

**А.Я. БОМБА**, д-р техн. наук, проф. РДГУ, Рівне;

**А.М. СІНЧУК**, аспірант РДГУ, Рівне

## **КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ ПОВЕДІНКИ СИСТЕМИ «СВЕРДЛОВИНИ-ТРИЩИНИ-ПЛАСТ» В ЕЛЕМЕНТАХ ПЛОЩАДНОГО ЗАВОДНЕННЯ**

З використанням теорії Баклея-Леверетта модифіковано комплексний підхід моделювання нелінійних процесів багатофазної фільтрації в елементах площадного заводнення на випадок інтенсифікації притоку пластової рідини до свердловини за допомогою тріщин гідралічного розриву. Проведено аналіз числових розрахунків перерозподілу відповідних фільтраційних характеристик: поля насиченості, фільтраційних витрат, квазіпотенціалу швидкості тощо та встановлено особливості протікання процесу витіснення при керуванні ним шляхом зміни параметрів тріщин гідралічного розриву пласта.

**Ключові слова:** квазіконформне відображення, модель Баклея-Леверетта, тріщини гідророзриву, площадне заводнення.

**Вступ.** У процесі розробки нафтогазових родовищ існує низка чинників, які впливають на ефективність видобутку; це як геологічні особливості пласта, так і технічні його параметри [1]. На сьогоднішній день накопичений великий досвід застосування інтенсивних систем розробки родовищ, серед яких, перш за все, варто виділити *площадне заводнення* [2], при якому експлуатаційні та нагнітальні свердловини розташовуються певним чином в межах розроблених площ [3].

В наслідок погіршення колекторських властивостей середовища у привибійних зонах в процесі розкриття пласта та його розробки, враховуючи високий загальний фільтраційний опір, доцільно проводити *гідралічний розрив пласта* (ГРП) [4 – 5], в результаті якого розширяється область впливу свердловин і формується зв'язок із зонами підвищеної проникності. Проте проведення процедури ГРП може призвести і до небажаних ефектів: передчасного обводнення продукції експлуатаційних свердловин [6]. При цьому, в залежності від розміщення як свердловин, так і тріщин гідророзриву, виникають різні ситуаційні стани формування течії, що, у свою чергу, вимагає побудови оптимального випадку розробки продуктивних площ.

У даній роботі, в рамках *теорії Баклея-Леверетта*, модифіковано комплексний підхід до розв'язання нелінійних крайових задач багатофазної фільтрації в елементах площадного заводнення на випадок інтенсифікації притоку пластової рідини до свердловини за умови збурення фільтраційної течії тріщинами гідралічного розриву пласта, який дозволяє передбачити характеристики пластової системи при різних умовах впливу на неї та вивчити особливості фільтрації в призабійних зонах.

**Постановка задачі.** Розглянемо процес двофазної ізотермічної фільтрації у горизонтальному пласті-колекторі, обмеженому зовнішнім непроникним контуром, контурами почергово розміщених прямолінійними рядами нагнітальних та експлуатаційних свердловин, пронизаних тріщинами ГРП скінченної проникності (див. рис. 1 а), в умовах відсутності перетоків між відповідними рядами. З огляду на симетрію розміщення свердловин, у пласті  $\tilde{G}_z$  маємо можливість виділити елемент  $G_z \in \tilde{G}_z$ , що містить  $n_*$  нагнітальних свердловин та одну експлуатаційну з відповідними тріщинами та симетричними їх частинами (див. рис. 1 б, де  $d = 2n_*(r^0 + a)$  – відстань між лініями розділу елементів симетрії,  $r^0$  – радіус свердловин,  $a$  – половина відстані між нагнітальними свердловинами,  $h$  – відстань між рядами,  $n_* = 3$ ).

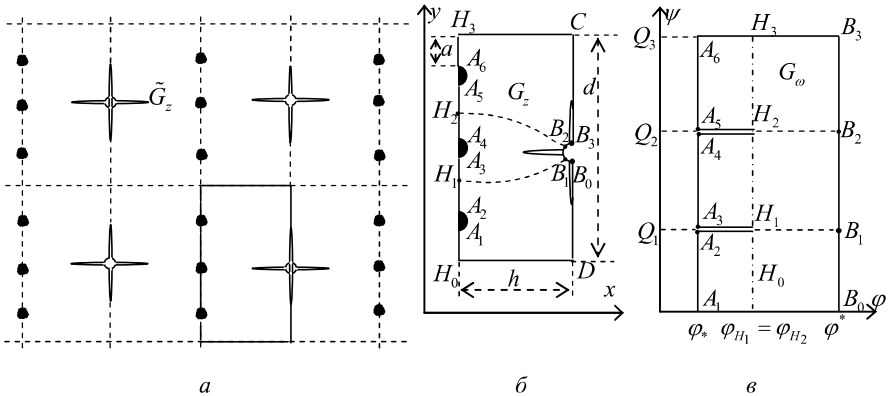


Рис. 1 – Схематичне зображення розробки пласта: а – з виділеним елементом симетрії ((●) – нагнітальна, (○) – експлуатаційна свердловини); б – відповідна фізична область; в – область комплексного квазіпотенціалу.

