УДК 629.7.05

Ю.А. ПЛАКСІЙ, канд. техн. наук, проф., НТУ «ХПІ»

ДВОЧАСТОТНА КВАТЕРНІОННА ЕТАЛОННА МОДЕЛЬ ОБЕРТАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА КОНІЧНОГО ТИПУ

Запропонована аналітична еталонна модель обертання твердого тіла на основі мультиплікативного представлення кватерніона орієнтації. Побудовані траєкторії в конфігураційному просторі, які різняться по вигляду від траєкторій для моделей конічного руху і регулярної прецесії.

Ключові слова: кватерніон, орієнтація, еталонна модель, квазікоординати.

Вступ і постановка задачі. В безплатформених інерціальних навігаційних системах (БІНС) відтворення цифрового образу інерціального тріедра осей відбувається в автономному обчислювачі за допомогою алгоритмів визначення параметрів орієнтації, які відіграють роль *аналітичної платформи* [1]. Для коректного оцінювання похибок цих алгоритмів на етапі проектування системи зазвичай використовують еталонні моделі обертання твердого тіла, які дозволяють представити в належному вигляді первинну інформацію про обертання рухомого об'єкта, що знімається з гіроскопів, та отримати відповідні еталонні значення кватерніона орієнтації (або інших параметрів) на такті обчислень.

Вибір еталонної моделі обертання і її параметрів зрештою залежить від специфіки основної технічної задачі, що покладена на рухомий об'єкт, і повинен враховувати всі можливі режими обертання об'єкта. Кількість існуючих аналітичних еталонних моделей обертання твердого тіла достатньо обмежена. Найбільше поширення в теперішній час отримали еталонні *моделі конічного руху* [2, 3] та *регулярної прецесії* [4, 5], які засновані на існуючих точних розв'язках в елементарних функціях сукупності динамічних і кінематичних рівнянь обертання твердого тіла. В цих умовах розширення класу аналітичних неперервних моделей обертання, в тому числі на основі узагальнення існуючих моделей, є актуальною задачею.

Двочастотна аналітична еталонна модель обертання твердого тіла. Задамо кватерніон орієнтації у вигляді мультиплікативної моделі:

$$\Lambda(t) = \Lambda_1(t) \circ \Lambda_2(t) . \qquad (1)$$

Представимо кватерніони $\Lambda_1(t)$, $\Lambda_2(t)$ в правій частині (1) неперервними функціями часу:

$$\Lambda_1(t) = \cos(\varphi_1(t)/2) + \vec{b}_1 \sin(\varphi_1(t)/2) ,$$
$$\Lambda_2(t) = \cos(\varphi_2(t)/2) + \vec{b}_2 \sin(\varphi_2(t)/2) , \qquad (2)$$

де $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ – *опорні функції*; $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ – постійні вектори одиничної довжини, $\vec{b}_1 \neq \vec{b}_2$. З урахуванням (2) отримаємо з (1), що

$$\Lambda(t) = \cos(\varphi_1(t)/2)\cos(\varphi_2(t)/2) - \vec{b}_1 \sin(\varphi_1(t)/2)\sin(\varphi_2(t)/2) +$$
$$+\vec{b}_2 \cos(\varphi_1(t)/2)\sin(\varphi_2(t)/2) - (\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2)\sin(\varphi_1(t)/2)\sin(\varphi_2(t)/2) +$$
$$+(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\sin(\varphi_1(t)/2)\sin(\varphi_2(t)/2)\,. \tag{3}$$

Вектор кутової швидкості $\vec{\omega}(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))^T$, що відповідає кватерніону орієнтації (3), згідно з оберненим кінематичним рівнянням має вигляд:

$$\vec{\omega}(t) = \dot{\varphi}_1(t)(\vec{b}_1 \cos\varphi_2(t) + (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\sin\varphi_2(t) + \vec{b}_2(\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2)(1 - \cos\varphi_2(t))) + \dot{\varphi}_2(t)\vec{b}_2\,. \tag{4}$$

Кінематична опорна модель у вигляді (3), (4) запропонована в [6] для розв'язання задач гіросилового управління орієнтацією космічного апарату і названа там *конічною*, бо в умовах $\vec{b}_1 \perp \vec{b}_2$, $\dot{\varphi}_1 = const$, $\dot{\varphi}_2 = const$ вектор модельної кутової швидкості $\vec{\omega}(t)$ має постійну довжину $|\vec{\omega}(t)| = const$ і утворює бокову поверхню конуса. Таким чином, можна вважати, що кінематична модель (3), (4) є, в цьому сенсі, узагальненням моделі конічного руху. Параметри опорних функцій $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ і вектори $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ визначаються з урахуванням умов початкової і кінцевої орієнтації та заданих початкового і кінцевого вектора кутової швидкості об'єкта.

