

Л. М. ДОРУНДЯК, асп., НЛТУ України, Львів;

Є. М. ЛЮТИЙ, д-р. техн. наук, проф., НЛТУ України, Львів;

Л. О. ТИСОВСЬКИЙ, канд. фіз.-мат. наук, доц., НЛТУ України, Львів;

А. В. ЛЯШЕНИК, канд. техн. наук, доц., Коломийський політехнічний
коледж

МАТЕМАТИЧНА ПОСТАНОВКА І ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ЗАДАЧІ ПРО РУХ ПОВІТРЯНОГО ПОТОКУ В ЦИКЛОНІ

Представлено повну систему рівнянь гідрогазодинаміки для руху повітряного потоку повітря в циклоні. Записано граничні умови на стінках циклона і вихлопної труби. Проведено числовий аналіз задачі та описано картину руху повітряного потоку в сепараторі.

Ключові слова: циклон, математична модель, гідрогазодинаміка, граничні умови, початкові умови.

Вступ. Перші згадки про циклони, як пристрої для очищення запиленого повітря, датуються 1896 роком. Проте, попри тривалий час експлуатації, простоту конструкції, наявності великої кількості моделей таких сепараторів, процес створення нових апаратів ґрунтується, здебільшого, на основі досвіду конструктора та результатів інструментальних досліджень. Теоретичні дослідження руху повітряного потоку у сепараторі дадуть змогу створити нові ефективні конструкції таких апаратів.

Аналіз останніх досліджень. З моменту винайдення циклонів погляди на процес уловлення пилу постійно зазнавали змін. Існує кілька різних теорій, які описують процес уловлення твердої частинки пилу із закрученого потоку. У роботі [1] описано суть цих теорій та проаналізовано їх недоліки. Проте й на сьогодні ще не існує загальної теорії, яка б повністю описувала процес циклонування. З огляду на високу енергоємність процесу та недостатню його ефективність можна дійти до висновку про те, що створення нових підходів до моделювання роботи циклона, з метою глибшого аналізу процесів та розроблення оптимальної конструкції сепаратора, є актуальним завданням, яке має важливе теоретичне і практичне значення.

У статті [2] розроблено математичну модель руху повітряних потоків у циклоні на основі *рівнянь Нав'є-Стокса, рівняння нерозривності потоку, рівнянь стану і рівняння балансу тепла*. У даній статті основну увагу приділено початковим та крайовим умовам, які необхідні для коректної постановки задачі, що розглядається.

Мета та задачі досліджень. Метою статті є отримання математичної моделі руху повітряних потоків у циклоні, яка дозволить виконати аналіз нових конструкцій таких апаратів на етапі їх розроблення.

Математична модель. Існує велика кількість різноманітних конструкцій циклонів, проте в переважній своїй більшості корпуси цих пиловловлювачів є комбінацією циліндричних і конічних поверхонь, а тому з практичної точки зору для дослідження аеродинамічних процесів, що відбуваються всередині сепараторів, доцільно використати не прямокутну декартову систему координат (x, y, z), а циліндричну (r, θ, z). Основні рівняння можна записати наступним чином.

Рівняння Нав'є-Стокса є основними рівняннями динаміки в'язкого газу і у векторному записі мають наступний вигляд

$$\rho(d\vec{V}/dt) = \rho\vec{F} - \text{grad}(p + 2\mu \text{div}\vec{V}/3) + 2\text{Div}(\mu\dot{S}). \quad (1)$$

В циліндричній системі координат вони набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \cdot \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r} = F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\nabla^2 V_r - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right); \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \cdot \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 V_z; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{V_r V_\theta}{r} = F_\theta - \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\nabla^2 V_\theta - \frac{V_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right)$$

де $\vec{V}(V_r, V_\theta, V_z)$ – вектор швидкості точки суцільного середовища з координатами r, θ, z в момент часу t ; $V_r(r, \theta, z, t)$, $V_\theta(r, \theta, z, t)$, $V_z(r, \theta, z, t)$ – проєкції вектора швидкості на осі нерухомої системи координат; $\rho = \rho(r, \theta, z, t)$ – густина середовища в точці з координатами (r, θ, z) в момент часу t ; $\vec{F} = (F_r, F_\theta, F_z)$ – вектор густини масової сили;

$$\text{div}\vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

– дивергенція вектора швидкості \vec{V} в циліндричній системі координат;

$$\text{grad}\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$$

– градієнт скалярного поля функції φ ;

$$\dot{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\theta}{r} \right) \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\theta}{r} \right) \right) & \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} \right) & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

– тензор деформації.

