УДК 539.3

Е.А. СІМСОН, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ»;
С.О. НАЗАРЕНКО, канд. техн. наук, ст. наук. співр., НТУ «ХПІ»;
С.І. МАРУСЕНКО, наук. співр. НТУ «ХПІ»

АНАЛІЗ ЧУТЛИВОСТІ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ПРИ ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

Розглянуто математичні моделі та чисельні методи комплексного аналізу чутливості конструкцій при динамічних навантаженнях, які орієнтовані на високі ступені інформативності. На основі проведених досліджень було розроблено дві базові методики аналізу чутливості. Перший підхід ґрунтується на апроксимації задачі в скінченно-вимірному просторі. Другий підхід базується на формулюванні задачі в континуальному просторі, в якому визначено вихідне диференціальне, інтегральне або варіаційне рівняння, що описує модель конструкції. Можливості розробленого математичного апарату продемонстровано на прикладах крила аерокосмічної конструкції та виливки блок-картера дизеля.

Ключові слова: аналіз чутливості, динамічні навантаження, математичні моделі, аерокосмічна конструкція, виливка блок-картера дизеля.

Постановка проблеми. Аналіз чутливості дозволяє вирішити цілий ряд практичних завдань проектування, доведення, підготовки виробництва і контролю ефективної експлуатації конструкцій [1 – 3]. Крім основного використання в системах оптимального автоматизованого і інтерактивного проектування коефіцієнти чутливості також можуть застосовуватися при вібродіагностиці і неруйнівному контролі, стохастичному аналізі характеристик конструкцій технологічних систем в полі випадкових відхилень властивостей матеріалу і геометричних параметрів, призначенні полів допусків на виготовлення, а також коректуванні або ідентифікації математичної моделі конструкцій [1 – 3].

Метою досліджень є розробка методик комплексного аналізу чутливості конструкцій при динамічних навантаженнях, які орієнтовані на високі ступені геометричної і фізичної інформативності.

Методи аналізу чутливості. Задача аналізу динаміки елементів конструкцій, як правило, зводиться до розв’язання систем нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних. Структуру рівнянь визначає тип досліджуваного процесу, склад системи, граничні умови, навантаження й умови спряження. Узагальнене рівняння руху різних математичних моделей має вигляд:

$$A\left[\vec{V}\right]+D\left[\vec{V}\right]+C\left[\vec{V}\right]-\vec{f}=0\,, \tag{1}$$

де A – оператор приведених жорсткісних характеристик; $\vec{V}(\vec{x},t)$ - узагальнений вектор-функція переміщень: $\vec{x}$ - координатний вектор; t - час, D – приведений інерційний оператор; C – оператор дисипативних сил.

Реальні експлуатаційні режими моделюються навантаженням $\vec{f}(\vec{x},t)$, яке залежить від характеру взаємодії об'єкту з навколишнім середовищем (газом, рідиною) або із зовнішнім полем (температурним, електромагнітним), а також від можливого контакту з іншими елементами в структурі системи. Під функцією (вектором) варійованих і детермінованих параметрів h мають на увазі характеристики фізико-механічних властивостей матеріалів, геометричні розміри та інше. Вектор (функція) змінних стану y утворює простір рішень.

На основі проведених досліджень було розроблено дві базові методики аналізу чутливості. *Перший підхід* ґрунтується на апроксимації задачі в скінченно-вимірному просторі. Наприклад, варіаційні схеми приводять до матричної алгебраїчної проблеми, аналогічної співвідношенням *методу скінчених елементів* (МСЕ), який вважається найбільш потужною, універсальною і поширеною технологією розрахунку.

Для прикладу розглянемо задачу про вимушені коливання конструкцій. Для випадків, коли частота гармонійного навантаження досить віддалена від найближчих власних частот, можна знехтувати силами малого внутрішнього тертя. Матричне рівняння коливань для косинусної і синусної складових вектора навантаження $\vec{F}$ приймає вигляд:

$$\left[K\left(\vec{h}\right)-\omega^2 M\left(\vec{h}\right)\right]\vec{y}_{C,S}=\vec{F}_{C,S}\left(\vec{h}\right), \qquad (2)$$

де K, M – матриці жорсткості і мас конструкції.

