

В.П.ОЛЬШАНСКИЙ, д-р. физ.-мат. наук, проф., ХНТУСХ, Харьков;
С.В. ОЛЬШАНСКИЙ, канд. физ.-мат. наук, доц., НТУ «ХПИ»

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ОСЦИЛЛЯТОРА ЛИНЕЙНО-ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ

Рассмотрено движение осциллятора линейно-переменной массы при нагружении его кратковременным импульсом постоянной силы. С помощью цилиндрических функций построено замкнутое решение задачи и проанализированы результаты расчётов.

Ключевые слова: осциллятор, линейно-переменная масса, кратковременный импульс, цилиндрические функции.

Введение. Нестационарные колебания механических систем с переменными во времени параметрами относятся к мало изученным разделам теории колебаний. В литературе в основном описаны лишь свободные колебания простейших моделей переменной массы с одной степенью свободы. Одним из первых, кто начал изучать такое движение, был *И.В. Мещерский* [1]. В указанной публикации он построил замкнутое решение уравнения малых свободных колебаний математического маятника линейно-переменной массы в *функциях Бесселя* положительного и отрицательного индексов. Свободные колебания линейного осциллятора линейно-переменной массы рассматривались в [2], где построено решение уравнения движения. Но автор этой публикации не проводила расчётов и не анализировала особенностей колебаний, вызванных переменностью массы. Две задачи о свободных колебаниях системы линейно-переменной жёсткости во времени решено в [3]. Речь идёт о колебаниях тяжёлого груза при равномерном вертикальном опускании или подъёме его на невесомом тросе, намотанном на равномерно вращающийся барабан. В отличие от указанных публикаций, где решали однородное дифференциальное уравнение движения, здесь мы построим замкнутое решение неоднородного уравнения.

Целью работы является изучение движения осциллятора линейно-переменной массы, вызванного действием непродолжительного импульса силы, типа ударного воздействия [4].

Постановка задачи Коши и построение её решения. Предполагаем, что масса осциллятора M изменяется во времени t по закону

$$M = m_0(1 + \gamma t),$$

где m_0 – начальное значение массы; γm_0 – скорость изменения массы во времени.

Вертикальное перемещение осциллятора определяем координатой $x(t)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$m_0(1 + \gamma t) \frac{d^2 x}{dt^2} + cx = m_0 g \gamma t + Q [H(t) - H(t - \tau)]. \quad (1)$$

В нём c – коэффициент жёсткости пружины; g – ускорение свободного падения; $H(t)$ – функция Хевисайда; $Q \cdot \tau$ – величина импульса продолжительности τ .

Начало вертикальной оси Ox опущено от точки подвеса пружины A вниз на расстояние $X_0 = l + c(m_0 g)^{-1}$, где l – длина недеформированной пружины (см. рис. 1).

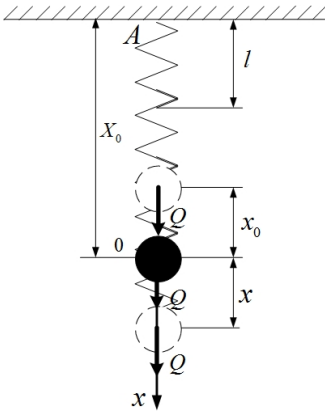


Рис. 1 – Расчётная схема вертикальных колебаний осциллятора.

Считаем, что при $t = 0$ координата $x = 0$ и осциллятор находится в состоянии покоя.

Введением вспомогательной переменной $\xi = 1 + \gamma t$ уравнение (1) преобразуем к форме:

$$\frac{d^2 x}{d\xi^2} + \frac{c}{\gamma^2 m_0 \xi} x = \frac{g}{\gamma^2} \frac{(\xi - 1)}{\xi} + \frac{Q}{m_0 \gamma^2 \xi} [H(\xi - \xi_0) - H(\xi - \xi_1)], \quad (2)$$

где $\xi_0 = 1$; $\xi_1 = 1 + \gamma \tau$.

Ему соответствуют однородное уравнение:

$$\frac{d^2 x}{d\xi^2} + \frac{c}{\gamma^2 m_0 \xi} x = 0. \quad (3)$$

Фундаментальными решениями (3) являются:

$$x_1(\eta) = \eta J_1(\eta); \quad x_2(\eta) = \eta Y_1(\eta). \quad (4)$$

Здесь $\eta = \eta_0 \sqrt{\xi}$; $\eta_0 = \frac{2}{|\gamma|} \sqrt{\frac{c}{m}}$; $J_1(\eta), Y_1(\eta)$ – функции Бесселя и Неймана

индекса единица.