Закон руху та рівняння нерозривності течії, записані відносно квазіпотенціалу швидкості фільтрації  $\varphi = \varphi(x, y, t) = -p(x, y, t) + \tilde{p}$  (тут  $p(x, y, t)$  – тиск в точці  $(x, y)$  в момент часу  $t$ ,  $\tilde{p}$  – деяке характерне його значення), згідно з [3 – 6] представимо у вигляді:

$$\bar{v}_l = \frac{k\tilde{k}_l}{\mu_l} \text{grad} \varphi, \quad \sigma \frac{\partial s_l}{\partial t} + \text{div} \bar{v}_l = 0, \quad l = \overline{1, 2}, \quad s_1 + s_2 = 1,$$

де  $s_1(x, y, t)$ ,  $s_2(x, y, t)$  – насиченість пласта, відповідно, нафтою і водою (тут і надалі  $t$  та інші величини є безрозмірними);  $\bar{v}_l$ ,  $\mu_l$  – вектор швидкості та коефіцієнт в'язкості  $l$ -ї фази;  $\tilde{k}_1 = s^2$ ,  $\tilde{k}_2 = (1-s)^2$  – відносні фазові проникності ( $s = s_2$ );  $\sigma$  – коефіцієнт пористості;

$$k = k(x, y) = \begin{cases} k_{\kappa}, & (x, y) \in G_z^{\kappa}, \\ k_*, & (x, y) \in G_z \setminus \bigcup_{\kappa} G_z^{\kappa}, \end{cases}$$

– коефіцієнт абсолютної проникності ґрунту, де

$$G_z^{\kappa} = \left\{ (x, y) : \left( \frac{1}{a_{\kappa}} \cdot ((x-h) \cos \alpha_{\kappa} + (y-d/2) \sin \alpha_{\kappa}) \right)^2 + \left( \frac{1}{b_{\kappa}} \cdot (-(x-h) \sin \alpha_{\kappa} + (y-d/2) \cos \alpha_{\kappa}) \right)^2 \leq 1 \right\}$$

– ділянка пласта, що відповідає  $\kappa$ -ій тріщині,  $\kappa = 1, 2, 3, \dots$ , ( $k_{\kappa} = \text{const}$ ). Тріщини ГРП моделюємо фрагментами еліпсів з півосями  $a_{\kappa}$ ,  $b_{\kappa}$  та відповідним кутом спрямування –  $\alpha_{\kappa}$ . Звідси, з урахуванням сумарної швидкості  $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$  фільтраційної течії, маємо:

$$\text{div} \vec{v} = 0, \vec{v} = \bar{k}(s) \cdot \text{grad} \varphi, \sigma \frac{\partial s}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$\varphi|_{L_g} = \varphi^*, \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_L = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\bar{L}} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{L^*} = 0, \varphi|_{L^*} = \varphi^*,$$

$$s|_{L_g} = s^*, s(x, y, 0) = \tilde{s}(x, y),$$

$$\text{де } f(s) = \frac{\mu_1 \tilde{k}_2(s)}{\mu_2 \tilde{k}_1(s) + \mu_1 \tilde{k}_2(s)}, \bar{k}(s) = \frac{k \tilde{k}_1(s)}{\mu_1} + \frac{k \tilde{k}_2(s)}{\mu_2},$$

$$L_g = \{z = x + iy : x = r^0 \cos(\theta), y = r^0 \sin(\theta) + (2g-1)(a+r^0)\},$$

$$3\pi/2 \leq \theta \leq 5\pi/2 \} = \{z : f_g(x, y) = 0, g = \overline{1, n_*}\},$$

$$L^* = \{z = x + iy : x = r^0 \cos(\theta) + h, y = r^0 \sin(\theta) + d/2, \pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2 \} = \{z : f^*(x, y) = 0\},$$

$$L_* = \bigcup_{u=2}^{n_*} A_{2u-2} A_{2u-1}, A_{2u-2} A_{2u-1} =$$

$$= \{z : 2(u-1)(a+r^0) - a \leq y \leq 2(u-1)(a+r^0) + a, x = 0\},$$

$$\bar{L} = A_1 H_0 \cup H_0 D \cup DB_0 = \{z : \tilde{f}(x, y) = 0\},$$

$$\bar{L} = A_{2n_*} H_{n_*} \cup H_{n_*} C \cup CB_{2n_*+1} = \{z : \tilde{f}(x, y) = 0\}, A_1 H_0 = \{z : x = 0, 0 \leq y \leq a\},$$