Щоб отримати еталонну модель обертання твердого тіла на основі опорної кінематичної моделі (3), (4) у випадку, коли первинною інформацією про обертання є квазікоординати [7], доповнимо кінематичну модель виразом для вектора позірного повороту

$$\vec{\theta}(t) = \int_0^t \vec{\omega}(t)dt\,.$$

Для цього задамо опорні функції у вигляді

$$\varphi_i(t) = p_i t + \psi_i\,,\ i = 1, 2\,, \tag{5}$$

де $p_i = const$; $\psi_i = const$, і проінтегруємо (4) з урахуванням (5). Отримаємо в результаті:

$$\vec{\theta}(t) = p_1(\vec{b}_1(\sin(p_2 t + \psi_2) - \sin\psi_2)/p_2 - (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)(\cos(p_2 t + \psi_2) - \cos\psi_2)/p_2 +$$
$$+\vec{b}_2(\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2)(t - (\sin(p_2 t + \psi_2) - \sin\psi_2)/p_2)) + \vec{b}_2 p_2 t\,. \tag{6}$$

Квазікоординати $\theta^*_{ni} = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega_i dt$ $(i = 1, 2, 3)$ модельного руху при цьому визначаться аналітично згідно формули:

$$\theta^*_{ni} = \theta_i(t_n) - \theta_i(t_{n-1})\,,\ i = 1, 2, 3\,, \tag{7}$$

де $\theta_i(t)$, $i = 1,2,3$ – компоненти вектора позірного повороту $\vec{\theta}(t)$.

Якщо належним чином задати параметри $p_1, p_2, \psi_1, \psi_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2$, то отримаємо еталонну модель обертання, яка задається формулами (3), (6), (7).

Розглянемо окремо випадок *ортогональної моделі*, коли $\vec{b}_1 \perp \vec{b}_2$. З формул (3), (6) отримаємо, що кватерніон орієнтації та вектор позірного повороту ортогональної моделі задаються формулами:

$$\Lambda(t) = \cos((p_1 t + \psi_1)/2)\cos((p_2 t + \psi_2)/2) - \vec{b}_1 \sin((p_1 t + \psi_1)/2) \times$$
$$\times \sin((p_2 t + \psi_2)/2) + \vec{b}_2 \cos((p_1 t + \psi_1)/2)\sin((p_2 t + \psi_2)/2) +$$
$$+ (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\sin((p_1 t + \psi_1)/2)\sin((p_2 t + \psi_2)/2), \qquad (8)$$
$$\vec{\theta}(t) = p_1(\vec{b}_1(\sin(p_2 t + \psi_2) - \sin\psi_2)/p_2 - (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)(\cos(p_2 t + \psi_2) -$$
$$- \cos\psi_2)/p_2) + \vec{b}_2 p_2 t. \qquad (9)$$

Конкретизуємо формули (8), (9) для ситуації, коли вектори $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ направлені по координатним осям. Якщо при цьому вектори $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3 = \vec{b}_1 \times \vec{b}_2$ утворюють праву трійку ортів, то будемо мати однотипні вирази для компонент кватерніона орієнтації з урахуванням відповідних перестановок індексів для компонент векторної частини кватерніона. Наприклад, при $\vec{b}_1 = (1,0,0)^T$, $\vec{b}_2 = (0,1,0)^T$ отримаємо з (8) наступне двочастотне представлення для компонент модельного кватерніона:

$$\lambda_0(t) = \cos((p_1 t + \psi_1)/2)\cos((p_2 t + \psi_2)/2);$$
$$\lambda_1(t) = \sin((p_1 t + \psi_1)/2)\cos((p_2 t + \psi_2)/2);$$
$$\lambda_2(t) = \cos((p_1 t + \psi_1)/2)\sin((p_2 t + \psi_2)/2);$$
$$\lambda_3(t) = \sin((p_1 t + \psi_1)/2)\sin((p_2 t + \psi_2)/2). \qquad (10)$$