Дивергенція тензора $T \text{Div}T$ в циліндричній системі координат визначається співвідношеннями

$$\begin{aligned}
 (\text{Div}T)_r &= \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zr}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r}, \\
 (\text{Div}T)_\theta &= \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial z} + \frac{T_{r\theta} - T_{\theta r}}{r}, \\
 (\text{Div}T)_z &= \frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zr}}{\partial z} + \frac{T_{rz}}{r}.
 \end{aligned}$$

Рівняння нерозривності є математичним записом закону збереження маси певного об'єму суцільного середовища.

$$\partial \rho / \partial t + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0, \quad (3)$$

і у циліндричній системі координат має вигляд:

$$r \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_r r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho V_\theta)}{\partial \theta} + r \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dV_r}{dt} = \dot{V}_r &= \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r}; \\
 \frac{dV_\theta}{dt} = \dot{V}_\theta &= \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{V_r V_\theta}{r}; \\
 \frac{dV_z}{dt} = \dot{V}_z &= \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z}
 \end{aligned}$$

– проєкції вектора прискорення на осі нерухомої циліндричної системи координат.

Рівняннями стану в механіці суцільного середовища називають рівняння, що зв'язують між собою тиск, температуру, густину та, можливо, інші фізичні характеристики середовища і входять у повну систему залежностей для опису руху деякого об'єму речовини. У випадку вивчення руху в'язкого газу припускають, що по-перше, газ є ідеальним, тобто тиск p , густина ρ і абсолютна температура T задовольняють закону Клапейрона

$$p = \rho RT, \quad (5)$$

де R – газова постійна (8,31441 Дж/(моль·К)).

Якщо припустити, що коефіцієнт теплоємкості при постійному тиску c_p є константою, то рівняння Клапейрона можна переписати в наступному вигляді

$$p/\rho = Rh/c_p, \quad (6)$$

де h – ентальпія (теплова функція), яка задається співвідношенням

$$h = \int_0^T c_p(T) dT.$$

Динамічний коефіцієнт в'язкості μ є функцією тільки абсолютної температури T . Найчастіше при цьому використовується степенева залежність

$$\mu/\mu_0 = (T/T_0)^n, \quad (7)$$

де T_0 і μ_0 – відповідно абсолютна температура і коефіцієнт в'язкості, що відповідають деякому початковому стану газу

$$n = \begin{cases} 1, & T < 90K \\ 8/9, & 90 < T < 250K \\ 3/4, & 250 < T < 600K \\ 1, & T > 600K \end{cases}$$

по Карману в середньому приймають $n = 0,76$.

Невід'ємним атрибутом рівнянь руху в'язкого газу є рівняння балансу тепла, яке можна представити наступним чином

$$\rho \frac{d}{dt} \left(h + \frac{V^2}{2} \right) = \rho \vec{P} \cdot \vec{V} + \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(2\mu \vec{V} \dot{S}) - \frac{2}{3} \mu \vec{V} \operatorname{div} \vec{V} + \frac{\mu}{\sigma} \operatorname{grad} h, \quad (8)$$

де $\sigma = \mu c_p / \lambda$ – число Прандтля; λ – коефіцієнт теплопровідності газу.

Таким чином, для визначення семи невідомих u, v, w, p, ρ, μ, T отримали систему семи рівнянь, які складають замкнуту систему рівнянь руху в'язкого газу.