При дифференцировании фундаментальных решений по ξ учтём, что [5]:

$$\frac{d}{d\eta} [\eta J_1(\eta)] = \eta J_0(\eta); \quad \frac{d}{d\eta} [\eta Y_1(\eta)] = \eta Y_0(\eta);$$

$$\frac{d}{d\xi} = \frac{d}{d\eta} \cdot \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta_0^2}{2\eta} \frac{d}{d\eta};$$

$J_0(\eta); Y_0(\eta)$ – функции Бесселя и Неймана нулевого индекса.

Тогда:

$$\frac{dx_1}{d\eta} = \frac{\eta_0^2}{2} J_0(\eta); \quad \frac{dx_2}{d\eta} = \frac{\eta_0^2}{2} Y_0(\eta).$$

Согласно *методу Лагранжа*, частное решение неоднородного уравнения (2) ищем в виде

$$x = c_1(\eta)x_1(\eta) + c_2(\eta)x_2(\eta). \quad (5)$$

Для определения неизвестных функций $c_1(\eta)$ и $c_2(\eta)$ получаем интегралы:

$$c_1(\eta) = -\frac{2}{\eta_0^2} \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\eta f(\eta)x_2(\eta)}{\Delta(\eta)} d\eta; \quad c_2(\eta) = \frac{2}{\eta_0^2} \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\eta f(\eta)x_1(\eta)}{\Delta(\eta)} d\eta,$$

в которых

$$\Delta(\eta) = x_1 \frac{dx_2}{d\eta} - x_2 \frac{dx_1}{d\eta} = \frac{\eta_0^2 \eta}{2} [J_1(\eta)Y_0(\eta) - J_0(\eta)Y_1(\eta)] = \frac{\eta_0^2 \eta}{2} \frac{2}{\pi \eta} = \frac{\eta_0}{\pi};$$

$$f(\eta) = \frac{g}{\gamma^2} \frac{\eta^2 - \eta_0^2}{\eta^2} + \frac{Q\eta_0^2}{m_0 \gamma^2 \eta^2} [H(\eta - \eta_0) - H(\eta - \eta_1)]; \quad \eta_1 = \eta_0 \sqrt{1 + \gamma\tau}.$$

Учитывая эти выражения и (4), находим:

$$c_1(\eta) = -\frac{2\pi}{\eta_0^4 \gamma^2} \int_{\eta_0}^{\eta} \left\{ g(\eta^2 - \eta_0^2) + \frac{Q\eta_0^2}{m_0} [H(\eta - \eta_0) - H(\eta - \eta_1)] \right\} Y_1(\eta) d\eta;$$

$$c_2(\eta) = \frac{2\pi}{\eta_0^4 \gamma^2} \int_{\eta_0}^{\eta} \left\{ g(\eta^2 - \eta_0^2) + \frac{Q\eta_0^2}{m_0} [H(\eta - \eta_0) - H(\eta - \eta_1)] \right\} J_1(\eta) d\eta. \quad (6)$$

Интегралы (6) выражаются через цилиндрические функции, поскольку [5]:

$$\int \eta^2 J_1(\eta) d\eta = \eta^2 J_2(\eta); \quad \int \eta^2 Y_1(\eta) d\eta = \eta^2 Y_2(\eta);$$

$$\int J_1(\eta) d\eta = -J_0(\eta); \quad \int Y_1(\eta) d\eta = -Y_0(\eta).$$

Следовательно,

$$c_1(\eta) = -\frac{2\pi}{\eta_0^4 \gamma^2} \left\{ g [\eta^2 Y_2(\eta) - \eta_0^2 Y_2(\eta_0)] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + g\eta_0^2 [Y_0(\eta) - Y_0(\eta_0)] - \frac{Q\eta_0^2}{m_0} [Y_0(\eta_*) - Y_0(\eta_0)] \Big\}; \\
c_2(\eta) &= \frac{2\pi}{\eta_0^4 \gamma^2} \left\{ g [\eta^2 J_2(\eta) - \eta_0^2 J_2(\eta_0)] + \right. \\
& \left. + g\eta_0^2 [J_0(\eta) - J_0(\eta_0)] - \frac{Q\eta_0^2}{m_0} [J_0(\eta_*) - J_0(\eta_0)] \right\}. \quad (7)
\end{aligned}$$

Здесь $\eta_* = \begin{cases} \eta & \text{при } \eta \leq \eta_1; \\ \eta_1 & \text{при } \eta > \eta_1; \end{cases}$ $J_2(\eta), Y_2(\eta)$ – функция Бесселя и Неймана

индекса два.

