

*Е.Ю. ТАРСИС*, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПИ»

### ВАРИАЦИОННО-СТРУКТУРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Дана вариационная и структурная постановка плоской контактной задачи теории упругости для однородных тел произвольной геометрической формы с известными и неизвестными областями контакта на основе функционала Рейсснера. На конкретном примере рассмотрена методика использования разработанных структур и ее численная реализация.

**Ключевые слова:** контактная задача теории упругости, вариационная постановка, функционал Рейсснера, метод R-функций, поиск области контакта, штамп, односторонние жесткие ограничения, теория упругости, контактная задача.

**Введение.** В данной работе предлагается систематизированное описание общей методики вариационной и структурной постановки плоских контактных задач теории упругости. При решении некоторых задач, рассмотренных, например, в работах [1, 2, 3], структуры решений строились применительно к конкретному случаю. Легко видеть, что эти решения вытекают из приведенной общей методики. В заключение приведено решение конкретной задачи, в которой, в частности, реализован алгоритм поиска неопределенной области контакта.

**Вариационная постановка задачи.** Рассмотрим упругое однородное тело  $\Omega$  с произвольной границей  $\partial\Omega$ , которое находится в условиях плоского напряженного состояния. Поясняющий рисунок можно найти далее в этой статье. На участке  $\partial\Omega_u$  границы  $\partial\Omega$  упругое тело контактирует с абсолютно твердыми телами (штампами), которые жестко связаны с ним. Это, так называемый, *случай полного сцепления*. Математически это выражается заданием вектора перемещений  $\bar{u}_s = \{u_{xs}, u_{ys}\}$ , который определяется формой штампов в районе области контакта  $\partial\Omega_u$  после их вдавливания в тело  $\Omega$ . На участке  $\partial\Omega_{st}$  границы  $\partial\Omega$  в упругое тело вдавливаются жесткие штампы, имеющие идеально гладкие основания (трение не учитывается). Принимается, что область контакта является неизменной в процессе деформирования упругого тела. На этом участке считается заданной проекция вектора перемещений на направление внешней нормали к участку  $\partial\Omega_{st}$  (нормальное смещение в области контакта определяется формой подошвы штампа и его осадкой). Касательная составляющая контактных напряжений на этом участке равна нулю. На участке  $\partial\Omega_{kp}$  границы  $\partial\Omega$  рассматриваемое тело соприкасается без зазора с абсолютно твердой и идеально гладкой поверхностью, то есть на тело наложены связи, способные воспринимать только сжимающие усилия в направлении общей нормали к контактирующим участкам, и представляющие

собой односторонние жесткие ограничения. Перемещения упругого тела на границах контакта с такими связями не могут быть произвольными и требуют выполнения *условий непроникания* контактирующих тел друг в друга. Особенностью такой постановки задачи является возможность учёта отрыва упругого тела от жесткой поверхности, что приводит к перераспределению контактных напряжений и, соответственно, к изменению параметров области контакта. На участках  $\partial\Omega_\sigma$ ,  $\partial\Omega_{st}$  и  $\partial\Omega_{kp}$  принята локальная правая система ортов, причем один из ортов направлен по внешней нормали к соответствующему участку. Векторы направляющих косинусов этих ортов обозначим через  $\bar{n}_\sigma$  и  $\bar{\tau}_\sigma$ ,  $\bar{n}_{st}$  и  $\bar{\tau}_{st}$ ,  $\bar{n}_{kp}$  и  $\bar{\tau}_{kp}$ . Матрицы направляющих косинусов обозначим так:

$$\text{для участков } \partial\Omega_\sigma - A_{\partial\Omega(\sigma)}, \partial\Omega_{st} - A_{\partial\Omega(st)}, \partial\Omega_{kp} - A_{\partial\Omega(kp)}.$$