Зазначимо при цьому, що для в'язкого газу повинні також виконуватися наступні припущення:

– газ є ньютонівським середовищем, тобто має місце узагальнений закон Ньютона про лінійний зв'язок між тензором напружень P і тензором швидкостей деформації \dot{S} :

$$P = 2\mu \dot{S} - \left(p + 2\mu \operatorname{div} \vec{V} / 3 \right) E,$$

– коефіцієнти теплоємності c_p і c_v , а значить і їх відношення k , не залежить від абсолютної температури газу і є фізичними константами газу.

– коефіцієнт теплопровідності газу λ пропорційний динамічному коефіцієнту в'язкості μ , так що число Прандтля σ розглядається як фізична постійна газу, тобто $\sigma = \operatorname{const}$.

При цьому потік повітря в циклоні вважається гомогенним середовищем.

Припустимо, що число Рейнольдса Re буде меншим за деяке критичне значення $Re_{кр}$ ($Re < Re_{кр}$), тобто розглядається ламінарний рух середовища.

Для отримання розв'язку в конкретній області при інтегруванні системи диференціальних рівнянь потрібно задати початкові і крайові умови.

Початкові умови. Під початковими умовами розуміють завдання в початковий момент часу поля швидкостей, температури і тиску. В момент часу $t = 0$ частинки потоку повітря знаходяться у перерізі $z = 0$ (рис. 1). Якщо позначити швидкість потоку повітря у вхідному патрубку циклона V , то значення складових швидкості потоку повітря для циклона з гвинтовим вхідним патрубком дорівнюють:

$$V_\theta = V \cdot \cos \alpha; \quad V_z = \sin \alpha; \quad V_r = 0,$$

де α – кут нахилу вхідного патрубка до горизонту (рис. 1).

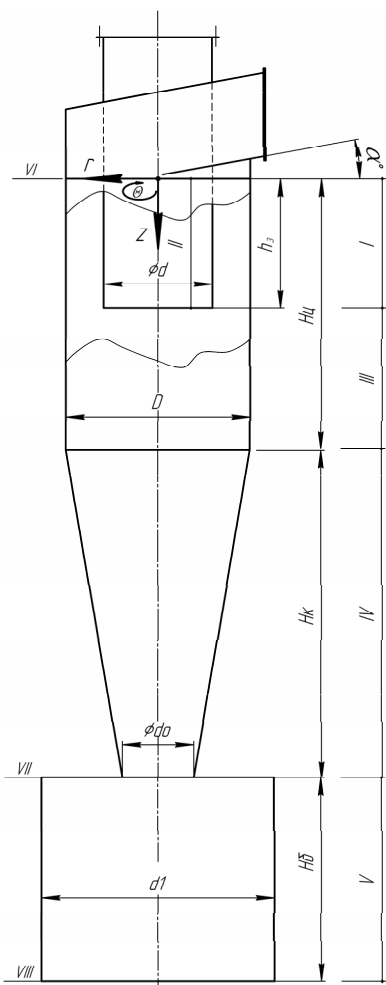


Рис. 1 – Основні ділянки циклона для постановки граничних умов.

Швидкість потоку повітря у вхідному патрубку V , як правило, знаходиться у межах $V = 17 - 25$ м/с в залежності від конструкції циклона та технологічних параметрів процесу циклонування.

Температуру повітряного потоку у початковий момент часу вважаємо рівною температурі зовнішнього середовища $T = T_{zc}$, а значення тиску визначається аеродинамічною характеристикою вентилятора.

Межові умови залежать від форми циклона та від особливостей його функціонування. Як приклад розглянемо найпростіший вид межових умов, а саме *умови прилипання і непроникності потоку повітря на поверхнях*, і знехтуємо теплообміном між стінками апарата і довкіллям. Вважатимемо також, що статичний тиск на виході з вихлопної труби циклона дорівнює атмосферному (атмосферний тиск при нормальних умовах $p_a = 101325$ Па).

Поверхню циклона можна умовно поділити на п'ять вертикальних ділянок (I–V) і 3 горизонтальні (VI–VIII), (рис. 1).