$$H_0 D = \{z : y = 0, 0 \leq x \leq h\}, DB_0 = \{z : x = h, 0 \leq y \leq d/2\},$$

$$A_{2n_*} H_{n_*} = \{z : x = 0, d-a \leq y \leq d\}, H_{n_*} C = \{z : 0 \leq x \leq h, y = d\},$$

$$CB_{2n_*+1} = \{z : x = h, d/2 \leq y \leq d\}.$$

**Метод комплексного аналізу.** Аналогічно, як у [3], ввівши *функцію течії*  $\psi$ , комплексно спряжену до  $\varphi$ , задача на побудову гідродинамічної сітки, відшукування фільтраційної витрати та інших характерних фільтраційних параметрів за знайденим (фіксованим у даний момент часу) полем насиченості зводимо до квазіконформного відображення

$$\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

однозв'язної області  $G_z$  на відповідну область комплексного квазіпотенціалу

$$G_\omega = \bigcup_{g=1}^{n_*} G_g \cup \bigcup_{g=1}^{n_*-1} \bar{L}_g :$$

$$\bar{k}(s) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \bar{k}(s) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z,$$

$$\varphi|_{L_g} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L_g^*} = \varphi^*, \quad \psi|_{L_g} = 0, \quad \psi|_{L_g} = Q_{n_*}, \quad \psi|_{L_g} = Q_{g-1}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\bar{k}}{\sigma} \frac{\partial f}{\partial s} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial y} \right), \quad s|_{L_g} = s_*, \quad s|_{t=0} = \tilde{s}(x, y), \quad (2)$$

де  $v(x, y) = \sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)}$ ,  $G_g = \{\omega : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, Q_{g-1} < \psi < Q_g,$

$$Q_0 = 0\}, \quad \bar{L}_g = \{\omega : \varphi_{H_g} < \varphi < \varphi^*, \psi = Q_g\}, \quad Q_g - Q_{g-1} = \oint_{L_g} -v_y dx + v_x dy$$

– невідомі сумарні фільтрації витрати з нагнітальних свердловин, а

$$Q = \sum_{g=1}^{n_*} (Q_g - Q_{g-1}) = Q_{n_*}$$

– сумарна витрата на експлуатаційній свердловині. При цьому значення відбору нафти визначається за формулою:

$$\begin{aligned} Q^*(t) &= \oint_{L^*} (1 - f(s)) \cdot (-v_y dx + v_x dy) \approx \\ &\approx (1 - f(\bar{s})) \cdot \oint_{L^*} -v_y dx + v_x dy = (1 - f(\bar{s})) \cdot Q_{n_*}, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $\bar{s}$  – деяке усереднене значення насиченостей на контурі  $L^*$ .

Об'єм добутої нафти від початку витіснення до деякого часу  $t_*$  в елементі симетрії досліджуваного пласта, визначається за формулою:

$$V_{\text{вн}}(t_*) = \int_0^{t_*} Q^*(t) dt, \quad (4)$$

тоді як, об'єм нафти, що міститься в ньому до початку відбору, знайдемо за формулою:

$$V_n = (d \cdot h - \pi \cdot (r^0)^2 \cdot (n_* + 1)/2) \cdot \sigma. \quad (5)$$

Враховуючи формули (4) – (5), залишок нафти  $V_{3l}$  на момент часу  $t_*$  у відповідному елементі, обчислюється за формулою:  $V_{3l}(t_*) = V_n - V_{\text{вит}}(t_*)$ .

Обернену до (1) крайову задачу на квазіконформне відображення  $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$  області  $G_\omega$  на  $G_z$ , а також (як наслідок) рівняння для дійсної  $x = x(\varphi, \psi)$  і уявної  $y = y(\varphi, \psi)$  частин характеристичної функції течії запишемо у вигляді

$$\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (6)$$

$$\tilde{f}(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad \tilde{f}(x(\varphi, Q_{n_*}), y(\varphi, Q_{n_*})) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*,$$

$$f_g(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad Q_{g-1} \leq \psi \leq Q_g,$$

$$x_-(\varphi, Q_{g-1}) = 0, \quad 2(g-1)(a+r^0) - a \leq y_-(\varphi, Q_{g-1}) \leq y_{H_{g-1}},$$

$$x_+(\varphi, Q_{g-1}) = 0, \quad y_{H_{g-1}} \leq y_+(\varphi, Q_{g-1}) \leq 2(g-1)(a+r^0) + a, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_{H_{g-1}},$$

$$f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_{n_*}, \quad g = \overline{2, n_*}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left( \bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (8)$$

Використавши відповідні формули переходу

$$J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi},$$

умови (6) і формули для обчислення компонент сумарної швидкості

$$v_x = \frac{\bar{k}}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad v_y = -\frac{\bar{k}}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial x}{\partial \psi},$$

задачу для насиченості (2) перепишемо так:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{v^2}{\sigma k} \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \varphi}, \quad (9)$$

$$s(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = s_*, \quad s(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), 0) = \tilde{s}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)),$$

$$0 \leq \psi \leq Q, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \quad (10)$$

де рівняння (9) є фактично просторово-одновимірним, адже змінна  $\psi$  тут

входить як параметр.

