

**Ю.А. ПЛАКСІЙ**, канд. техн. наук, доц. НТУ «ХПІ»

## ЕТАЛОННА ТРИГОНОМЕТРИЧНА КВАТЕРНІОННА МОДЕЛЬ ПРЕЦЕСІЙНОГО ТИПУ ОБЕРТАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА

Запропонована нова еталонна тригонометрична модель обертання твердого тіла, що узагальнює випадок регулярної прецесії. Показано, що регулярна прецесія не є найгіршим рухом при оптимізації алгоритмів визначення орієнтації.

**Ключові слова:** кватерніон, орієнтація, еталонна модель, дрейф.

**Вступ і постановка задачі.** Для побудови цифрового образу інерціальної системи координат у бортовому обчислювачі в безплатформених інерціальних навігаційних системах (БІНС) застосовують спеціальні алгоритми обчислення кватерніону орієнтації на такті  $\Delta t$ , які орієнтовані на первинну інформацію про обертання об'єкта, що поступає з гіроскопів у вигляді *квазікоординат* [1]

$$\theta_{ni}^* = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega_i dt, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

де  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  – проекції вектора абсолютної кутової швидкості об'єкта  $\vec{\omega}$  на зв'язані осі. Оскільки алгоритми визначення орієнтації в БІНС відіграють роль «аналітичної платформи» [2], до них пред'являються жорсткі вимоги щодо мінімальної завантаженості обчислювача на такті при точності визначення параметрів, достатній для виконання технічної задачі, яка покладена на рухомий об'єкт. Для оцінювання точності і відпрацювання алгоритмів визначення орієнтації необхідно мати деякі еталонні моделі обертання, які можуть бути дискретними або неперервними.

Дискретні еталонні моделі ґрунтуються на результатах чисельного інтегрування рівнянь математичної моделі обертання об'єкта. Переваги дискретних моделей полягають в тому, що їх можна реалізувати для достатньо складних об'єктів, а недоліки пов'язані з тим, що в отриманих на їх основі оцінках похибок алгоритмів невід'ємно присутні похибки від застосованого методу чисельного інтегрування. При цьому порядки точності методу чисельного інтегрування і алгоритму визначення орієнтації повинні бути погоджені, бо неможливо отримати коректні оцінки, якщо ці порядки є однаковими.

Неперервні еталонні моделі обертання звичайно обмежені випадками існуючих точних розв'язків сукупності динамічних та кінематичних рівнянь твердого тіла (*моделі кінечного руху* [3,4] та *регулярної прецесії* [5,6]). В цих моделях кінематичні параметри і інформація про динаміку обертання твердо-

го тіла – так звані квазікоординати (тобто прирости уявних поворотів на такті  $\Delta t$ ) – представляються неперервними явними функціями часу. Оскільки реальний рух об'єкта не завжди відповідає конічному руху або регулярній прецесії, необхідно мати інші моделі для аналізу похибок алгоритмів визначення орієнтації, тому отримання нових еталонних моделей, що описують більш складний рух об'єкта, є достатньо актуальною задачею.

Найбільш просто можна побудувати еталонну модель обертання, якщо належним чином задати аналітичне представлення для кінематичних параметрів. Маючи аналітику для кінематики, нескладно отримати відповідні аналітичні залежності для динамічної частини моделі у вигляді проекцій вектора абсолютної кутової швидкості  $\omega_i$  і квазікоординат (1). Наприклад, в [7] для аналізу точності алгоритмів визначення орієнтації застосована *трьохчастотна еталонна модель*, в основі якої лежить тригонометричне представлення для компонент кватерніона орієнтації у вигляді:

$$\begin{aligned} \lambda_0(t) &= \cos(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t); \quad \lambda_1(t) = \sin(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t); \\ \lambda_2(t) &= \sin(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t); \quad \lambda_3(t) = \sin(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t). \end{aligned} \quad (2)$$

Розширення класу неперервних еталонних моделей можливе за рахунок нових представлень для кватерніона орієнтації моделі. В нашій роботі пропонується нове представлення для кватерніона орієнтації моделі, що узагальнює представлення (2).