Для компонент вектора позірного повороту з (9) отримаємо, що

$$\theta_1(t) = (p_1/p_2)(\sin(p_2 t + \psi_2) - \sin\psi_2);$$
$$\theta_2(t) = p_2 t;$$
$$\theta_3(t) = -(p_1/p_2)(\cos(p_2 t + \psi_2) - \cos\psi_2). \qquad (11)$$

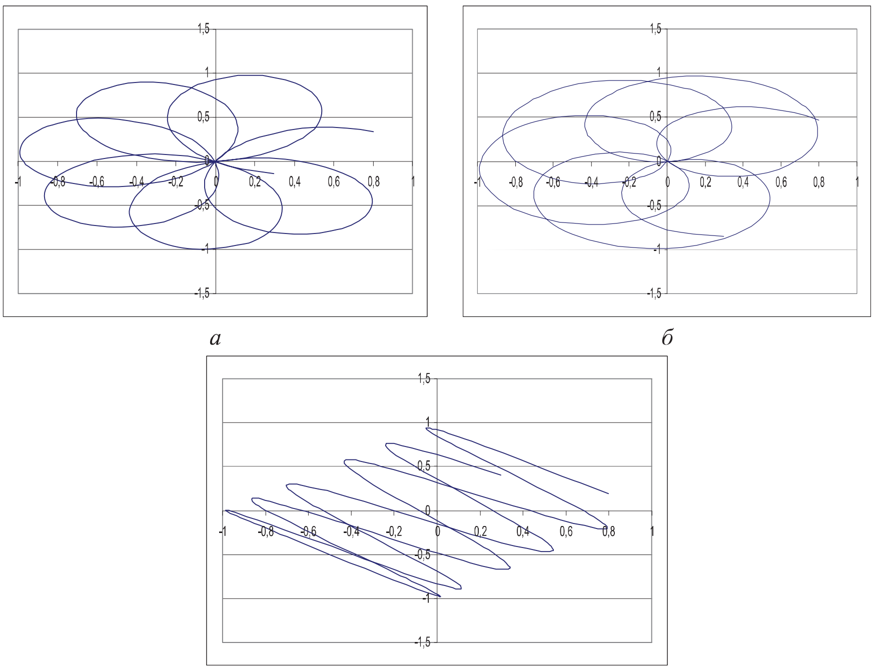
Якщо вектори $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3 = \vec{b}_1 \times \vec{b}_2$ утворюють ліву трійку ортів, будемо мати інший ряд однотипних модельних кватерніонів орієнтації, які відрізняються відповідними перестановками індексів компонент у векторній частині. Наприклад, при $\vec{b}_1 = (1,0,0)^T$, $\vec{b}_2 = (0,0,1)^T$ отримаємо модельний кватерніон з компонентами:

$$\lambda_0(t) = \cos((p_1 t + \psi_1)/2)\cos((p_2 t + \psi_2)/2);$$
$$\lambda_1(t) = \sin((p_1 t + \psi_1)/2)\cos((p_2 t + \psi_2)/2);$$
$$\lambda_2(t) = -\sin((p_1 t + \psi_1)/2)\sin((p_2 t + \psi_2)/2);$$
$$\lambda_3(t) = \cos((p_1 t + \psi_1)/2)\sin((p_2 t + \psi_2)/2). \qquad (12)$$

Компоненти вектора позірного повороту при цьому задаються формулами:

$$\theta_1(t) = (p_1/p_2)(\sin(p_2 t + \psi_2) - \sin\psi_2);$$
$$\theta_2(t) = (p_1/p_2)(\cos(p_2 t + \psi_2) - \cos\psi_2);$$
$$\theta_3(t) = p_2 t. \qquad (13)$$