Ділянка I – простір між вихлопною трубою та циліндричною частиною апарата. Вона обмежена двома циліндричними поверхнями: $r = d/2 + 0$ та $r = D/2$, де d – діаметр вихлопної труби, D – діаметр циліндричної частини циклона. Величина

z може набувати значення з діапазону $(0; h_3)$.

$$\text{Тут } V_\theta = 0; V_z = 0; V_r = 0; \partial T / \partial r = 0.$$

Ділянка II – простір всередині вихлопної труби: $r = d/2 - 0$, $0 < z < h_3$.

$$V_\theta = 0; V_z = 0; V_r = 0; \partial T / \partial r = 0.$$

Ділянка III – простір, який розміщений між нижнім краєм вихлопної труби та початком конічної частини. Її границя $r = D/2$; $h_3 < z < H_4$.

а граничні умови мають вигляд $V_\theta = 0; V_z = 0; V_r = 0; \partial T / \partial r = 0$.

Ділянка IV – конічна частина апарата. Тут значення r зменшується від $r = D/2$ (при $z = H_u$) до $r = d_0/2$ (при $z = H_u + H_k$). Тому значення r слід розглядати як функцію від z , а саме

$$r = (D - d_0)z/2H_k + [D(H_k + H_u) - d_0H_u]/2H_k, \quad H_u \leq z \leq (H_k + H_u),$$

а граничні умови набувають вигляду $V_\theta = 0$; $V_z = 0$; $V_r = 0$; $\partial T/\partial n = 0$.

Ділянка V – бункер. Тут $r = d_1/2$; $H_u + H_k \leq z \leq H_u + H_k + H_\delta$.

Граничні умови: $V_\theta = 0$; $V_z = 0$; $V_r = 0$; $\partial T/\partial r = 0$.

На горизонтальній поверхні VI (рис.1): $d/2 < r < D/2$; $z = 0$;

$$V_\theta = V(r) \cos \alpha; \quad V_z = V(r) \sin \alpha; \quad V_r = 0 \quad \partial T/\partial z = 0.$$

При $0 < r < d/2$; і $z = 0$ повітряний потік поводитьсь відповідно до закону обертання твердого тіла [4], тобто $V_\theta = \omega r$. На основі досліджень, які представлені у роботах [5, 6] будемо вважати значення V_z сталим у перерізі вихлопної труби, а значення радіальної складової – рівним нулю. Тоді $V_z = 4Vab/\pi d^2$, де a, b – відповідно довжина і ширина вхідного патрубку циклона і $V_r = 0$. $\partial T/\partial z = 0$.

На горизонтальній поверхні VII (рис. 1):

$$d_0/2 < r < d_1/2; \quad z = H_k + H_u, \quad V_\theta = 0; \quad V_z = 0; \quad V_r = 0; \quad \partial T/\partial z = 0.$$

На горизонтальній поверхні VIII (рис.1):

$$0 < r < d_1/2; \quad z = H_k + H_u + H_\delta; \quad V_\theta = 0; \quad V_z = 0; \quad V_r = 0; \quad \partial T/\partial z = 0.$$

Таким чином, співвідношення, що приведені вище, представляють собою повну систему залежностей для дослідження руху повітря в циклоні. Було проведено числовий розв'язок задачі для циклона ЦН-15 з геометричними параметрами, які представлено у табл. 1.

Таблиця 1. Геометричні параметри границь циклона

Параметр	Позначення	Значення, мм
1. Діаметр циклона	D	400
2. Діаметр вихлопної труби	d	220
3. Діаметр пиловипускного отвору	d_0	150
4. Діаметр бункера	d_1	600
5. Висота циліндричної частини	H_u	650
6. Висота конічної частини	H_k	800
7. Висота бункера	H_δ	450
8. Глибина занурення вихлопної труби	h_3	316

Швидкість повітряного потоку у вхідному патрубку складала 18 м/с.

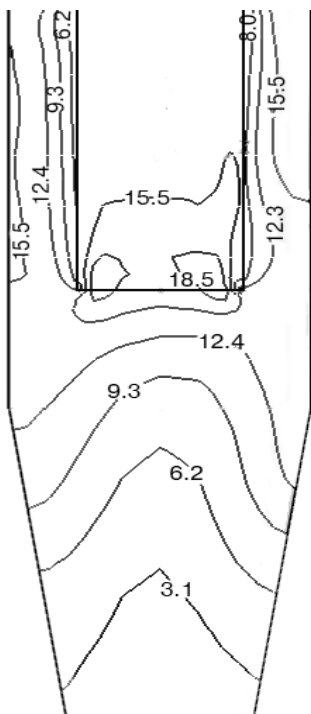


Рис. 2 – Ізолінії швидкості повітряного потоку у площині, яка проходить через вісь циклона.

