УДК 539.3:517.9

В.П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, д-р. фіз.-мат. наук, проф., ХНТУСГ, Харків;
С.В. ОЛЬШАНСЬКИЙ, канд. фіз.-мат. наук, доцент, НТУ «ХПІ»

ФУНКЦІЯ ЛАМБЕРТА В ЗАДАЧІ КОЛИВАНЬ МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА

Проведено короткий огляд підходів до розв'язання рівняння коливань математичного маятника з квадратичним тертям. Показано, що наближене обчислення амплітуд затухаючих коливань математичного маятника, у середовищі з квадратичним опором рухові, можна проводити за допомогою таблиці функції Ламберта від'ємного аргументу. Запропоновано варіант наближеного розв'язання оберненої задачі ідентифікації коефіцієнта опору середовища.

Ключові слова: математичний маятник, коливання, функція Ламберта.

Вступ. Вільні коливання *математичного маятника* з квадратичним тертям тривалий час привертали увагу вчених. Точний розв'язок рівняння коливань уже давно одержано у вигляді трансцендентної квадратури [1], [2], яка не виражається через відомі елементарні або спеціальні функції. Тому для спрощення розрахунків запропоновано різні варіанти наближеного розв'язання цієї нелінійної задачі динаміки. Серед них є розв'язки у вигляді простого рекурентного співвідношення між амплітудами коливань [1], [3]. Відомі також наближені формули [4], до яких приводить *асимптотичний метод Лінстедта-Ляпунова*. Для проведення інженерних розрахунків в [4], [5] викладено графічний спосіб розв'язання цієї динамічної задачі.

На відміну від перелічених досліджень, тут запропоновано для обчислення амплітуд вільних затухаючих коливань маятника використовувати таблицю *функції Ламберта* від'ємного аргументу, що складена в [6]. Цю таблицю уже застосовували для обчислення дальності польоту матеріальної точки у газоподібному середовищі [7], [8] та для проведення ідентифікації коефіцієнта опору рухові [6]. Тут мова йде про використання складеної таблиці у розрахунках нелінійних коливань маятника.

Постановка задачі Коші та окремі її розв'язки. Задача полягає у розв'язанні нелінійного рівняння

$$\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta}^2 \operatorname{sign}\left(\dot{\theta}\right) + \omega^2\theta = 0, \tag{1}$$

де $\alpha = kl/m$; $\omega = \sqrt{g/l}$; k – коефіцієнт опору середовища; l – довжина маятника; m – його маса; g – прискорення вільного падіння; θ – кут відхилення маятника від спрямованої донизу вертикальної осі, що має свій початок у точці підвісу; крапкою позначено похідну за часом t.

Розв'язок рівняння (1) повинен задовольняти умовам:

$$\theta\left(0\right) = \theta_0;\ \dot{\theta}\left(0\right) = 0,$$

де θ_0 – початкове відхилення маятника від положення стійкої рівноваги.

Коротко розглянемо деякі наближені розв'язки цієї задачі. Так, використовуючи метод Лінстедта-Ляпунова, в [4] одержано залежність між амплітудами n – го і $n+1$ розмахів θ_n і θ_{n+1} у вигляді

$$\xi_{n+1} = \xi_n\left(1 - \frac{2}{3}\xi_n + \frac{4}{9}\xi_n^2 - ...\right). \tag{2}$$

Тут $\xi_n = \left|2\alpha\theta_n\right|$; $\xi_{n+1} = \left|2\alpha\theta_{n+1}\right|$.

У монографії [1] асимптотичним методом, у першому наближені, знайдено вираз

$$\xi_{n+1} = \frac{\xi_n}{1 + \frac{2}{3}\xi_n}. \tag{3}$$

Цю ж формулу одержав і автор роботи [3], користуючись методом енергетичного балансу.

Як зазначено в [1], першим до наближення (3) прийшов *A. De Caligny* емпіричним шляхом.

Якщо $\frac{2}{3}\xi_n < 1$, то, розгорнувши (3) в біноміальний ряд, отримаємо часткову суму (2).