Учитывая, что [5]:

$$\begin{aligned}
Y_2(\eta_0) + Y_0(\eta_0) &= \frac{2}{\eta_0} Y_1(\eta_0); & J_2(\eta_0) + J_0(\eta_0) &= \frac{2}{\eta_0} J_1(\eta_0), \\
J_2(\eta) Y_1(\eta) - Y_2(\eta) J_1(\eta) &= \frac{2}{\eta\pi}; & J_0(\eta) Y_1(\eta) - Y_0(\eta) J_1(\eta) &= -\frac{2}{\eta\pi},
\end{aligned}$$

после подстановки выражений (7) в (5) получаем замкнутое решение поставленной задачи Коши:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{2\pi}{\eta_0^4 \gamma^2} \left\{ \frac{2}{\pi} g (\eta^2 - \eta_0^2) + 2g\eta_0\eta [Y_1(\eta_0) J_1(\eta) - J_1(\eta_0) Y_1(\eta)] + \right. \\
& \left. + \frac{Q\eta_0^2\eta}{m_0} [(J_0(\eta_0) - J_0(\eta_*)) Y_1(\eta) - (Y_0(\eta_0) - Y_0(\eta_*)) J_1(\eta)] \right\}.
\end{aligned}$$

Результаты моделирования. Рассмотрим модельную задачу, когда масса осциллятора возрастает. Для этого примем следующие исходные данные: $m_0 = 100$ кг; $c = 4 \cdot 10^4$ Н/м; $Q = 981$ Н; $\tau = 1$ с и разные значения γ . На рис.2 а и б представлены перемещения осциллятора, полученные при $\gamma = 0,1 \text{ с}^{-1}$ и $\gamma = 0,5 \text{ с}^{-1}$ соответственно.

Вследствие возрастания массы, во время действия импульса ($t \leq 1$ с) максимум $x(t)$ более чем в два раза превышает статическое перемещение $x_{CT} = Q/c$. После прекращения действия импульса ($t > 1$ с) осциллятор совершает свободные колебания относительно подвижного уровня отсчёта или центра колебаний, который опускается вниз. С увеличением параметра γ возрастают амплитуды свободных колебаний.

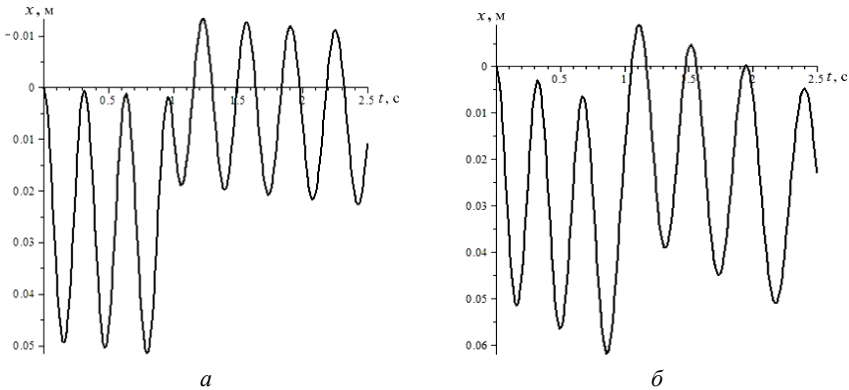


Рис. 2 – Зависимость перемещения x от времени t при разных $\gamma > 0$:
 $a - \gamma = 0,1 \text{ с}^{-1}$; $б - \gamma = 0,5 \text{ с}^{-1}$.

Проведём числовой расчёт колебаний осциллятора с убывающей массой. Для этого примем прежние исходные данные и поменяем знак у параметра γ . Результаты таких расчётов представлены на рис. 3.