Враховуючи, що матриця динамічної жорсткості в цьому випадку не вироджена, початкова і спряжена, при завдані інтегрального динамічного функціоналу J немає особливостей:

$$J=\int_0^T f\left(\vec{h},\vec{y}_C\cos\omega t+\vec{y}_S\sin\omega t\right)dt=J\left(\vec{h},\vec{y}_C,\vec{y}_S\right); \qquad (3)$$

$$\left[K-\omega^2 M\right]\vec{\psi}_{C,S}=\vec{\nabla}_{C,S}J,$$

$$\vec{\nabla}_C J=\frac{\partial J}{\partial\vec{y}_C},\quad \vec{\nabla}_S J=\frac{\partial J}{\partial\vec{y}_S}, \qquad (4)$$

де $\vec{\psi}$ – вектор спряжених змінних. Вираз для *гамільтоніана* H і коефіцієнтів чутливості набуває наступний вигляд:

$$H=\sum_{C,S}\vec{\psi}_{C,S}^T\left[K-\omega^2 M\right]\vec{y}_{C,S}-\vec{\psi}_{C,S}^T\vec{F}_{c,s}-J\,,$$

$$\vec{\nabla}_h J = \left\{ \left(\frac{\partial J}{\partial \vec{y}}, \vec{y}'_{h_i} \right) + \frac{\partial J^{я}}{\partial h_i} = -\frac{\partial H^{я}}{\partial h_i}, i = \overline{1,n} \right\},$$

де похідну від гамільтоніана беремо лише по параметру, що явно входить.

Другий підхід базується на формулюванні задачі в континуальному просторі, в якому визначено вихідне диференціальне, інтегральне або варіаційне рівняння, що описує модель конструкції. За другою методикою зв'язані змінні вводяться безпосередньо для варіаційного або диференціального формулювання початкової задачі аналізу (1). Після чого редукція вихідної і спряженої задач (перехід від безперервних змінних до дискретних з одночасним позбавленням від операцій диференціювання та / або інтегрування), а також варійованих функцій форми конструкції (введення поняття матеріальної похідної) може виконуватися як при формально незв'язаних етапи.

Задачі на власне значення λ (власні коливання і втрата стійкості) можна формально представити варіаційним рівнянням виду:

$$a_h(y, z) = \lambda b_h(y, z) \tag{5}$$

для усіх z із простору Z гладких кінематично допустимих «узагальнених» переміщень; $a_h(y, z)$; $b_h(y, z)$ – позитивно визначені і неперервні білінійні форми. Оскільки рівняння (5) однорідне по y, необхідно додати умову нормування $b_h(y, y) = 1$ для визначення власної функції єдиним чином. Варіюючи по h обидві частини рівняння (5), враховуючи властивості симетрії $a_h(y, z)$ і $b_h(y, z)$; $z = y$, відкидаючи члени, рівні 0, отримаємо формулу для обчислення похідної некратного власного значення:

$$\lambda' = a'_h(y, y) - \lambda b'_h(y, y),$$

де в правій частині штрих ' позначає варіацію білінійних форм по аргументу h, який входить явно.

Скінченно-вимірний і континуальний підходи пов'язані між собою (перший є апроксимацією другого). Перевагою другої методики є те, що використовуються поля переміщень, а не вузлові параметри, які визначаються матричними рівняннями. Для похідних знаходяться явні вирази в термінах фізичних величин, а не в термінах сум похідних від матриць скінчених елементів конструкцій. Аналіз чутливості конструкцій в умовах нестаціонарних навантажень, використовуючи рішення через власні форми і *інтеграл Дюамеля*, можна звести до управління функціоналами від «резонуючих» (залучених) форм коливань.

Результати моделювання. Можливості розробленого математичного апарату продемонструємо на декількох задачах. При розрахунку конструкцій, виготовлених з композитних матеріалів, часто користуються приведеними пружними модулями. Крім того, нерівномірність фізико-механічних властивостей може виникати як при виготовленні (наприклад, перехідні зони між різними матеріалами, що утворилися в результаті зварювання або пайки), так і при експлуатації (наприклад, під впливом градієнта температур).

Розглянемо крило аерокосмічної конструкції, яке жорстко защемлене по бортовий хорді. Деякі власні форми і розподіл полів коефіцієнтів чутливостей відповідних власних частот до зміни приведеного модуля пружності представлені на рис. 1, 2. Відзначимо, що, як правило, зони найбільших коефіцієнтів чутливості власних частот до зміни приведеного модуля пружності збігаються з областями максимальних динамічних напружень. Поліпшення якості поверхні в цих областях призводить до підвищення меж витривалості, нанесення демпфуючих покриттів – до зниження рівня динамічних напружень.

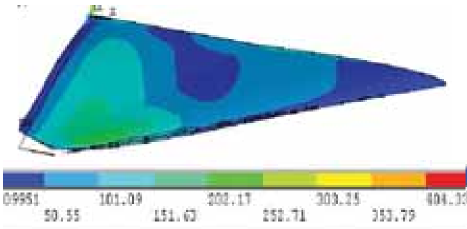

Рис. 1. – Третя власна частота.

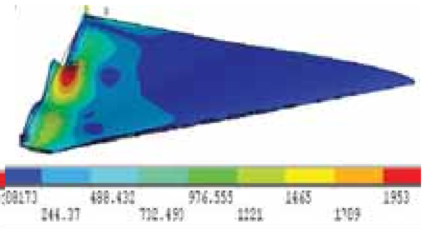

Рис. 2. – Десята власна частота.