Очевидно, що розв'язок відповідних задач про побудову гідродинамічної сітки та відшукання поля насиченості дозволяє спрогнозувати темпи обводнення експлуатаційних свердловин та визначити особливості експлуатації того чи іншого родовища за умови запроектованого розміщення свердловин та тріщин ГРП на них. У цих умовах виникає проблема оптимізації відбору нафти [1 – 3,6], в залежності від заданих параметрів тріщин ГРП на експлуатаційній свердловині. При цьому виникає також потреба розв'язання більш ширших задач, коли приходиться встановлювати їх оптимальне розміщення, яке задовольняло б ті чи інші критерії. Зокрема, ставиться задача підібрати таке значення величин  $a_\lambda$ ,  $b_\lambda$  та  $\alpha_\kappa$ , за умов сталості  $a$  та  $h$ , так щоб час прориву  $t = \tilde{t}$  води до експлуатаційної свердловини та об'єм нафти  $V_{\text{вн}}(t)$  були максимальними, а в наступні моменти часу  $t > \tilde{t}$  об'єм води в сумарній витраті був мінімальним.

**Різницевий аналог та алгоритм розв'язання задачі** будуємо як у [3]. На початковому етапі знаходимо величини параметрів  $\varphi_{H_1}$ ,  $\varphi_{H_2}$ , далі послідовно розв'язуємо серію проміжних задач, що відповідають рис. 1 в. Вузли  $(\varphi_i, \psi_j)$  сіткової області  $G_\omega$  визначаємо так:

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_* + i\Delta\varphi_1^g, & i = \overline{0, n_1^g}, \Delta\varphi_1^g = (\varphi_{H_g} - \varphi_*) / (n_1^g + 1), \\ \varphi_H + (i - n_1^g - 1)\Delta\varphi_2^g, & i = \overline{n_1^g + 1, n}, \Delta\varphi_2^g = (\varphi^* - \varphi_{H_g}) / (n_2^g + 1), \end{cases}$$

$$\psi_j^g = j \cdot \Delta\psi_g, \quad (\varphi_i, \psi_j^g) \in G_\omega^g,$$

де  $j = \overline{\tilde{m}_1, \tilde{m}_2}$ ,  $\tilde{m}_1 = \sum_{l=0}^{g-1} m_l + g - 1$ ,  $\tilde{m}_2 = \sum_{l=0}^g m_l + g - 1$ ,  $\Delta\psi_g = (Q_g - Q_{g-1}) / m_g$ ,

$$m_g = \sum_{l=1}^g m_l + g - 1, \quad g = \overline{1, n_*}, \quad Q_0 = 0, \quad m_0 = 0, \quad n = n_1^g + n_2^g + 1,$$

$$m = \sum_{l=1}^{n_*} m_l + n_* - 1, \quad m_l, n_1^g, n_2^g \in N.$$

Рівняння (8) апроксимуємо, використовуючи *метод скінченних об'ємів* [7], наступним чином:

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= (a_n x_{i,j+1} + a_s x_{i,j-1} + a_e x_{i-1,j} + a_s x_{i+1,j}) / a_p, \\ y_{i,j} &= (a_n y_{i,j+1} + a_s y_{i,j-1} + a_e y_{i-1,j} + a_s y_{i+1,j}) / a_p, \end{aligned} \quad (11)$$

де  $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $a_n = k_n \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+}$ ,  $a_s = k_s \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-}$ ,  $a_e = \frac{\Delta\psi}{k_e \Delta\varphi_+}$ ,

$$a_w = \frac{\Delta\psi}{k_w\Delta\varphi_-}, \quad a_p = a_n + a_s + a_e + a_w, \quad \Delta\varphi = \frac{\Delta\varphi_- + \Delta\varphi_+}{2}, \quad \Delta\psi = \frac{\Delta\psi_- + \Delta\psi_+}{2},$$

$$k_n = \frac{2k_{i,j}k_{i,j+1}}{k_{i,j} + k_{i,j+1}}, \quad k_s = \frac{2k_{i,j}k_{i,j-1}}{k_{i,j} + k_{i,j-1}}, \quad k_e^{-1} = 0.5(k_{i,j}^{-1} + k_{i-1,j}^{-1}), \quad k_w^{-1} = 0.5(k_{i,j}^{-1} + k_{i+1,j}^{-1}).$$