**Еталонна тригонометрична кватерніона модель обертання твердого тіла прецесійного типу.** Задамо компоненти кватерніона орієнтації моделі у вигляді:

$$\begin{aligned} \lambda_0(t) &= \cos(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t) - \xi \sin(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t); \quad \lambda_1(t) = \eta \cdot \sin(k_1 t) \cdot \cos(k_3 t); \\ \lambda_2(t) &= \eta \cdot \sin(k_1 t) \cdot \sin(k_3 t); \quad \lambda_3(t) = \cos(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t) + \xi \sin(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t), \end{aligned} \quad (3)$$

де  $\xi^2 + \eta^2 = 1$ , що є умовою нормування кватерніона  $\|\Lambda(t)\| = 1$ .

Продиференціюємо (3) по  $t$ , отримаємо наступні вирази:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_0(t) &= -k_1 \sin(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t) - k_2 \cos(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t) - \xi \cdot k_1 \cos(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t) - \\ &\quad - \xi \cdot k_2 \sin(k_1 t) \cos(k_2 t); \\ \dot{\lambda}_1(t) &= \eta \cdot k_1 \cos(k_1 t) \cdot \cos(k_3 t) - \eta \cdot k_3 \sin(k_1 t) \cdot \sin(k_3 t); \\ \dot{\lambda}_2(t) &= -\eta \cdot k_1 \cos(k_1 t) \cdot \sin(k_3 t) + \eta \cdot k_3 \sin(k_1 t) \cdot \cos(k_3 t); \\ \dot{\lambda}_3(t) &= -k_1 \sin(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t) + k_2 \cos(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t) + \xi \cdot k_1 \cos(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t) - \\ &\quad - \xi \cdot k_2 \sin(k_1 t) \sin(k_2 t). \end{aligned} \quad (4)$$

Щоб отримати формули для компонент кутової швидкості  $\omega_i$ , скористаємося оберненим кінематичним рівнянням у формі [1]:

$$\vec{\omega}(t) = 2 \cdot \tilde{\Lambda}(t) \circ \dot{\Lambda}(t), \quad (5)$$

де  $\tilde{\Lambda}(t)$  – кватерніон, спряжений кватерніону (3). Підстановка виразів для

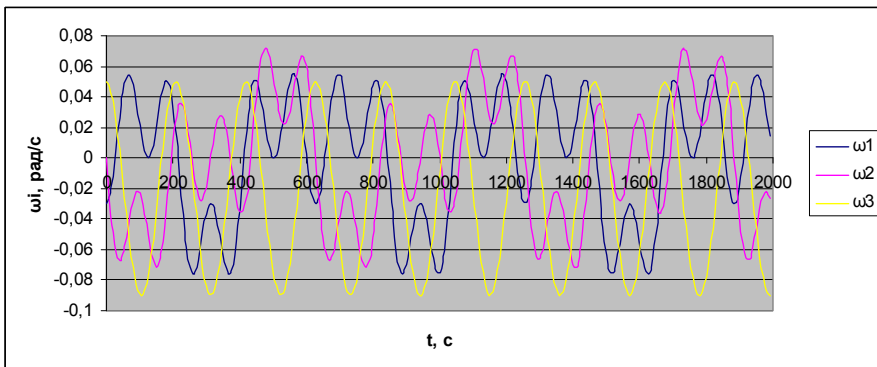


Рис. 1 – Проекції вектора кутової швидкості моделі ( $\xi = 0; \eta = 1$ ).

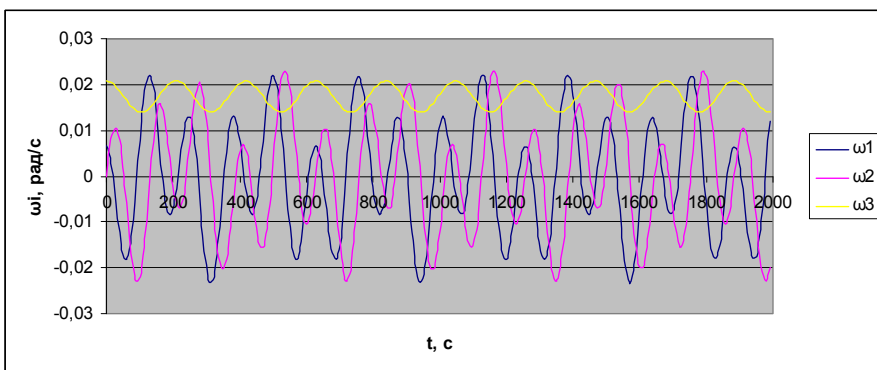


Рис. 2 – Проекції вектора кутової швидкості моделі ( $\xi = 40/41; \eta = -9/41$ ).