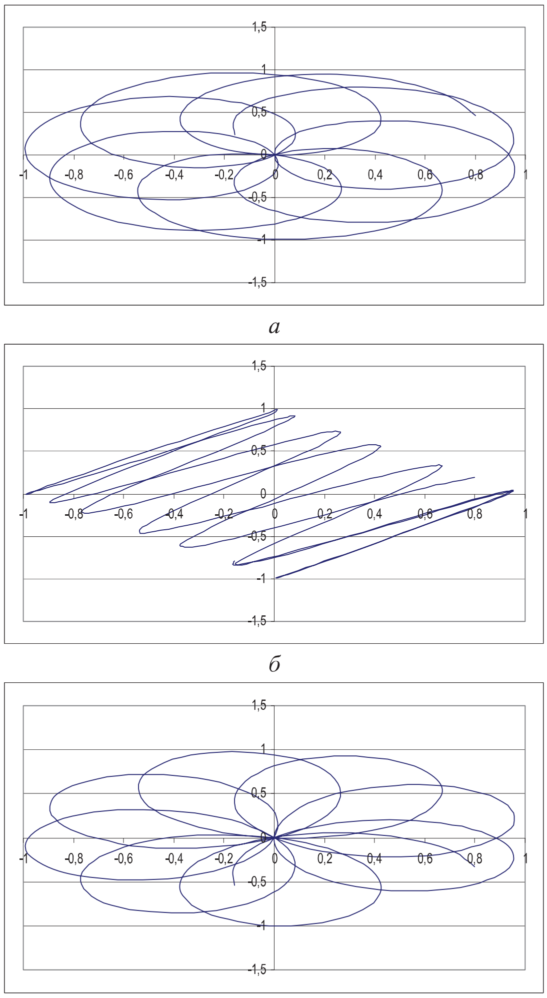
Чисельне моделювання. Реалізуємо запропоновану двочастотну еталонну модель обертання для деяких наборів параметрів p_1, p_2, ψ_1, ψ_2, $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$. На рис. 1 показана графічна інтерпретація ортогональної моделі (10), (11), (7) при $p_1 = 0,025$, $p_2 = 0,034$, $\psi_1 = \pi/4$, $\psi_2 = \pi/3$ у вигляді побудованих траєкторій $\lambda_i(\lambda_0)$, $i = 1, 2, 3$ в конфігураційному просторі. Залежності отримані на інтервалі часу $t \in [0,1200]$ с.



а *б* *в*

Рис. 1 – Траєкторії в конфігураційному просторі для моделі (10), (11), (7): *а* – траєкторія $\lambda_1(\lambda_0)$; *б* – траєкторія $\lambda_2(\lambda_0)$; *в* – траєкторія $\lambda_3(\lambda_0)$.

Отримані в результаті чисельного моделювання траєкторії $\lambda_i(\lambda_0)$ в конфігураційному просторі для ортогональної моделі (12), (13), (7) при значеннях параметрів $p_1 = 0,045$, $p_2 = 0,0345$, $\psi_1 = \pi/3$, $\psi_2 = -\pi/4$ на інтервалі часу $t \in [0,\ 1200]$ є представлені на рис. 2.



а

б

в

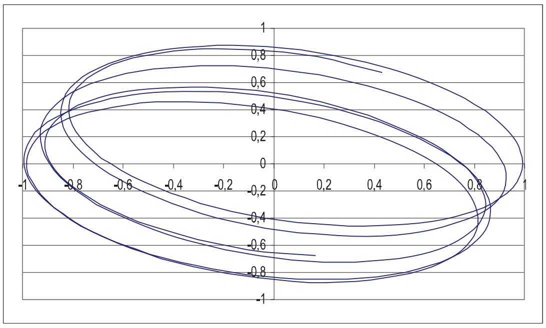
Рис. 2 – Траєкторії в конфігураційному просторі для моделі (12), (13), (7):
а – траєкторія $\lambda_1(\lambda_0)$; *б* – траєкторія $\lambda_2(\lambda_0)$; *в* – траєкторія $\lambda_3(\lambda_0)$.

Розглянемо загальний випадок неортогональної моделі. Для цієї моделі, реалізованої при значеннях параметрів

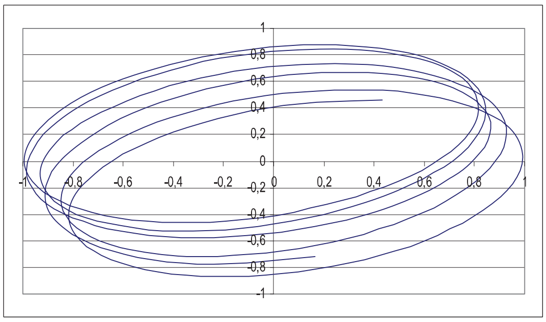
$$p_1 = 0,025\ ,\ \ p_2 = 0,034\ ,\ \ \psi_1 = \pi/2\ ,\ \ \psi_2 = \pi/4\ ,\ \ \vec{b}_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}})^T\ ,$$