При смешанной постановке плоской задачи теории упругости для описания напряженно-деформированного состояния упругого тела введем векторы напряжений  $\bar{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}\}$  и перемещений  $\bar{u} = \{u_x, u_y\}$ . Введем также две матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1/E & -\nu/E & 0 \\ -\nu/E & 1/E & 0 \\ 0 & 0 & 1/G \end{pmatrix},$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Тогда соотношения теории упругости в матричном виде относительно неизвестных компонентов векторов  $\bar{\sigma}$  и  $\bar{u}$  состоят из следующих уравнений: условия равновесия в области  $\Omega$ ,

$$(A)^T \bar{\sigma} = 0; \quad (1)$$

связи напряжений с перемещениями,

$$A\bar{u} - D\bar{\sigma} = 0; \quad (2)$$

граничных условий на участке  $\partial\Omega_\sigma$ ,

$$\left(A_{\partial\Omega(\sigma)}\right)^T \bar{\sigma} = \bar{N}_s; \quad (3)$$

граничных условий на участке  $\partial\Omega_u$ ,

$$\bar{u} = \bar{u}_s; \quad (4)$$

условий контакта на участке  $\partial\Omega_{st}$ ,

$$\left(\bar{n}_{st}\right)^T \bar{u} = h_0(x, y); \left(\bar{\tau}_{st}\right)^T \left(A_{\partial\Omega(st)}\right)^T \bar{\sigma} = 0, \quad (5)$$

где  $h_0(x, y)$  – функция, описывающая поверхность штампов после вдавливания.

Поскольку было принято, что в процессе вдавливания штампов площадки контакта можно считать неизменными, то добавляются условия равновесия штампов. В частности, должно выполняться условие

$$\int_{\partial\Omega_{st}} (\bar{n}_{st})^T (A_{\partial\Omega(st)})^T \bar{\sigma} d\partial\Omega_{st} = P, \quad (6)$$

где  $P$  – сила, прижимающая штамп к упругому телу  $\Omega$ .

Конкретизируем условия контакта тела с односторонними жесткими ограничениями. Идеальная гладкость поверхности  $\partial\Omega_{kp}$  позволяет заключить, что касательная составляющая вектора внешней нагрузки равна нулю, то есть

$$(\bar{\tau}_{kp})^T (A_{\partial\Omega(kp)})^T \bar{\sigma} = 0. \quad (7)$$

Кроме того, должны выполняться условия в виде неравенств

$$(\bar{n}_{kp})^T \bar{u} \leq 0; (\bar{n}_{kp})^T (A_{\partial\Omega(kp)})^T \bar{\sigma} \leq 0, \quad (8)$$

причем,

$$\begin{aligned} \text{если } (\bar{n}_{kp})^T \bar{u} = 0, \text{ то } (\bar{n}_{kp})^T (A_{\partial\Omega(kp)})^T \bar{\sigma} < 0, \text{ а если } (\bar{n}_{kp})^T \bar{u} < 0, \\ \text{то } (\bar{n}_{kp})^T (A_{\partial\Omega(kp)})^T \bar{\sigma} = 0. \end{aligned}$$

Уравнения (1) – (8) образуют полную систему уравнений рассматриваемой контактной задачи.

Границы контакта  $\partial\Omega_{kp}$  представляем состоящими из участка  $\partial\Omega_k$ , где выполняются условия

$$(\bar{n}_{kp})^T \bar{u} = 0; (\bar{n}_{kp})^T (A_{\partial\Omega(kp)})^T \bar{\sigma} < 0; (\bar{\tau}_{kp})^T (A_{\partial\Omega(kp)})^T \bar{\sigma} = 0, \quad (9)$$

и участка  $\partial\Omega_o$ , где выполняются условия

$$(\bar{n}_{kp})^T \bar{u} < 0; (\bar{n}_{kp})^T (A_{\partial\Omega(kp)})^T \bar{\sigma} = 0; (\bar{\tau}_{kp})^T (A_{\partial\Omega(kp)})^T \bar{\sigma} = 0. \quad (10)$$

Точки, разделяющие области реализации граничных условий в форме равенств и строгих неравенств (9, 10), заранее не известны и определяются в ходе итерационного процесса [1, 3]. На каждом шаге фиксируются предполагаемые области контакта  $\partial\Omega_k$ , и решается смешанная задача с граничными условиями в виде строгих равенств, как поиск точки стационарности *функционала Рейсснера* [1, 2, 3].