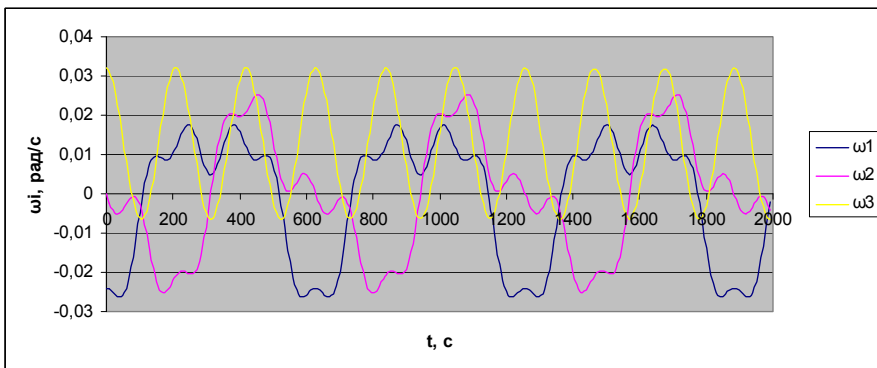


Рис. 3 – Проекції вектора кутової швидкості моделі ( $\xi = 0,6; \eta = 0,8; k_3 = 0,005$ ).

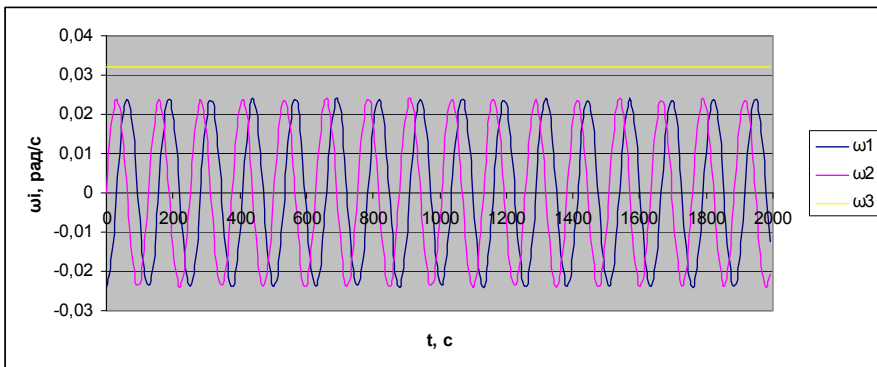


Рис. 4 – Проекції вектора кутової швидкості моделі ( $\xi = 0,6$ ;  $\eta = 0,8$ ;  $k_1 = -0,015$ ;  $k_2 = 0,025$ ;  $k_3 = -0,025$ ) .

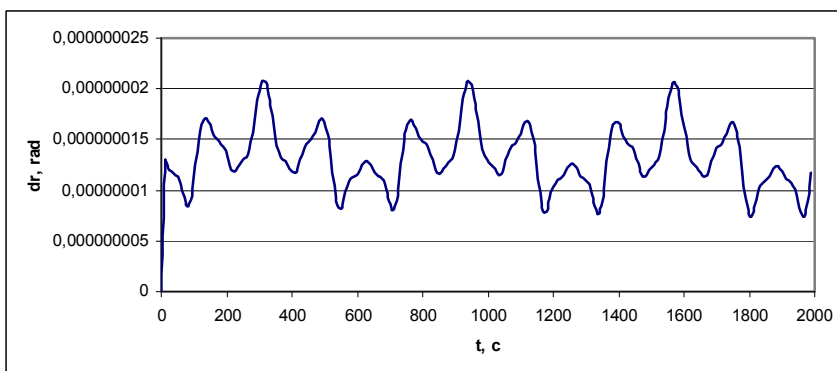


Рис. 5 – Похибка дрейфу алгоритму (9), (10) на моделі ( $\xi = 0$ ;  $\eta = 1$ ) .