$$\vec{b}_2 = (1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2},\ 0)^T$$

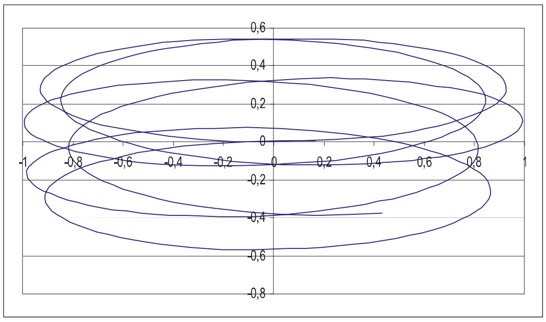
на інтервалі часу $t \in [0,\ 1200]$ с, траєкторії $\lambda_i(\lambda_0)$ в конфігураційному просторі показані на рис. 3.



а



б



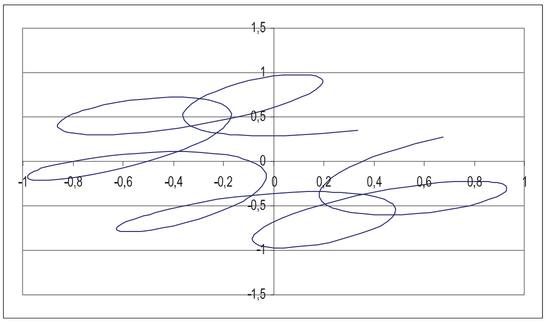
в

Рис. 3 – Траєкторії в конфігураційному просторі для неортогональної моделі (випадок першого набору параметрів): *а* – траєкторія $\lambda_1(\lambda_0)$; *б* – траєкторія $\lambda_2(\lambda_0)$; *в* – траєкторія $\lambda_3(\lambda_0)$.

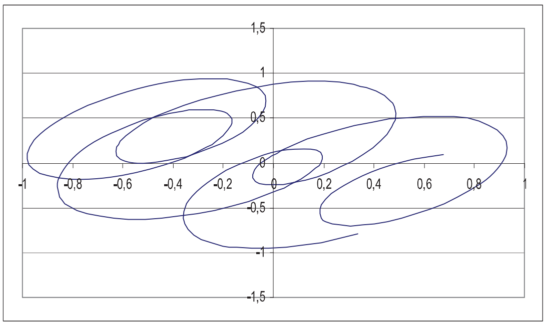
На рис.4 представлені побудовані в конфігураційному просторі траєкторії $\lambda_i(\lambda_0)$ для неортогональної еталонної моделі (3), (6), (7) при значеннях параметрів

$$p_1 = 0{,}025\,,\ p_2 = 0{,}034\,,\ \psi_1 = \pi/2\,,\ \psi_2 = \pi/3\,,\ \vec{b}_1 = (2/\sqrt{5},\ 0,\ 1/\sqrt{5})^T\,,$$
$$\vec{b}_2 = (-1/\sqrt{6},\ 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})^T$$

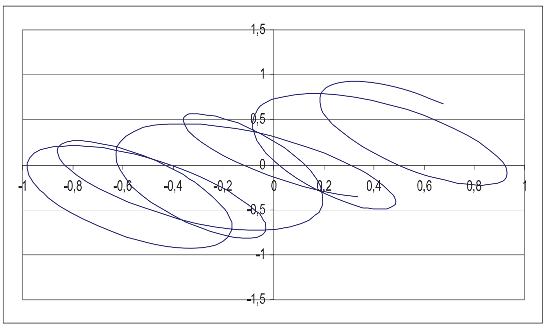
на інтервалі часу $t \in [0,\ 1200]$ с.



