$

где  $\alpha = \phi_1 - \phi_2$ ;  $2b = \frac{\varepsilon}{I_{\Pi}}$ ;  $I_{\Pi} = \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2}$ ;  $b$  – коэффициент, учитывающий диссипацию энергии колебаний.

При составлении уравнения (6) начало системы отсчета перенесено в положение статического равновесия. Уравнение (6) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение движения с учетом затухания и в общем случае имеет переменные коэффициенты. Сложность получения решения уравнения (6) приводит к тому, что путем принятия существенных допущений в зависимости от целей исследования его приводят к тому или иному виду уравнения, решения которого достаточно изучены.

Поскольку предметом исследования являются параметрические колебания, целесообразно привести уравнение (6) к уравнению Матье-Хилла.

Если утверждать, что жесткость зубчатой передачи изменяется по гармоническому закону, то

$$c(t) = c_0 - \Delta c \cos(\Theta t) = c_0 \left( 1 - \frac{\Delta c}{c_0} \cos(\Theta t) \right), \quad (7)$$

где  $\Delta c = c_{max} - c_0$ ;  $\Theta$  – частота изменения параметра жесткости. Подставляя (7) в (6), получаем

$$\ddot{\alpha} + 2\varepsilon\dot{\alpha} + \Omega_0^2 (1 - 2\mu \cos(\Theta t)) \alpha = c\Delta(t), \quad (8)$$

где  $\Omega_0 = \sqrt{\frac{c_0}{I_{\Pi}}}$ ;  $2\mu = \frac{\Delta c}{c_0}$ ;  $\mu$  – коэффициент, определяющий глубину изменения параметра жесткости.

Решение уравнения (8) хорошо изучено, в частности получены аналитические выражения для границ области динамической неустойчивости колеблющейся

системы [6]. Однако допущение о гармоническом характере изменения жесткости должно быть в каждом конкретном случае обосновано экспериментально либо путем решения контактной задачи методом конечных элементов.

### Инженерный анализ характера изменения жесткости зубчатой передачи

Жесткость зубчатого зацепления привода мельницы МШРГУ 4500х6000, параметры которой приведены в табл. 1 и табл. 2, определялась методом конечных элементов. Значения в табл. 1 над косой чертой и под ней соответствуют прямозубому и косозубому исполнению шестерни соответственно.

Таблица 1 – Геометрические параметры зубчатой передачи

Параметр	Обозначение	МШЦ 5500х6500	
		Шестерня	Колесо
Число зубьев	$z$	46	252
Ширина зуба	$b$ , мм	1000	1000
Начальный диаметр	$d$ , мм	1150/1156	6300/6334
Угол зацепления	$\alpha$ , °	20	
Угол наклона зуба	$\beta$ , °	0/6	
Модуль зацепления	$m$ , мм	25	
Межосевое расстояние	$a_{\text{ш}}$ , мм	3725/3745	

Таблица 2 – Данные по нагрузке зубчатой передачи

Параметр	Обозначение	Значение
Частота вращения шестерни	$n_1$ , об/мин	75
Крутящий момент на шестерне	$T_1$ , кН·м	509,3
Передаточное число	$u$	5,5

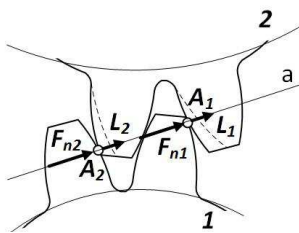


Рисунок 3 – Расчетная схема определения жесткости передачи

Методика расчета жесткости зубчатого зацепления приведена в работах [7, 8]. Зависимость жесткости от времени определялась путем интерполяции значений в последовательных фазах зубчатого зацепления. Расчетная схема определения жесткости зубчатого зацепления при двухпарном контакте приведена на рис. 3. В расчетной схеме принято, что сила в зацеплении распределена между зубьями равномерно ( $F_{n1} = F_{n2} = F_n/2$ ). Статическая деформация зубьев под

действием сил  $F_{n1}$  и  $F_{n2}$  равна  $L_1$  и  $L_2$  соответственно.

На рис. 4 приведена форма пятна контакта зубчатой передачи.

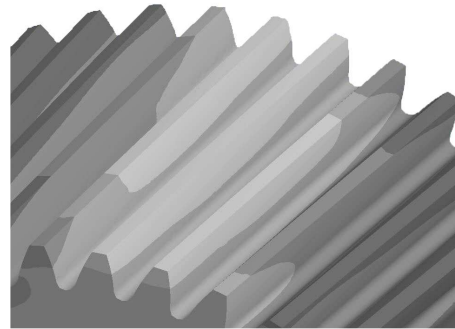


Рисунок 4 – Пятно контакта зубьев в зубчатой передаче

На рис. 5 приведен график зависимости жесткости зубчатого зацепления от времени. Сплошные линии получены путем нелинейной аппроксимации экспериментальных данных функцией

$$y(t) = A + B \cos(\omega t + \varphi), \quad (9)$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$  – параметры уравнения регрессии.