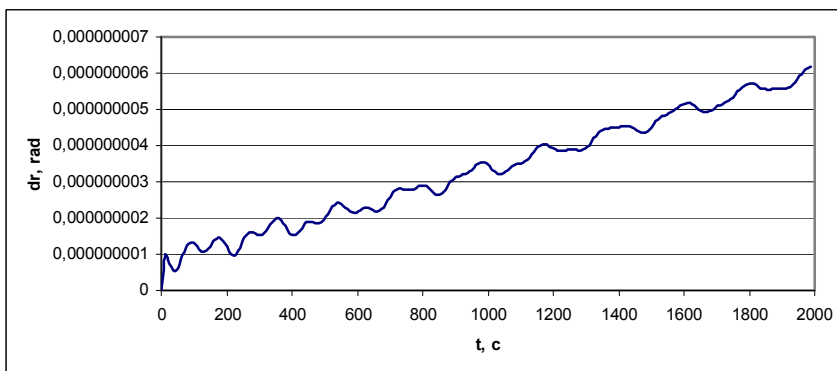


Рис. 6 – Похибка дрейфу алгоритму (9), (10) на моделі ( $\xi = 40/41$ ;  $\eta = -9/41$ ) .

компонент кватерніона (3) і похідних (4) від цих компонент в (5) дає:

$$\begin{aligned}\omega_1(t) &= \eta(2k_1 + \xi k_2 + \xi k_3) \cos((k_2 - k_3)t) + 0, 5\eta(k_2 + k_3)(1 - \xi) \times \\ &\times \cos((2k_1 - k_2 + k_3)t) - 0, 5\eta(k_2 + k_3)(1 + \xi) \cos((2k_1 + k_2 - k_3)t); \\ \omega_2(t) &= \eta(2k_1 + \xi k_2 + \xi k_3) \sin((k_3 - k_2)t) + 0, 5\eta(k_2 + k_3)(1 - \xi) \times \\ &\times \sin((2k_1 - k_2 + k_3)t) + 0, 5\eta(k_2 + k_3)(1 + \xi) \sin((2k_1 + k_2 - k_3)t); \\ \omega_3(t) &= (2\xi k_1 + k_2 + \xi^2 k_2 - \eta^2 k_3) + (k_2 - \xi^2 k_2 + \eta^2 k_3) \cos(2k_1 t). \quad (6)\end{aligned}$$

Інтегруючи (6) за часом від 0 до  $t$ , отримуємо уявні повороти у вигляді:

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= \eta(2k_1 + \xi k_2 + \xi k_3) \sin((k_2 - k_3)t) / (k_2 - k_3) + \\ &+ 0, 5\eta(k_2 + k_3)(1 - \xi) \sin((2k_1 - k_2 + k_3)t) / (2k_1 - k_2 + k_3) - \\ &- 0, 5\eta(k_2 + k_3)(1 + \xi) \sin((2k_1 + k_2 - k_3)t) / (2k_1 + k_2 - k_3); \\ \theta_2(t) &= \eta(2k_1 + \xi k_2 + \xi k_3) (\cos((k_3 - k_2)t) - 1) / (k_2 - k_3) + \\ &+ 0, 5\eta(k_2 + k_3)(1 - \xi) (\cos((2k_1 - k_2 + k_3)t) - 1) / (k_2 - k_3 - 2k_1) + \\ &+ 0, 5\eta(k_2 + k_3)(1 + \xi) (\cos((2k_1 + k_2 - k_3)t) - 1) / (k_3 - k_2 - 2k_1); \\ \theta_3(t) &= (2\xi k_1 + k_2 + \xi^2 k_2 - \eta^2 k_3)t + (k_2 - \xi^2 k_2 + \eta^2 k_3) \sin(2k_1 t) / (2k_1). \quad (7)\end{aligned}$$

Модельні значення квазікоординат (1) знаходяться з формули

$$\theta_{ni}^* = \theta_i(t_n) - \theta_i(t_{n-1}), \quad i = 1, 2, 3, \quad (8)$$

Таким чином еталонна модель обертання повністю визначається формулами (6), (7), (3), якщо задати частоти  $k_1, k_2, k_3$  та параметри  $\xi, \eta$ , що задовольняють умовам  $\xi^2 + \eta^2 = 1$ .