При точному розв'язання задачі, обчислення амплітуд коливань пов'язано з пошуком коренів трансцендентного рівняння, яке одержав *F. Prasil* [1]:

$$1 - \xi_{n+1} - \ln\left(1 - \xi_{n+1}\right) = 1 + \xi_n - \ln\left(1 + \xi_n\right). \tag{4}$$

Для цього в [4] побудовано «раз назавжди» графік, щоб розв'язувати (4) графічним способом. Саме цей спосіб рекомендують для інженерних розрахунків і у довіднику [5].

Але рівняння (4) можна розв'язувати аналітично, бо коли [7], [8] виконується

$$f - \ln f = x,$$

то

$$f = -W\left(-e^{-x}\right).$$

Тут $W\left(-e^{-x}\right)$ – функція Ламберта.

За цієї обставини із (4) одержуємо рекурентне співвідношення

$$\xi_{n+1} = 1 + W_1\left[-\frac{1 + \xi_n}{\exp\left(1 + \xi_n\right)}\right]. \tag{5}$$

У ньому $W_1\left(-\zeta\right)$ – головна гілка двозначної функції Ламберта від'ємного аргументу, таблиці якої складено в [6]. Використовуючи ці таблиці та лінійну інтерполяцію, за формулою (5) можна з високою точністю обчислити амплітуди коливань маятника. Щоб переконатися в цьому, розглянемо результати обчислень.

Аналіз результатів розрахунків. В табл. 1 вони записані для випадку, коли $\xi_0 = 1$. Числа у другому стовпці одержано за формулою (3), у третьому – за формулою (5), а в четвертому наведено точні результати, запозичені з монографії [1], де їх отримали числовим розв'язанням рівняння (4) на комп'ютері.

Таблиця 1 – Одержані різними способами значення ξ_n

n	Значення ξ_n		
	форм. (3)	форм. (5)	із [1]
0	1,0000	1,0000	1,0000
1	0,6000	0,5936	0,5936
2	0,4286	0,4239	0,4240
3	0,3333	0,3300	0,3301
4	0,2727	0,2703	0,2704
5	0,2308	0,2289	0,2290
6	0,2000	0,1984	0,1986

Результати обчислень по формулі (5) досить близькі до точних значень.

У табл. 2 записано значення амплітуд коливань, одержаних двома способами при $\xi_0 = 2$.

Таблиця 2 – Обчислені двома способами ξ_n

n	Значення ξ_n		n	Значення ξ_n	
	фор. (3)	фор. (5)		фор. (3)	фор. (5)
0	2,000	2,000	4	0,3158	0,3087
1	0,8571	0,8215	5	0,2609	0,2557
2	0,5455	0,5271	6	0,2222	0,2183
3	0,4000	0,3891	7	0,1935	0,1904

Аналіз показує, що при збільшенні ξ_0 зросли похибки формули (3), але вони менші 5%. Отже, компактна наближена формула (3) може бути альтернативою графічному способу визначення амплітуд коливань маятника в інженерних розрахунках.

Цінність формули (3) полягає ще і в тому, що її можна використовувати для наближеного розв'язання оберненої задачі ідентифікації коефіцієнта опору середовища. Дійсно, розв'язавши залежність (3) відносно α, знаходимо

$$\alpha = \frac{3}{4|\theta_n|}\left(\left|\frac{\theta_n}{\theta_{n+1}}\right| - 1\right).$$

Тоді, приймаючи до уваги уведені вище позначення, одержуємо

$$k = \frac{3m}{4l|\theta_n|}\left(\left|\frac{\theta_n}{\theta_{n+1}}\right| - 1\right). \tag{6}$$

Ця формула дозволяє обчислити k за результатами вимірів θ_n і θ_{n+1}.