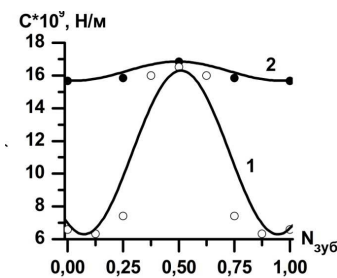


Рисунок 5 – Зависимость линейной жесткости зубчатой передачи барабанной мельницы от времени при прямозубом (1) и косозубом исполнении (2)

Дисперсионный анализ показал, что зависимость жесткости от времени с достаточной для поставленной цели точностью описывается функцией вида (2). Чем больше коэффициент перекрытия, тем более функция жесткости приближается к виду (9). Это позволяет для анализа устойчивости колебаний рассматриваемой системы использовать уравнение Матъе-Хилла (8).

### Исследование динамики зубчатой передачи

Момент инерции зубчатого венца вместе с барабаном  $I_2$  на несколько порядков больше момента инерции ротора двигателя  $I_2$ , поэтому можно записать, что

$$I_{\Pi} = \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} \approx \frac{I_1 I_2}{I_2} = I_1, \quad (10)$$

который составляет  $I_1 = 1,3 \cdot 10^3 \text{ Н·м}^2$ .

Как известно, диссипация энергии колебаний оказывает заметное влияние в резонансных областях. Учитывая, что силовой резонанс возникает на частоте собственных колебаний  $\Omega_{01}$ , а параметрический – на

удвоенной частоте  $\Omega_{02} = 2\Omega_0$ , то эквивалентный коэффициент силы вязкого сопротивления при расчете силового и параметрического резонанса можно определить по формулам

$$\mu_1 = \frac{c_0 \Psi}{2\pi\Omega_{01}}, \mu_1 = \frac{c_0 \Psi}{2\pi\Omega_{02}}, \quad (11)$$

где  $\Psi$  – коэффициент затухания, определяемый опытным путем, а  $c_0$  – среднее значение жесткости зубчатой передачи при ее изменении по гармоническому закону.

Определим динамический момент, вызванный действием кинематической погрешности на зубчатую передачу

$$c\Delta(t) = c_0 \frac{\Delta_0}{r_1} \cos(\omega t), \quad (12)$$

где  $\Delta_0$  – ошибка шага зацепления. Тогда уравнение колебаний зубчатой передачи барабанной мельницы принимает вид

$$\ddot{\alpha} + \Omega_0^2 \left( 1 - \frac{\varepsilon^2}{\Omega_0^2} - 2\mu \cos(\Theta t) \right) \alpha = c_0 \frac{\Delta_0}{r_1 I_1} \cos(\omega t). \quad (13)$$

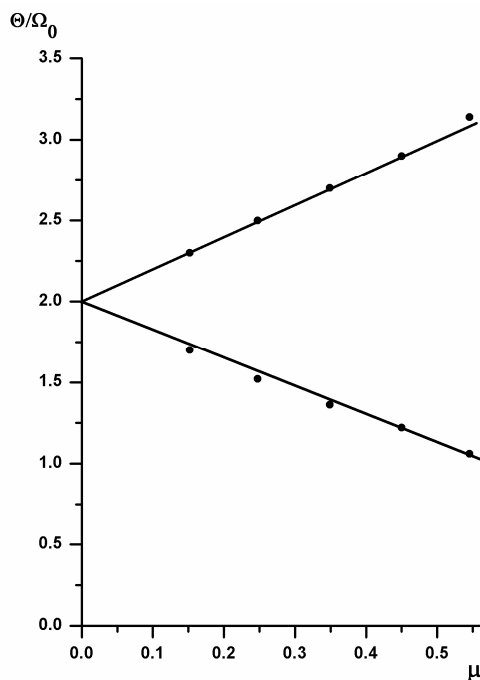


Рисунок 6 – Границы области неустойчивости колебаний зубчатой передачи барабанной мельницы МШЦ 5500х6500 в косозубом исполнении:

1 – теоретические;  
2, 3 – по данным математического моделирования

Решение уравнения (13) производилось методом Рунге-Кутты 4-го порядка точности. На рис. 6 приведены результаты исследования области динамической неустойчивости (параметрического резонанса) зубчатой передачи барабанной мельницы МШЦ 5500х6500. Из рис. 6 видно, что с увеличением параметра  $\mu$  область параметрического резонанса расширяется. В рассматриваемой передаче при прямозубом исполнении  $\mu = 0,2$  и

при косозубом исполнении  $\mu = 0,02$ . Применение косозубых зубчатых колес позволяет уменьшить величину параметра  $\mu$  в десятки раз.