Запропонована модель при  $\xi = 0, \eta = 1$  і круговій перестановці (3,1,2) компонент векторної частини кватерніона моделі перетворюється в модель (2), представлену в [7].

**Чисельна реалізація моделі.** Розглянемо модель обертання (6), (7), (3) при декількох наборах частот  $k_1, k_2, k_3$  і параметрів  $\xi, \eta$ .

На рис.1 і рис.2 наведені залежності проєкцій вектора модельної кутової швидкості від часу при  $k_1 = -0,015, k_2 = 0,025, k_3 = 0,045$  і різних наборах параметрів  $\xi, \eta$ . Відповідні залежності проєкцій вектора модельної кутової швидкості від часу при  $k_1 = -0,015, k_2 = 0,025, k_3 = 0,005, \xi = 0,6, \eta = 0,8$  приведені на рис.3. При значеннях параметрів  $k_1 = -0,015, k_2 = 0,025, k_3 = -0,025, \xi = 0,6, \eta = 0,8$  модельний рух цілком відповідає випадку регулярної прецесії (рис. 4).

Очевидно, що запропонована тут модель обертання охоплює достатньо широкий спектр рухів об'єкта як твердого тіла.

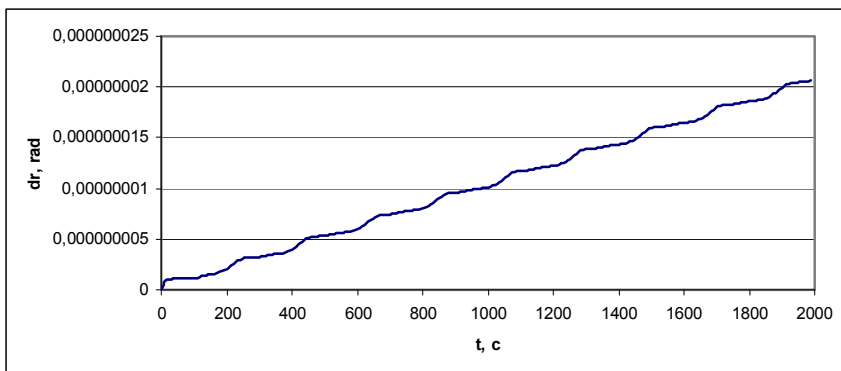


Рис. 7 – Похибка дрейфу алгоритму (9), (10) на моделі ( $\xi = 0,6; \eta = 0,8; k_3 = 0,005$ ).

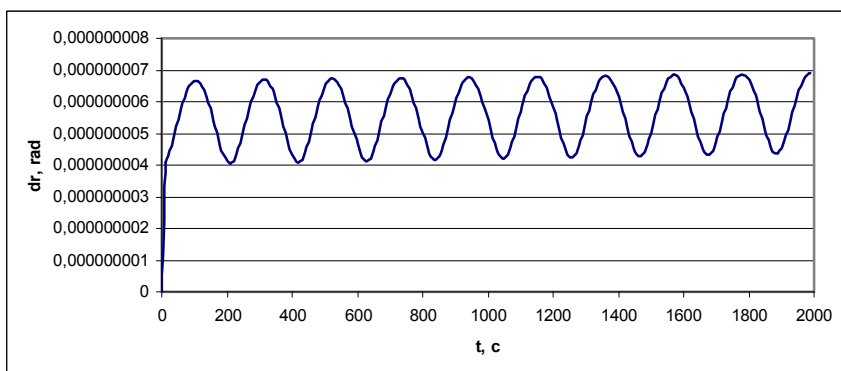


Рис. 8 – Похибка дрейфу алгоритму (9), (10) на моделі ( $\xi = 0,6; \eta = 0,8; k_1 = -0,015; k_2 = 0,025; k_3 = -0,025$ ).