Аналіз отриманих результатів. На рис. 2 представлено ізолінії швидкості повітряного потоку у вертикальному перерізі, який проходить через вісь циклона. Найвищі значення швидкості (близько 18,5 м/с) повітряного потоку спостерігаються поблизу краю вихлопної труби.

Характер розподілу швидкості у просторі між вихлопною трубою та зовнішньою стінкою циклона є практично рівномірним. Тільки безпосередньо поблизу стінки вихлопної труби значення швидкості знижується до 6,2–8,0 м/с.

Картина руху повітряного потоку у площині VI представлена на рис. 3, а, 5 та 6. Після потрапляння у циклон найбільшого значення вона набуває на ділянці поблизу вихлопної труби (18,7 м/с). Зниження значення швидкості спостерігається у напрямі до периферії апарата. Після того, як повітряний потік здійснив поворот на 90°, зміна значення V набуває іншого характеру, стає більш рівномірною. У вихлопній трубі значення швидкості потоку є близьким до постійного рівня і складає 12–13 м/с.

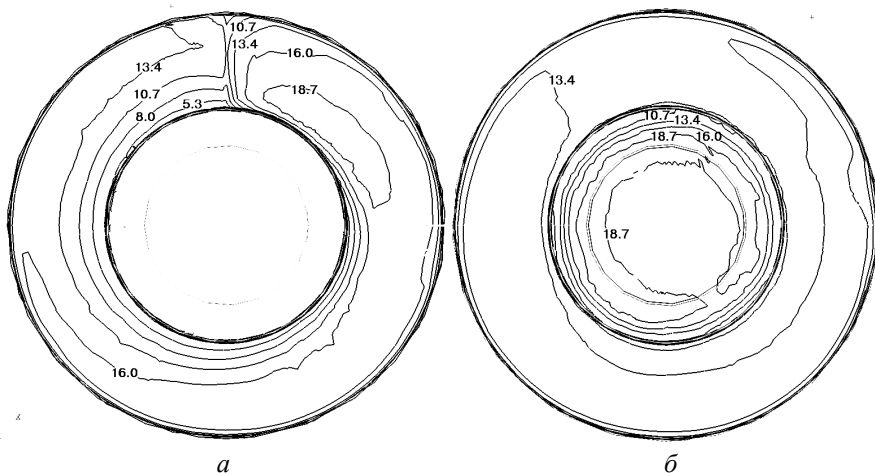


Рис. 3 – Ізолінії швидкості повітряного потоку при $z = 0$ (а) та $z = h_3$ (б).

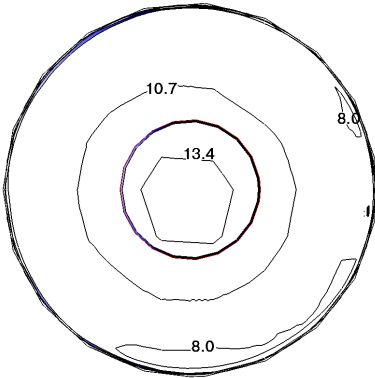


Рис. 4 – Ізолінії швидкості повітряного потоку у перерізі $z = H_{ц}$.