Розглянемо приклад. Нехай маятник має параметри $m = 2$ кг; $l = 3$ м і за результатами вимірювань, при $\theta_0 = 0,3$, одержано $|\theta_1| = 0,24$. Підставивши ці числа в формулу (6), знаходимо $k = 0,4167$ кг/м. Для перевірки результатів ідентифікації по формулі (6), розв'яжемо пряму задачу. Для одержаного k маємо:

$$\alpha = 0,6251;\ \xi_0 = 0,3750;\ (1+\xi_0)\exp(-1-\xi_0) = 0,34765.$$

У таблиці значень функції Ламберта [6]:

$$W_1(-0,347) = 0,6959;\ \ W_1(-0,348) = 0,7026.$$

Провівши інтерполяцію, знаходимо $W_1(-0,34765) = -0,7070$. Тоді за формулою (5): $\xi_1 = 0,2930$. При цьому амплітуда коливань становить

$$|\theta_1| = \xi_1 / (2\alpha) = 0,234\,.$$

Одержане амплітудне відхилення мало відрізняється від числа 0,24, яке використали для проведення ідентифікації k. Отже, перевірка підтвердила прийнятність формули (6) для розв'язання зворотної задачі.

Висновки. Аналіз числових результатів підтвердив, що, користуючись таблицею функції Ламберта від'ємного аргументу (основна гілка), можна з високою точністю обчислювати амплітуди затухаючих коливань математичного маятника, при дії сили опору, пропорційної квадрату швидкості руху.

Список літератури: **1.** *Боголюбов Н.Н.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский – М.: Наука, 1974. – 504 с. **2.** *Бутенин Н.В.* Элементы теории нелинейных колебаний / Н.В. Бутенин – Л.: Судпромгиз, 1962 – 193 с. **3.** Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара / Я.Г. Пановко. – Л.: Машиностроение, 1976. – 320 с. **4.** *Лойцянский Л.Г.* Курс теоретической механики. В 2 Т. Т.2 / Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье – М.: Дрофа, 2006 – 720 с. **5.** *Биргер И.А.* Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в 3 Т. Т. 3 / И.А. Биргер, Я.Г. Пановко и др. – М.: Машиностроение, 1968 – 568 с. **6.** *Ольшанский В.П.* Функция Ламберта в задачах баллистики материальной точки / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский – Х.: Изд. Савчук А.О., 2013 – 204 с. **7.** *Ольшанский В.П.* Функция Ламберта в задаче баллистики материальной точки / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Вісник НТУ "ХПІ": Математичне моделювання в техніці та технологіях, 2013, № 5(979). – С. 220-224. **8.** *Ольшанський В.П.* Інверсія розв'язку Дідіона в задачі балістики матеріальної точки / В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський // Наукові вісті НТУУ «КПІ»: Теоретичні та прикладні проблеми фізики, 2013, № 4. – С. 145-147.

Bibliography (transliterated): **1.** Bogoljubov, N. N., and Ju. A. Mitropol'skij. *Asimptoticheskie metody v teorii nelinejnyh kolebanij*. Moscow: Nauka, 1974. Print. **2.** Butenin, N. V. *Jelementy teorii nelinejnyh kolebanij*. Leningrad: Sudpromgiz, 1962. Print. **3.** Panovko, Ja. G. *Osnovy prikladnoj teorii kolebanij i udara.* Leningrad: Mashinostroenie, 1976. Print. **4.** Lojcjanskij, L. G., and A. I. Lur'e. *Kurs teoreticheskoj mehaniki*. Vol. 2. No. 2. Moscow: Drofa, 2006 Print. **5.** Birger, I. A., et al. *Prochnost', ustojchivost', kolebanija. Spravochnik.* Vol. 3. No. 3. Moscow: Mashinostroenie, 1968 Print. **6.** Ol'shanskij, V. P., and S. V. Ol'shanskij. *Funkcija Lamberta v zadachah ballistiki material'noj tochki*. Kharkov: Izd. Savchuk A. O., 2013. Print. **7.** Ol'shanskij, V. P., and S. V. Ol'shanskij. "Funkcija Lamberta v zadache ballistiki material'noj tochki." *Visnik NTU «KhPI». Ser.: Matematichne modeljuvannja v tehnici ta tehnologijah*. No. 5 (979). 2013. 220–224. Print. **8.** Ol'shans'kij, V. P., and S. V. Ol'shans'kij. "Inversija rozv'jazku Didiona v zadachi balistiki material'noї tochki." *Naukovi visti NTUU «KPI». Ser.: Teoretichni ta prikladni problemy fizyky.* No. 4. 2013. 145–147. Print.

Надійшла (received) 06.05.2014