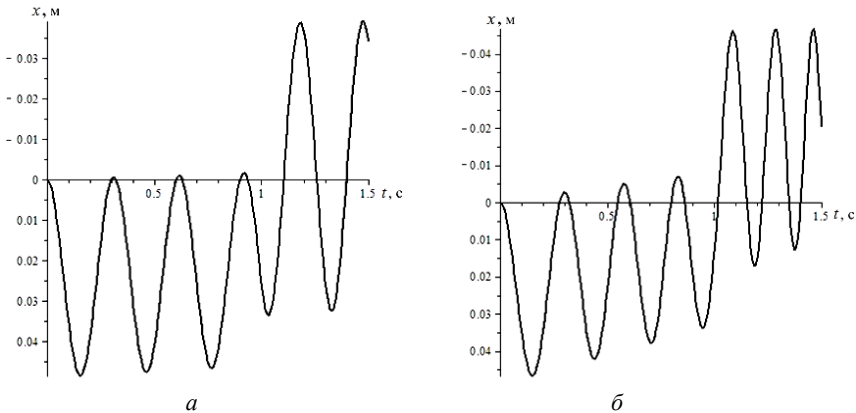


Рис. 3 – Зависимость перемещения x от времени t при разных $\gamma < 0$:
 $a - \gamma = -0,1 \text{ с}^{-1}$; $б - \gamma = -0,5 \text{ с}^{-1}$.

При уменьшении массы осциллятора коэффициент динамичности перемещений оказывается меньшим двух. Центр колебаний поднимается вверх. Уменьшение массы осциллятора частично «гасит» действие импульса.

Выводы. При действии импульса постоянной силы на коротком промежутке времени задача моделирования нестационарных колебаний осциллято-

ра линейно-переменной массы допускает замкнутое решение в цилиндрических функциях. Решение позволяет проводить расчёт динамических перемещений осциллятора без учёта их затухания во времени.

Список литературы: 1. *Мещерский И.В.* Работы по механике тел переменной массы / И.В. Мещерский. – М.: ГИТТЛ, 1952. – 276 с. 2. *Cveticanin L.* Dynamics of Machines with Variable Mass. / L. Cveticanin. Taylor & Francis Ltd, – 1998. – 300 p. 3. *Светлицкий В.А.* Сборник задач по теории колебаний / В.А. Светлицкий, И.В. Стасенко – М.: Высшая школа, 1973. – 456 с. 4. *Ольшанский В.П.* Колебания стержней и пластин при механическом ударе // В.П. Ольшанский, Л.Н. Тищенко, С.В. Ольшанский. – Х.: “Міськдрук”, 2012. – 320 с. 5. *Абрамовиц А.* Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами) / А. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

Поступила в редколлегию 09.04.2013

УДК 534.1

Моделювання коливань осцилятора лінійно-змінної маси за імпульсного навантаження / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2013. – №37 (1010). – С. 125 – 130. Бібліогр.: 5 назв.

Розглянуто рух осцилятора лінійно-змінної маси при навантаженні його короткочасним імпульсом сталої сили. За допомогою циліндричних функцій побудовано замкнутий розв’язок задачі та проаналізовано результати розрахунків.

Ключові слова: осцилятор, лінійно-змінна маса, короткочасний імпульс, циліндричні функції.

The motion of the oscillator linearly variable mass when loaded his short pulses of constant force is considered. With cylindrical functions to construct a closed solution and analyzed the results.

Key words: an oscillator, linearly variable mass, short impulse, cylindrical functions.

УДК 629.7.05

Ю.А. ПЛАКСІЙ, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХП»

ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ РЕВЕРСИВНИХ СХЕМ АЛГОРИТМІВ ВИЗНАЧЕННЯ КВАТЕРНІОНІВ ОРІЄНТАЦІЇ

Для реверсивних схем визначення кватерніонів орієнтації отримані оцінки точності на еталонній моделі регулярної прецесії. Запропоновано покращення схем на основі фінітного нормування кватерніона і застосування більш точної апроксимації для уявних поворотів на такті.

Ключові слова: кватерніон, орієнтація, реверсивна схема, дрейф, еталонна модель.

Вступ і постановка задачі. При розв’язанні задачі визначення орієнтації в *безплатформених інерціальних навігаційних системах* (БІНС) в умовах

© Ю. А. Плаксіє, 2013