Вибір величин  $\Delta\varphi_-$ ,  $\Delta\varphi_+$ ,  $\Delta\psi_-$ ,  $\Delta\psi_+$  визначається належністю вузла  $(\varphi_i, \psi_j^g)$  тій чи іншій підобласті сіткової області  $G_\omega$  [3]. Наприклад, якщо  $\varphi_i = \varphi_{H_1}$ ,  $\psi_j^g = 0$ , то  $\Delta\varphi_- = \Delta\varphi_1$ ,  $\Delta\varphi_+ = \Delta\varphi_2$ ,  $\Delta\psi_+ = \Delta\psi_1$ ,  $\Delta\psi_- = \Delta\psi_1$ . Апроксимації крайових умов запишемо так:

$$f_g(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, \quad j = \overline{\tilde{m}_1, \tilde{m}_2}, \quad f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m},$$

$$x_{i, m_{g-1}} = 0, \quad 2(g-1)(a+r^0) - a \leq y_{i, m_{g-1}} \leq y_{H_{g-1}},$$

$$x_{i, m_g} = 0, \quad y_{H_{g-1}} \leq y_{i, m_g} \leq 2(g-1)(a+r^0) + a, \quad i = \overline{0, n_1},$$

$$\tilde{f}(x_{i,0}, y_{i,0}) = 0, \quad \tilde{f}(x_{i, m_p}, y_{i, m_p}) = 0, \quad i = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, m}, \quad g = \overline{2, n_*}. \quad (12)$$

Тут, як і в [6], комплексну спряженість гармонічних функцій  $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$  забезпечують умови ортогональності приграничних нормальних векторів до відповідних дотичних вздовж межі області  $G_z$ . Їх різницеві аналоги на контурах свердловин мають вигляд:

$$(4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) +$$

$$+ (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, \quad j = \overline{\tilde{m}_1, \tilde{m}_2},$$

$$(3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) +$$

$$+ (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j})(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0, \quad j = \overline{0, m}. \quad (13)$$

Невідомі наближені значення витрат  $Q_g$  та потенціалу  $\varphi_{H_g}$  в точках розходження течії в процесі ітерацій шукаємо за формулами:

$$\varphi_{H_g} = \varphi_* + (n_1^g + 1)\Delta\psi_1\gamma_1^g, \quad Q_g = m_g\Delta\psi_g, \quad \text{де } \Delta\psi_g = \frac{\Delta\varphi_1\gamma_2^g + \Delta\varphi_2\gamma_1^g}{2\gamma_1^g\gamma_2^g},$$

а  $\gamma_i^g$  одержуємо на підставі умови *квазіконформної подібності в малому* відповідних елементарних чотирикутників двох областей:

$$\gamma_1^g = \sum_{i=0, j=\tilde{m}_1}^{n_1, \tilde{m}_2-1} \frac{\gamma_{i,j}}{m_g(n_1+1)}, \quad \gamma_2^g = \sum_{i=n_2+1, j=\tilde{m}_1}^{n, \tilde{m}_2-1} \frac{\gamma_{i,j}}{m_g n_2}, \quad \gamma_{i,j} = \frac{1}{k_{i+1/2, j+1/2}} \frac{a_{i,j} + a_{i,j+1}}{b_{i,j} + b_{i+1,j}},$$

$$g = \overline{1, n_*}, \quad a_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2},$$

$$b_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}. \quad (14)$$

Рівняння (8) апроксимуємо різницевою схемою *проти потоку* [3] наступним чином:

$$\hat{s}_{i,j} = s_{i,j} - \frac{\tau v_{i,j}^2}{\sigma \bar{k}_{i,j} \Delta \varphi_l^g} f'(s_{i-1/2,j})(s_{i,j} - s_{i-1,j}), \quad s_{i-1/2,j} = \frac{s_{i,j} + s_{i-1,j}}{2},$$

$$j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, n_1^g + 1}, \quad l = 1, \quad i = \overline{n_1^g + 2, n}, \quad l = 2, \quad (15)$$

де  $\tau$  – крок за часом,  $s_{i,j}$ ,  $\hat{s}_{i,j}$  – насиченості у відповідні моменти часу,  $v_{i,j}$  – швидкість (знаходимо, як у роботі [7]). Межову та початкову умови для насиченості в сітковій області запишемо так:  $s_{0,j} = s_*$ ,  $s(x_{i,j}, y_{i,j}, 0) = \tilde{s}(x_{i,j}, y_{i,j})$ ,  $j = \overline{0, m}$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Задавши крок  $\tau$ , параметри розбиття  $n_1^g$ ,  $n_2^g$ ,  $m_g$ ,  $g = \overline{1, n_*}$ , області  $G_\omega$  та точності  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  роботи алгоритму, початкові наближення координат межових вузлів (так, щоб виконувалися умови (11)) і початкові наближення координат внутрішніх вузлів  $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ , за формулами (13) знаходимо наближення величин  $\gamma_l^g$ . Далі проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки шляхом розв'язання (10) відносно  $x_{i,j}$  та  $y_{i,j}$ .