На рис. 7 приведена амплитудно-частотная характеристика зубчатой передачи барабанной мельницы МШЦ 5500х6500 в окрестности основного силового резонанса. Из рис. 7 видно, что колебания жесткости с зубцовой частотой вызывают и в прямозубой и в косозубой передаче малый силовой резонанс на частоте  $0,5\Omega_0$ . Однако заметный рост амплитуд колебаний наблюдается при частоте более  $0,2\Omega_0$ , что при частотах вращения шестерен в приводах мельниц 75-150 об/мин нереально.

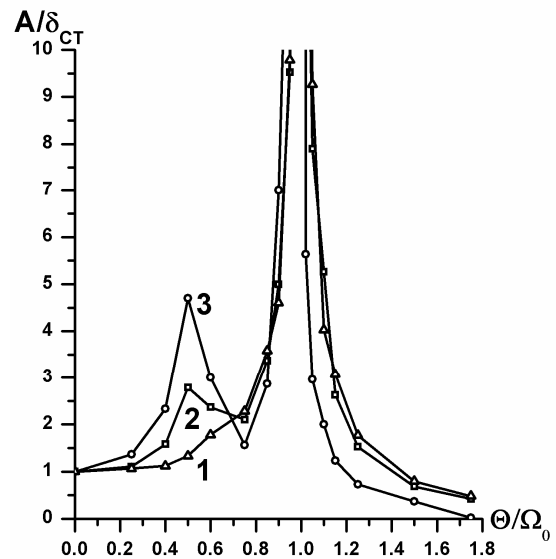


Рисунок 7 – Амплитудно-частотная характеристика зубчатой передачи барабанной мельницы МШЦ 5500х6500:  
1 – без учета колебаний жесткости; 2 –  $\mu = 0,02$ ; 3 –  $\mu = 0,2$

## Выводы

Проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы.

1. В процессе работы зубчатой передачи в результате изменения числа пар зубьев, находящихся в зацеплении, и суммарной длины контактных линий зацепления происходит периодическое изменение жесткости зубчатой передачи. Глубина изменения параметра жесткости  $\mu$  прямозубой открытой зубчатой передачи барабанной мельницы МШЦ 5500х6500 в 12,3 раза больше, чем для косозубой.

2. При установке вал-шестерни открытой зубчатой передачи барабанной мельницы МШЦ 5500х6500 на жесткую опору резонансные режимы работы передачи вследствие колебаний жесткости невозможны, так как частота изменения параметра жесткости, а, следовательно, и зубчатая частота, в 4,7 раза меньше собственной частоты зубчатого зацепления в прямозубом исполнении и в 5,6 раз меньше собственной частоты зубчатого зацепления в косозубом исполнении.

3. Установка приводного узла шестерни на податливую опору приведет к снижению приведенной жесткости и собственной частоты зубчатой передачи, что может вызвать возникновение силового и параметрического резонанса. Поэтому подрессоривание узла привод-

ной шестерни в целях борьбы с ее виброактивностью недопустимо.

#### Список литературы

1. **Петрусевич А.Н.** Динамические нагрузки в зубчатых передачах с прямозубыми колесами / **А.Н. Петрусевич, М.Д. Генкин, В.К. Гриневич** // М.: Изд-во АН СССР, 1956. – 134 с.
2. **Ozgiiven H.N.** Mathematical models used in gear dynamics – a review / **Ozgiiven H.N., Houser D.R.** // Journal of sound and vibration. – 1988. – No 121(3). – P. 383–411.
3. **Amabili M.** Dynamic analysis of spur gear pairs: steady-state response and stability of the SDOF model with time-varying meshing damping / **Amabili M., Rivola A.** // Mechanical systems and signal processing. – 1997. No 11(3). – P. 375–390.
4. **Shiven He** Modeling and dynamics analysis of planetary gear transmission joints with backlash / **Shiven He, Qinxuan Jia, Gang Chen, Hanxu Sun** // International Journal of Control and Automation. – 2015. –Vol. 8. – No 2. – P. 153–162.
5. **Калинин Д. В.** Моделирование нелинейных колебаний цилиндрических зубчатых передач авиационных приводов / **Д. В. Калинин, Ю. М. Темис** // Вісник Самарського державного аерокосмічного університету. – 2015. – Т.14. – № 3. – С. 193–202.
6. **Болотин В.В.** Динамическая устойчивость упругих систем / **В.В. Болотин** // Москва: Наука, 1956. – 600 с.
7. **Виноградов Б.В.** The stress state of heavy loaded open gearing with incomplete teeth contact / **Б.В. Виноградов, Д. А. Федин** // Науковий вісник НГУ, 2016, № 3 – С. 35-40.
8. **Виноградов Б.В.** The stiffness of the open gearing of tumbling mill / **Б.В. Виноградов, Д. А. Федин** // Науковий вісник НГУ, 2016, № 2 – С. 24-29.