а



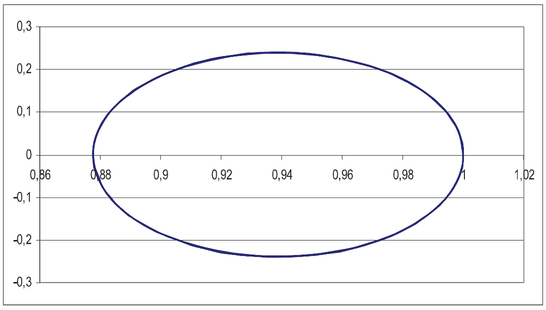
б



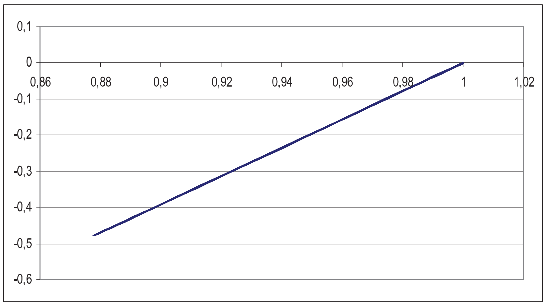
в

Рис. 4 – Траєкторії в конфігураційному просторі для моделі (3), (6), (7) (випадок другого набору параметрів): *а* – траєкторія $\lambda_1(\lambda_0)$; *б* – траєкторія $\lambda_2(\lambda_0)$; в – траєкторія $\lambda_3(\lambda_0)$.

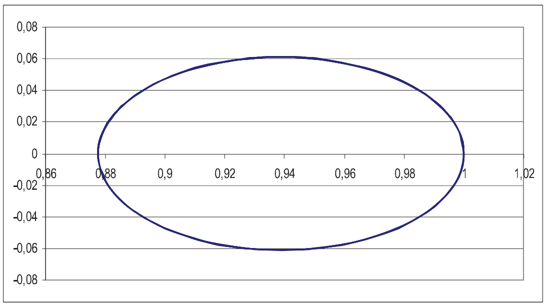
Аналіз результатів моделювання. Порівняємо отримані графічні результати реалізацій запропонованої двочастотної мультиплікативної моделі обертання твердого тіла з результатами реалізацій деяких відомих еталонних моделей обертання твердого тіла.



а



б



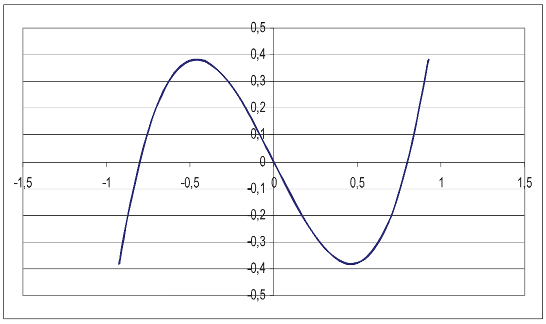
в

Рис. 5 – Траєкторії в конфігураційному просторі для конічної моделі:
а – траєкторія $\lambda_1(\lambda_0)$; *б* – траєкторія $\lambda_2(\lambda_0)$; *в* – траєкторія $\lambda_3(\lambda_0)$.

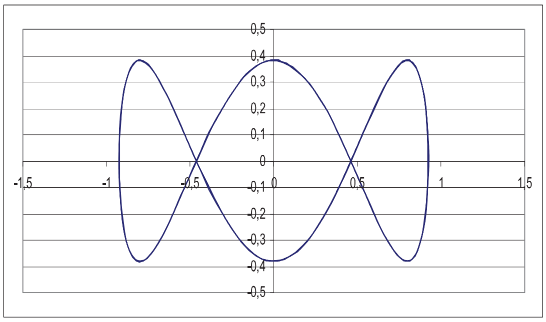
На рис. 5 зображені траєкторії в конфігураційному просторі для моделі конічного руху, що наведена в [3], з вектором кутової швидкості

$$\vec{\omega}(t) = (\nu \sin\varphi \cos\nu t; -\nu \sin\varphi \sin\nu t; \nu(1-\cos\varphi))^T$$

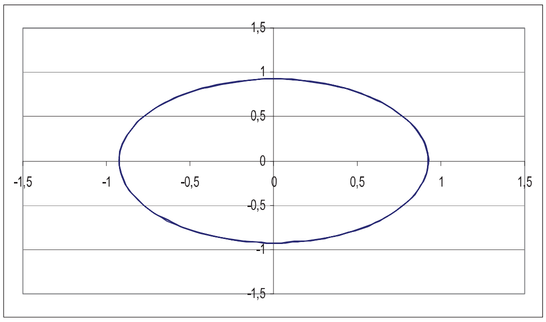
при $\nu = 0{,}03$, $\varphi = 0{,}5$. Модель побудована на інтервалі часу $t \in [0,\ 2000]$ с.



а



б



в

Рис. 6 – Траєкторії в конфігураційному просторі для моделі регулярної прецесії: а – траєкторія $\lambda_1(\lambda_0)$; б – траєкторія $\lambda_2(\lambda_0)$; в – траєкторія $\lambda_3(\lambda_0)$.