Після цього підправляємо межові вузли за умов фіксації навколишніх межових та примежових, використовуючи умови ортогональності, та знаходимо наближення величин  $Q_g$ ,  $\varphi_{H_g}$ . Серед умов завершення алгоритму побудови гідродинамічної сітки (відшукування невідомих фільтраційних параметрів, зокрема, поля швидкості) на даному ітераційному етапі є:

$$\text{стабілізація витрат } Q_g \quad (|Q_g^{(k+1)} - Q_g^{(k)}| < \varepsilon_1);$$

стабілізація межових вузлів  $(\max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2} < \varepsilon_2)$  тощо.

У випадку невиконання хоча б однієї із цих умов відмічаємо на гідродинамічній сітці ділянки порушення квазіконформності. Використовуючи поле швидкостей та поле насиченості з попереднього ітераційного кроку за часом (з урахуванням межової умови), згідно з (13) знаходимо новий розподіл насиченості у пласті та повторюємо кроки алгоритму.

**Числові розрахунки** проведемо при різних значеннях характерних параметрів, які задають геометрію області фільтрації, коли на одну експлуатаційну свердловину припадає дві нагнітальних, за умови, що



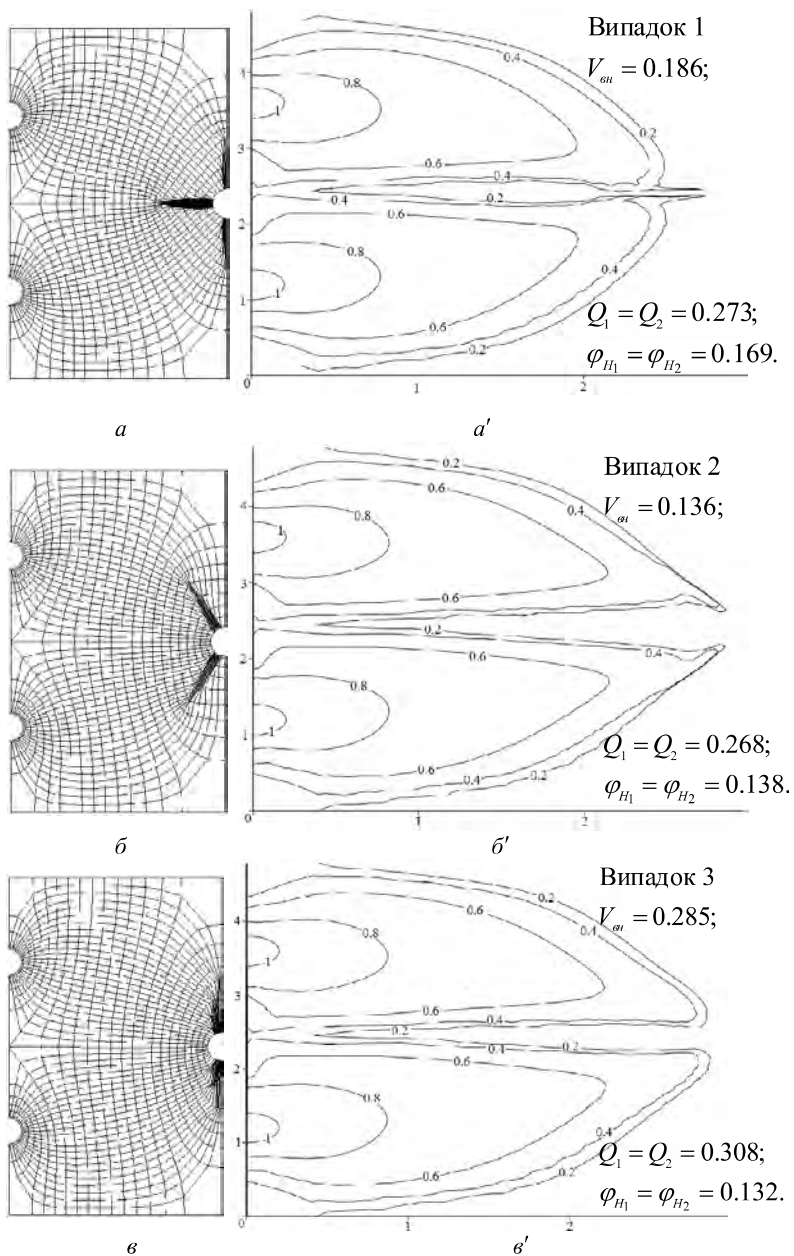


Рис. 2 – Гідродинамічні сітки (*a*, *б*, *в*) та, відповідні їм, розподіли насиченості елементів симетрій у момент часу  $\tilde{t} = 4.64$  (*a'*),  $\tilde{t} = 4.92$  (*б'*),  $\tilde{t} = 5.98$  (*в'*).