**Оцінювання алгоритмів на еталонній моделі.** Проведемо оцінювання похибки дрейфу для алгоритму визначення орієнтації третього порядку, наведеного в [1], для якого кватерніон повороту на такті задається формулами:

$$\Delta\lambda_{n0}^* = 1 - \frac{1}{8}\theta_n^{*2}, \quad (9)$$

$$\Delta\vec{\lambda}_n^* = \frac{1}{2}\vec{\theta}_n^* \left(1 - \frac{1}{24}\theta_n^{*2}\right) + \frac{1}{24}(\vec{\theta}_{n-1}^* \times \vec{\theta}_n^*). \quad (10)$$

На рис. 5 – 8 представлені залежності похибки дрейфу від часу для еталонної моделі (6), (7), (3) при різних значеннях частот  $k_1, k_2, k_3$  і параметрів  $\xi, \eta$ . Аналіз приведених залежностей дозволяє зробити висновок, що оцінювання алгоритму визначення орієнтації на моделі регулярної прецесії (рис.8) не можна вважати достатнім, бо в цьому випадку похибка дрейфу має гармо-

нічний характер при практично нульовій середній швидкості дрейфу, в той час як похибки дрейфу на рис.6 і рис.7 мають виражений зростаючий характер.

**Висновки.** Запропонована нова трьохчастотна тригонометрична еталонна модель обертання об'єкту, яка є узагальненням тригонометричної моделі, представленої в [7]. Показано, що за допомогою цієї моделі можна отримати достатньо широкий набір рухів об'єкта як твердого тіла. При відповідних значеннях параметрів представлена модель перетворюється на модель регулярної прецесії. Для алгоритму третього порядку на запропонованій еталонній моделі при різних значеннях параметрів отримані оцінки похибки дрейфу. Аналіз результатів дозволяє зробити висновок, що регулярна прецесія не є найгіршим рухом, на якому треба оцінювати точність алгоритмів визначення орієнтації, як це вважалося раніше [5]. Отже і оптимізація алгоритмів на регулярній прецесії не може вважатися доцільною.

**Список літератури:**1. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. – М.: Наука, 1992. – 280 с. 2. *Mortensen R.E.* Strapdown Guidance Error Analysis. – IEEE Trans. Aerospace and Electr. Syst., 1974, vol.10, No 4, pp.451–458. 3. *Ткаченко А.И.* О применении параметров Родрига-Гамильтона в алгоритмах определения ориентации объекта // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1970.– Вып. 5.– С. 20–22. 4. *Панов А.П.* Оптимизация методов вычисления кватернионов при конических колебаниях твердого тела// Механика гироскоп. систем. – К., 1984. – Вып. 3.– С. 105–112. 5. *Панов А.П.* Оптимизация высокоточных алгоритмов вычисления кватернионов в случае прецессии твердого тела // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1987.– Вып. 73.– С. 3–9. 6. *Плакий Ю.А.* Аналитические оценки точности алгоритмов определения ориентации в кватернионах для случая регулярной прецессии объекта // Вестник Харьк. политехн. ин-та, №2.–1992, вып. 11.– С.79–83. 7. *Кузнецов Ю.А., Олейник С.В., Деменков В.А., Плакий Ю.А.* Применение моделей вращения для анализа погрешностей алгоритмов бесплатформенных инерциальных систем ориентации подвижных объектов // Труды XII Санкт-Петербургской Международной конференции по интегрированным навигационным системам. – С.-Петербург: ЦНИИ “Электроприбор”, – 2010. – С. 114–116.

*Надійшла до редколегії 23.05.2013*

---

УДК 629.7.05

**Еталонна тригонометрична кватерніонна модель прецесійного типу обертання твердого тіла / Ю. А. Плакий** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №37 (1010). – С. 141 – 147. Бібліогр.: 7 назв.

Предложена новая эталонная тригонометрическая модель вращения твердого тела, которая обобщает случай регулярной прецессии. Показано, что регулярная прецессия не является наилучшим движением при оптимизации алгоритмов определения ориентации.

**Ключевые слова:** кватернион, ориентация, эталонная модель, дрейф.

The new reference trigonometric model of a rigid body rotation that covers a case of a regular precession is offered. It is shown that the regular precession isn't the worst movement for optimization of orientation algorithms.

**Key words:** quaternion, orientation, reference model, drift.