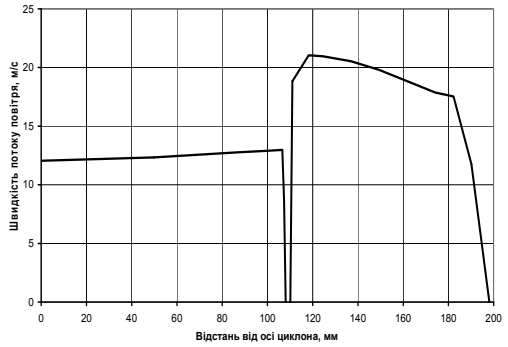
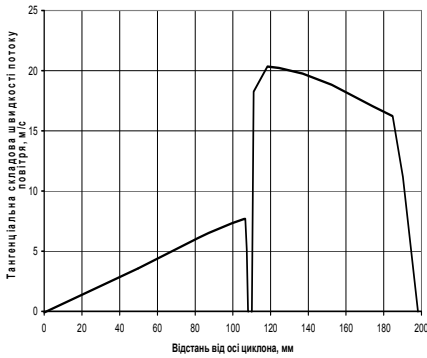
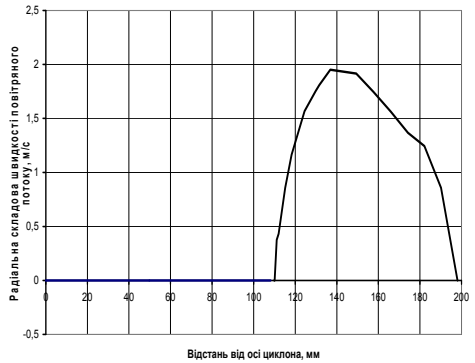


Рис. 5 – Графіки розподілу швидкості повітряного потоку при $z = 0$ та значенні кута $\theta = 45^\circ$.

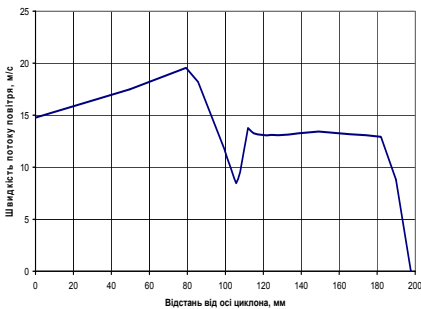


a

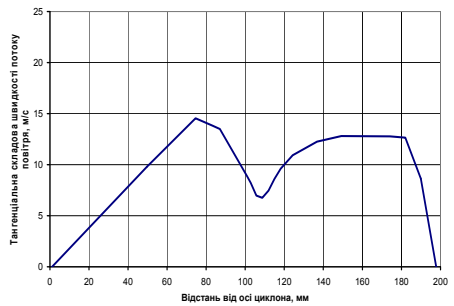


б

Рис. 6 – Графіки розподілу тангенціальної (*a*) та осистої (*б*) складової швидкості повітряного потоку при $z = 0$ та значенні кута $\theta = 45^\circ$.



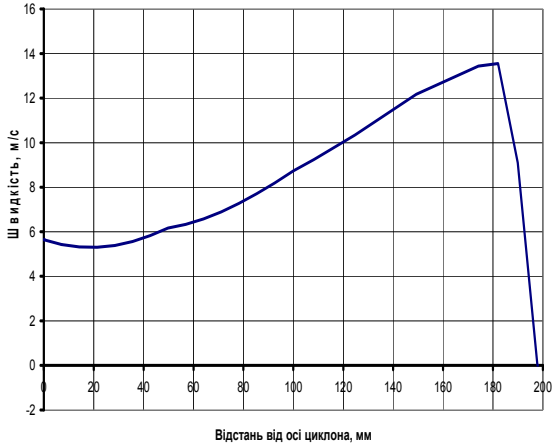
a



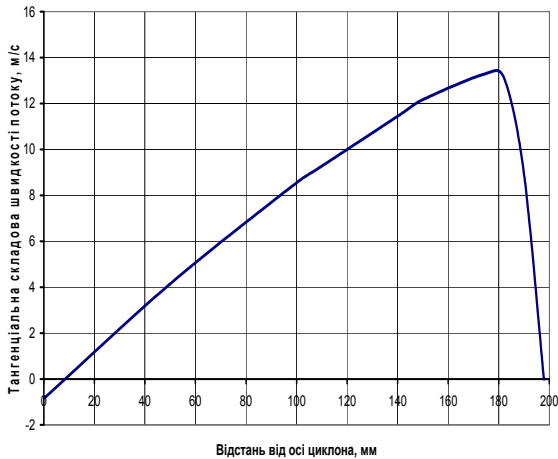
б

Рис. 7 – Графіки розподілу швидкості повітряного потоку (*a*) та її тангенціальної складової (*б*) при $z = h_3 + 0$ та значенні кута $\theta = 45^\circ$.