$$\varphi_* = 0, \varphi^* = 1, r^0 = 0.2, a = 1, h = 3, d = 4.8, k_* = 1, k_\lambda = 10, \\ n_1 \times n_2 \times m_1 \times m_2 = 4 \times 20 \times 25 \times 25, \mu_1 = 2, \mu_2 = 1, \sigma = 0.5, \tilde{s}(x, y) = 0, \\ s_* = 1, \tau = 0.01.$$

На рис. 2 а – в зображено гідродинамічні сітки елементів симетрії, у початковий момент часу, а на рис. 2 а' – в' – відповідний розподіл насиченості у момент часу  $t = \tilde{t}$  при таких параметрах тріщин гідророзриву:

$$a_1 = b_2 = 0.1, b_1 = a_2 = 1, \alpha_1 = \alpha_2 = 0^\circ \text{ (Випадок 1);}$$

$$a_1 = a_2 = 0.1, b_1 = b_2 = 1, \alpha_{1,2} = \pm 45^\circ \text{ (Випадок 2);}$$

$$a_1 = 0.18, b_1 = 1, \alpha = 0^\circ \text{ (Випадок 3).}$$

На рис. 3 зображено залежності сумарної фільтраційної витрати  $Q_{n*}(t)$  та значень відбору нафти  $Q^*(t)$  від часу  $t \in [0, t_*]$  ( $t_* = 18.62$ , далі проводити розрахунки практично немає сенсу, через різке зниження відбору нафти) для вищеописаних характерних випадків.

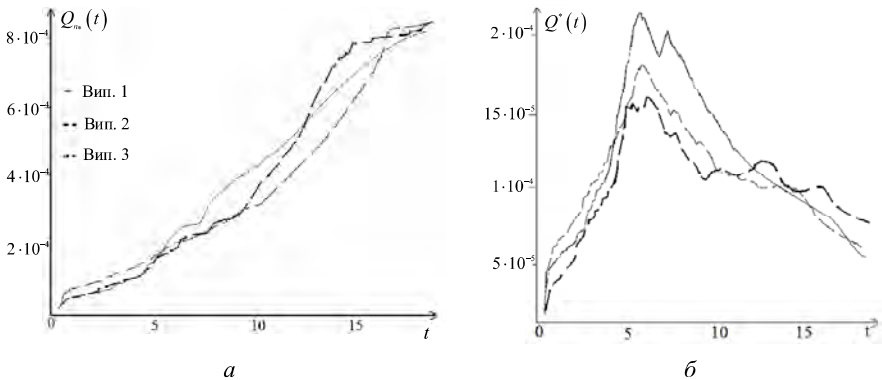


Рис. 3 – Графік залежності сумарної витрати (а) та значення відбору нафти (б) від часу у відповідних елементах симетрії.

За підрахунками, згідно формул (4)-(5), об'єм нафти, яка знаходилась у цих елементах симетрії до початку витіснення –  $V_n = 7.106$ , а об'єм добутої нафти та її залишок у пласті за час протікання процесу, відповідно, становить

$$V_{вн} = 3.965, V_{зл}(18.62) = 3.141 \text{ (для випадку 1),}$$

$$V_{вн} = 3.428, V_{зл}(18.62) = 3.678 \text{ (для випадку 2),}$$

$$V_{вн} = 3.789, V_{зл}(18.62) = 3.317 \text{ (для випадку 3).}$$

Згідно експериментального дослідження, бачимо, що при  $t > \tilde{t}$ , об'єм відбору нафти різко зменшується, а значення об'єму витісняючого реагенту (що потрапляє у експлуатаційну свердловину) в сумарній фільтраційній витраті у кожному з випадків зростає по-різному. Це пояснюється суттєвою рі-

знищую коефіцієнтів в'язкості фаз, відносної фазової проникності, параметрів та розміщень тріщин ГРП: у випадку 1 відбувається швидке обводнення експлуатаційної свердловини через одну з тріщин і виникає ризик утворення так званих *зон застою нафти*; у випадку 2 цей ризик значно зменшується, однак збільшується час для повного витіснення нафти; у випадку 3 спостерігаємо надто повільний перебіг процесу відбору нафти («близькість» відборів, особливо для випадків 1 та 3, пояснюється рівністю площ тріщин ГРП). Також підтверджується факт, що напрямленість тріщин ГРП в *поперечному напрямку* (стосовно лінії розміщення нагнітальних свердловин) пришвидшує час прориву витісняючого реагенту до експлуатаційної свердловини (хоча забезпечує певне зростання значень відбору нафти на початкових часових етапах), а їх розміщення вздовж ліній свердловин – сприяє зменшенню зон застою нафти. При цьому підкреслимо, що зони застою нафти в даних випадках є близькими до так званих *застійних зон* (ділянок пластів, в кожній точці яких величина градієнта є меншою деякого критичного значення).