В роботі [4] приведена модель регулярної прецесії з вектором кутової швидкості

$$\vec{\omega}(t) = (\mu \sin \vartheta \sin \nu t; \mu \sin \vartheta \cos \nu t; \nu + \mu \cos \vartheta)^T .$$

Траєкторії $\lambda_i(\lambda_0)$ в конфігураційному просторі для цієї моделі представлені на рис. 6. Модель побудована на інтервалі часу $t \in [0, 2000]$ с при значеннях параметрів $\nu = -0,02$, $\mu = 0,04$, $\vartheta = \pi/4$. Відзначимо, що траєкторії $\lambda_i(\lambda_0)$ на рис. 5 – 6 мають вигляд форм, в той час як траєкторії для двочастотної моделі (3), (6), (7) формам не відповідають.

Висновки. Запропонована аналітична двочастотна квазікоординатна еталонна модель обертання твердого тіла, що основана на мультиплікативному представленні кватерніона орієнтації. В результаті побудови траєкторій $\lambda_i(\lambda_0)$ в конфігураційному просторі показано, що при належному виборі параметрів цієї моделі можна отримати достатньо широкий набір рухів об'єкта як твердого тіла, які відрізняються від класичних випадків конічного руху і регулярної прецесії. Отриману еталонну модель можна застосовувати для оцінювання похибок алгоритмів визначення кватерніонів орієнтації на етапі проектування безплатформених інерціальних систем орієнтації.

Список літератури: **1.** *Mortensen R.E.* Strapdown Guidance Error Analysis. – IEEE Trans. Aerospace and Electr. Syst., 1974, vol.10, No 4, pp. 451 – 458. **2.** *Ткаченко А.И.* О применении параметров Родрига-Гамильтона в алгоритмах определения ориентации объекта // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1970. – Вып. 5. – С. 20 – 22. **3.** *Панов А.П.* Оптимизация методов вычисления кватернионов при конических колебаниях твердого тела // Механика гироскоп. систем. – К., 1984. – Вып. 3. – С. 105 – 112. **4.** *Панов А.П.* Адаптивные прецессионные алгоритмы вычисления кватернионов вращения твердого тела // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1988. – Вып. 77. – С. 47 – 52. **5.** *Плаксий Ю.А.* Аналитические оценки точности алгоритмов определения ориентации в кватернионах для случая регулярной прецессии объекта // Вестник Харьк. политехн. ин-та, №2. – 1992, вып. 11. – С.79 – 83. **6.** *Успенский В.Б.* Теоретические основы гиросилового управления ориентацией космического летательного аппарата/ В.Б.Успенский. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2006. – 328 с. **7.** *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. – М.: Наука, 1992. – 280 с.

Bibliography (transliterated): **1.** Mortensen, R. E. "Strapdown Guidance Error Analysis." *IEEE Trans. Aerospace and Electr. Syst*. Vol. 10. No. 4. 1974. 451–458. Print. **2.** Tkachenko, A. I. "O primenenii parametrov Rodriga-Gamil'tona v algoritmah opredelenija orientacii ob'ekta." *Kibernet. i vychisl. tehn*. No. 5. Kiev, 1970. 20–22. Print. **3.** Panov, A. P. "Optimizacija metodov vychislenija kvaternionov pri konicheskih kolebanijah tverdogo tela." *Mehanika giroskop. sistem*. No. 3. Kiev, 1984. 105–112. Print. **4.** Panov, A. P. "Adaptivnye precessionnye algoritmy vychislenija kvaternionov vrashhenija tverdogo tela." *Kibernet. i vychisl. tehn*. No. 77. Kiev, 1988. 47–52. Print. **5.** Plaksiy, Yu. A. "Analiticheskie ocenki tochnosti algoritmov opredelenija orientacii v kvater-nionah dlja sluchaja reguljarnoj precessii ob'ekta." *Vestnik Har'k. politehn. in-ta*. Vol. 2. No. 11. Kharkov, 1992. 79–83. Print. **6.** Uspenskij, V. B. *Teoreticheskie osnovy girosilovogo upravlenija orientaciej kosmicheskogo letatel'nogo apparata*. Kharkov: NTU «HPI», 2006. Print. **7.** Branec, V. N., and I. P. Shmyglevskij. *Vvedenie v teoriju besplatformennyh inercial'nyh navigacionnyh sistem*. Moscow: Nauka, 1992. Print.

Надійшла (received) 03.03.2014