Тут тангенціальна складова швидкості потоку змінюється за лінійним законом ($V_\theta = \omega r$) (рис. 6, а), а радіальна дорівнює нулю (рис. 6, б). Перепад швидкості у сепараційній зоні сепаратора складає близько 8,0 м/с, а у вихлопній трубі – 1,0 м/с. По мірі опускання повітряного потоку перепад значення V знижується.



а



б

Рис. 8 – Графіки розподілу швидкості повітряного потоку (а) та її тангенціальної складової (б) при $z = H_u$ та значенні кута $\theta = 45^\circ$.

Так, у площині, яка знаходиться на відстані h_3 від перерізу VI, перепад значення швидкості у сепараційній зоні близький до 0 (рис. 7, а). Характерним є те, що лінійний закон зміни тангенціальної складової швидкості потоку зберігається при $0 < r < 80$ мм.

На відстані H_y від перерізу VI більші значення швидкості повітряного потоку спостерігаються поблизу зовнішньої стінки апарата. Перепад значення на цій ділянці складає близько 4 м/с.

Висновки. Таким чином, приведені на рис. 2 – 8 результати числового аналізу поставленої задачі про рух повітряного потоку відповідають загальному розумінню процесів аеродинаміки, що відомі з літератури. Розроблена математична модель руху повітряних потоків у циклоні може бути використана для аналізу нових конструкцій таких апаратів на етапі їх розроблення.

Список літератури: 1. Дорундяк Л.М., Тисовський Л.О., Ляшенко А.В., Дадак Ю.Р. Про деякі математичні підходи до моделювання руху повітряних потоків у циклоні // Наук. вісник НЛТУ України: 36. наук.-техн. праць. – Львів: РВВ НЛТУ України. – 2010. – Вип. 20.13. – С. 119 – 125. 2. Тисовський Л.О., Дорундяк Л.М., Ляшенко А.В., Дадак Ю.Р. Побудова математичної моделі для задачі про рух повітря в циклоні // Промислова гідравліка і пневматика. – Вінниця: ВДАУ. – 2010. – № 2 (28). – С. 57 – 62. 3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Изд-во „Наука”, Гл. ред. физ.-мат. лит-ра, 1978. – 363 с. 4. Первов А.А. К вопросу о потере давления в циклонах // Промышленного очистки газов и аэродинамика пылеулавливающих аппаратов. – Ярославль, 1975. – С. 15 – 19. 5. Syeda Noori Banu P., Syeda Arshi Banu P. Simulation and empirical modeling of a Design of Cyclonic separator to combat air pollution // International Journal of Engineering Science and Technology. – 2011. – Vol. 3. – № 6. P. 4857 – 4878. 6. Zhongchao Tan. Mechanism of particle separation in aerodynamic air cleaning: PhD.Illinois: Urbana. – 2004. – 14 p.

Надійшла до редколегії 18.02.2013

УДК 674: 621.928.93

Математична постановка і числовий аналіз задачі про рух повітряного потоку в циклоні / Л. М. Дорундяк, Є. М. Лютий, Л. О. Тисовський, А. В. Ляшенко // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2013. – №5 (979). – С. 66-75. Бібліогр.: 6 назв.

Представлена полная система уравнений гидрогазодинамики о движении воздушного потока воздуха в циклоне. Записаны предельные условия на внешних стенках циклона и на выхлопной трубе. Проведен числовой анализ задачи и получено картину движения воздушного потока в сепараторе.

Ключевые слова: циклон, математическая модель, гидрогазодинамика, начальные условия, граничные условия.

The complete set of equations for the fluid dynamics of air flow of air in the cyclone. Recorded boundary conditions on the walls of the cyclone and the exhaust pipe. Performed a numerical analysis of the problem and obtained the trajectory of the air flow.

Key words: cyclone, mathematical model, fluid dynamics, boundary conditions, initial conditions.