#### References (transliterated)

1. **Petrusevich A.N.** Dinamicheskie nagruzki v zubchatykh peredachah s prjamozubymi kolesami [Dynamic loads in gearings with spur gears] / **A.N. Petrusevich, M.D. Genkin, V.K. Grinevich** // Moscow: Izd-vo AN SSSR, 1965. – 134 p.
2. **Ozgiiven H.N.** Mathematical models used in gear dynamics – a review / **Ozgiiven H.N., Houser D.R.** // Journal of sound and vibration. – 1988. – No 121(3). – P. 383–411.
3. **Amabili M.** Dynamic analysis of spur gear pairs: steady-state response and stability of the SDOF model with time-varying meshing damping / **Amabili M., Rivola A.** // Mechanical systems and signal processing. – 1997. No 11(3). – P. 375–390.
4. **Shiven He** Modeling and dynamics analysis of planetary gear transmission joints with backlash / **Shiven He, Qinxuan Jia, Gang Chen, Hanxu Sun** // International Journal of Control and Automation. – 2015. –Vol. 8. – No 2. – P. 153–162.
5. **Kalinin D.V.** Modelirovanie nelinejnykh kolebanij cillindricheskikh zubchatih peredach aviacionnykh privodov [Modeling of nonlinear vibrations of spur gearings of aviation drives] / **D.V. Kalinin, YU.M. Temis** // Visnik Samarskogo gosudarstvennogo arokosmicheskogo universiteta. – 2015. – T.14. – No 3. – P. 193-202.
6. **Bolotin V.V.** Dinamicheskaja ustojchivost' uprugih system [Dynamic equilibrium of flexible structures] / **V.V. Bolotin** // Moscow: Nauka, 1956. – 600 p.
7. **Vinogradov B.V.** The stress state of heavy loaded open gearing with incomplete teeth contact / **B.V. Vinogradov, D. A. Fedin** // Naukovij visnik NGU. – 2016. – No 3 – P. 35-40.
8. **Vinogradov B.V.** The stiffness of the open gearing of tumbling mill / **B.V. Vinogradov, D. A. Fedin** // Naukovij visnik NGU. – 2016. – No 2. – P. 24-29.

Поступила (received) 06.03.2017

#### Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

**Про резонансні режими роботи відкритих зубчастих передач барабаних млинів / Д. О. Федін, Б. В. Виноградов** // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Машинознавство та САПР. – Харків: НТУ "ХПІ", 2017. – № 12 (1234). – С. 132–136. – Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2079-0775.

**О резонансных режимах работы открытых зубчатых передач барабанных мельниц / Д. А. Федин, Б. В. Виноградов** // Вестник НТУ "ХПИ". Серия: Машиноведение и САПР. – Харьков: НТУ "ХПИ", 2017. – № 12 (1234). – С.132–136. – Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2079-0775.

**About resonance modes of work of tumbling mill gearings / D. O. Fedin, B. V. Vinogradov** // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Engineering and CAD. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2017. – № 12 (1234). – P. 132–136. – Bibliogr.: 6. – ISSN 2079-0775.

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Федін Дмитро Олександрович** – кандидат технічних наук, доцент, Державний вищий навчальний заклад "Український державний хіміко-технологічний університет", доцент кафедри матеріалознавства; Дніпро, тел.: (068) 852-38-00; e-mail: tm.i.sm.master@gmail.com.

**Федин Дмитрий Александрович** – кандидат технических наук, доцент, Государственное высшее учебное заведение "Украинский государственный химико-технологический университет", доцент кафедры материаловедения; Днепр, тел.: (068) 852-38-00; e-mail: tm.i.sm.master@gmail.com.

**Fedin Dmytro** – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Docent, State Higher Education Institute "Ukrainian State University of Chemical Technology", Associate Professor at the Department of Materials Science; Dnieper, tel.: (068) 852-38-00; e-mail: tm.i.sm.master@gmail.com.

**Виноградов Борис Володимирович** – доктор технічних наук, професор, Державний вищий навчальний заклад "Український державний хіміко-технологічний університет", професор кафедри матеріалознавства; Дніпро, тел.: (067) 258-46-91; e-mail: bvvin@mail.ru.

**Виноградов Борис Владимирович** – доктор технических наук, профессор, Государственное высшее учебное заведение "Украинский государственный химико-технологический университет", профессор кафедры материаловедения; Днепр, тел.: (067) 258-46-91; e-mail: bvvin@mail.ru.

**Vinogradov Boris** – Doctor of Technical Sciences, Full Professor, State Higher Education Institute "Ukrainian State University of Chemical Technology", Associate Professor at the Department of Materials Science; Dnieper, tel.: (067) 258-46-91; e-mail: bvvin@mail.ru.