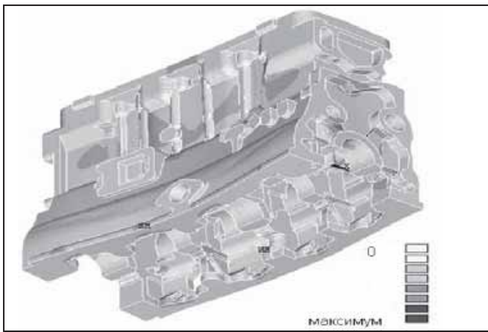

Рис. 3 – Розподіл полів коефіцієнтів чутливостей першої власної частоти до зміни приведеного модуля пружності.


Рис. 4 – Розподіл полів коефіцієнтів чутливостей другої власної частоти до зміни приєднаних мас.

Дослідження вібрацій корпусу двигуна представляє інтерес у зв'язку з можливою появою форм резонансних напруг, що призводять до утворення тріщин втомленості. Ця задача безпосередньо пов'язана з аналізом динаміки охолодження виливки [4], що дозволяє виявити місця можливого формування внутрішніх усадочних дефектів; похибки формоутворення, що визначають закономірні і випадкові зміни фізико-механічних властивостей матеріалів і геометричних розмірів. При аналізі якості відповідальних виливків складної геометричної форми в рамках так званого системного підходу, оцінка якості не зводиться лише до контролю відсутності ливарних дефектів, а визначається з вимог до литої деталі як елементу механічної системи.

При цьому ще на стадії моделювання можна порівняти зони технологічних дефектів при даній технології виготовлення з розподілом полів коефіцієнтів чутливостей функціоналів якості на поверхні виливки блок-картера дизеля (рис. 3, 4), а потім провести заходи щодо поліпшення якості виробництва. Формою ілюстрації результатів обране тонування поверхні. Світлими тонами показана зона близьких до нуля коефіцієнтів чутливостей, темними – екстремальних. Виконаний аналіз виявив для 2-ї форми власних коливань відповідність зон максимальних напруг із зоною розвитку тріщин втомленості на двигунах.

Висновки. Проведене дослідження дозволяє виконувати комплексний аналізу чутливості конструкцій при динамічних навантаженнях. Перевагами математичного апарату є узагальнення, уніфікація та формалізуючі можливості найбільш значущих проектних, розрахункових та технологічних аспектів аналізу чутливості конструкцій. Подальшим напрямком досліджень може бути застосування розробленої методики для оптимізації сучасних конструкцій.

Список літератури: **1.** *Тимофеев Ю.В.*, *Фадеев В.А.*, *Степанов М.С.*, *Назаренко С.А.* Обобщенная структура жизненного цикла машиностроительного производства и его изделий // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». – Харків, НТУ «ХПІ». – 2009. – № 1. – С. 86 – 95. **2.** *Flager F.* Multidisciplinary process integration and design optimization of a classroom building / F. Flager, B. Welle, P. Bansal, G. Soremekun, J. Haymaker // Journal of Information Technology in Construction (ITcon). – 2009. – Vol. 14. – P. 595 – 612. **3.** *Li M.* Optimal uncertainty reduction for multi-disciplinary multi-output systems using sensitivity analysis / *M. Li; J. Hamel; S. Azarm* // Structural & Multidisciplinary Optimization. – 2010. – Vol. 40. P. 77 – 96. **4.** *Алехин В.И.*, *Акимов О.В.*, *Марченко А.П.* Компьтерно-интегрированное моделирование литейных процессов в блоке цилиндров Daewoo Sens // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». – Харків, НТУ «ХПІ». – 2008. – Вип.2. – С. 3 – 7.

Bibliography (transliterated): **1.** Timofeev, Ju. V., et al. "Obobshhennaja struktura zhiznennogo cikla mashinostroitel'nogo proizvodstva i ego izdelij." *Visnik NTU «KhPI»*. No. 1. 2009. 86–95. Print. **2.** Flager, F., et al. "Multidisciplinary process integration and design optimization of a classroom building." *Journal of Information Technology in Construction (ITcon)*. Vol. 14. 2009. 595–612. Print. **3.** Li, M., J. Hamel and S. Azarm. "Optimal uncertainty reduction for multi-disciplinary multi-output systems using sensitivity analysis." *Structural & Multidisciplinary Optimization*. Vol. 40. 2010. 77–96. Print. **4.** Alehin, V. I., et al. "Komp'terno-integrirovannoe modelirovanie litejnyh processov v bloke cilindrov Daewoo Sens." *Visnik NTU «KhPI»*. No. 2. 2008. 3–7. Print.

Надійшла (received) 01.04.2014