**Висновки.** У роботі поширено комплексний підхід до розв'язання нелінійних крайових задач двофазної фільтрації в елементах площадного заводнення на випадок ідентифікації притоку пластової рідини до свердловини за допомогою тріщин гідравлічного розриву. Проведено комплексний аналіз числових розрахунків перерозподілу відповідних фільтраційних характеристик: поля насиченості, фільтраційних витрат, квазіпотенціалу швидкості тощо та встановлено особливості протікання процесу витіснення при керуванні ним шляхом оптимізації параметрів тріщин ГРП. Відзначимо, що розроблений підхід дозволяє автоматизувати побудову гідродинамічної сітки в умовах гідророзриву, передбачити характеристики пластової системи при спеціальних умовах впливу на неї, оптимізувати різного роду фільтраційні параметри при виборі розміщення нагнітальних та експлуатаційних свердловин, зокрема, встановити положення *точок призупинки*, в околі яких виникають зони малих швидкостей, значення об'єму відбору нафти за час витіснення та її залишок.

**Список літератури:** 1. *Каневская Р. Д.* Математическое моделирование разработки месторождений нефти и газа с применением гидравлического разрыва пласта. – М.: ООО "Недра-Бизнесцентр", 1999. – 212 с. 2. *Фазлыев Р. Т.* Площадное заводнение нефтяных месторождений. – М.: Ижевск, ИКИ, НИЦ РХД, – 2008, – 256 с. 3. *Бомба А. Я.* Методи комплексного аналізу: Монографія / А. Я. Бомба, С. С. Каштан, Д. О. Пригорницький, С. В. Яроцук. – Рівне: НУВГП, 2013. – 415 с. 4. *Бомба А. Я.* Комплексне дослідження поведінки системи «свердловини-тріщини» при витісненні однієї рідини іншою у горизонтальному пласті / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук, С. В. Яроцук // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: технічні науки. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет, – 2012. – Вип.6. – С. 11 – 26. 5. *Бомба А. Я.* Метод комплексного аналізу дослідження двухфазной фильтрации в горизонтальных пластах с учетом гидравлического разрыва / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук, С. В. Яроцук // Электронное моделирование. – 2013. – Т. 35, № 2. – С. 25 – 34. 6. *Бомба А. Я.* Метод комплексного аналізу дослідження процесу багатофазної фільтрації у випадку площадного заводнення за

умов гідророзриву / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 10 (19). – Рівне: РДГУ, 2013. – С. 5 – 19. 7. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М.: Наука, – 1983. – 616 с.

Надійшла до редколегії 18.10.2013

---

УДК 519.876.5:530.182:553.98

**Комплексний аналіз поведінки системи «свердловини-тріщин-пласт» в елементах площадного заводнення / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2013. – №54 (1027). – С. 4 – 15. Бібліогр.: 7 назв.**

С использованием теории Баклея-Лeverетта модифицирован комплексный подход моделирования нелинейных процессов двухфазной фильтрации в элементах площадного заводнения на случай интенсификации притока пластовой жидкости в скважину с помощью трещин гидравлического разрыва. Проведен анализ числовых расчетов перераспределения соответствующих фильтрационных характеристик: поля насыщенности, фильтрационных расходов, квазипотенциала скорости и т.д., установлены особенности протекания процесса вытеснения при управлении им путем изменения параметров трещин гидравлического разрыва пласта.

**Ключевые слова:** квазиконформное отображение, модель Баклея-Лeverетта, трещины гидроразрыва, площадное заводнение.

With the use the theory of Buckley-Leverett modified integrated approach of modeling of nonlinear processes two-phase filtration in the elements of pattern flooding in case of authentication of influx of stratal liquid in a mining hole at indignation of lauter flow the cracks of hydraulic break. The analysis of the numerical calculations of the corresponding redistribution of filtration characteristics: saturation field, lauter expenses, of quasi-potential the velocity et cetera, the specific features of the process in the management of their displacement by changing the parameters of cracks of hydraulic break.

**Key words:** quasi-conformal mapping, Buckley-Leverett model, cracks of hydraulic break, pattern flooding.

УДК 517.85

**В.А. ВАНИН**, д-р техн. наук, проф., ИПМаш НАНУ, Харьков

## **МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ СО СЛАБОЙ АППРОКСИМАЦИЕЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА**

Предлагаются алгоритмы построения разностных схем, слабо аппроксимирующие с повышенным порядком нелинейные законы сохранения. Их основой является интегральное представление разностных схем и соответствующие им интегральные приближения различных порядков.

**Ключевые слова:** разностная схема, порядок схемы, слабая аппроксимация, интегральные представления, законы сохранения.

---

© В. А. Ванин, 2013