Справедливость сделанных предположений проверяется на основании полученного решения с помощью двух критериев, основанных на независимых аппроксимациях напряжений и перемещений. Так, для решения, полученного на основании заданных априори или установленных на предыдущем шаге итерационного процесса границ контакта, проверяется условие отрицательности контактных напряжений в зоне контакта. Если это условие не выполняется, то границей области контакта на следующем шаге нужно считать точку, в которой наблюдается изменение знака контактных напряжений. С другой стороны, для области, где предполагалось отсутствие контакта, проверяется условие отсутствия взаимного проникновения тел, а границей области в случае невыполнения этого условия считается точка, начиная с которой условия отрыва удовлетворяются. Обычно поиск неизвестных областей контакта осуществляется по одному из приоритетных критериев. Итерацион-

ный процесс завершается, если полученное на последнем шаге решение с допустимой точностью удовлетворяет заданным критериям.

Таким образом, на каждом шаге итерационного процесса функционал Рейсснера имеет вид:

$$\begin{aligned}
 I_R(\bar{u}, \bar{\sigma}) = & \iint_{\Omega} \left[ (\bar{\sigma})^T A \bar{u} - \frac{1}{2} (\bar{\sigma})^T D \bar{\sigma} \right] d\Omega - \int_{\partial\Omega_{\sigma}} (\bar{u})^T \bar{N}_s d\partial\Omega - \\
 & - \int_{\partial\Omega_u} (\bar{u} - \bar{u}_s)^T (A_s)^T \bar{\sigma} d\partial\Omega - \int_{\partial\Omega_{st}} \left( (\bar{n}_{st})^T \bar{u} - h_0 \right) (\bar{n}_{st})^T (A_{\partial\Omega(st)})^T \bar{\sigma} d\partial\Omega - \\
 & - \int_{\partial\Omega_k} (\bar{n}_{kp})^T \bar{u} (\bar{n}_{kp})^T (A_{\partial\Omega(kp)})^T \bar{\sigma} d\partial\Omega, \quad (11)
 \end{aligned}$$

а седловая точка функционала определяется из условия его стационарности.

**Структуры решения.** Для численного решения вариационной задачи будем использовать *метод R-функций* и *метод Рунца* [4, 5]. И приведем методику построения структурных формул (структур) для однородного тела произвольной геометрической формы, которые точно удовлетворяют граничным условиям (3) и (4) на  $\partial\Omega_{\sigma}$  и  $\partial\Omega_u$ , условиям контакта (5) на  $\partial\Omega_{st}$  и условиям контакта (9) и (10) соответственно на  $\partial\Omega_k$  и  $\partial\Omega_o$ . Это приведет к тому, что в функционале (11) интегралы

$$\begin{aligned}
 & \int_{\partial\Omega_u} (\bar{u} - \bar{u}_s)^T (A_s)^T \bar{\sigma} d\partial\Omega, \quad \int_{\partial\Omega_{st}} \left( (\bar{n}_{st})^T \bar{u} - h_0 \right) (\bar{n}_{st})^T (A_{\partial\Omega(st)})^T \bar{\sigma} d\partial\Omega, \\
 & \int_{\partial\Omega_k} (\bar{n}_{kp})^T \bar{u} (\bar{n}_{kp})^T (A_{\partial\Omega(kp)})^T \bar{\sigma} d\partial\Omega
 \end{aligned}$$

будут равны нулю и соответствующая исходная система уравнений упростится.

Пусть  $\omega = 0$ ,  $\omega_{st} = 0$ ,  $\omega_k = 0$ ,  $\omega_o = 0$  и  $\omega_{\sigma} = 0$ ,  $\omega_u = 0$  ( $\omega > 0$ ,  $\omega_{st} > 0$ ,  $\omega_k > 0$ ,  $\omega_o > 0$ ,  $\omega_{\sigma} > 0$ ,  $\omega_u > 0$  в  $\Omega$ ) – нормализованные до первого порядка уравнения  $\partial\Omega$ ,  $\partial\Omega_{st}$ ,  $\partial\Omega_k$ ,  $\partial\Omega_o$ ,  $\partial\Omega_{\sigma}$ ,  $\partial\Omega_u$ .

Примем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 (\bar{n}_{st})^T \bar{u} & \equiv u_n^{st}; (\bar{\tau}_{st})^T \bar{u} \equiv u_{\tau}^{st}; (\bar{\tau}_{st})^T (A_{\partial\Omega(st)})^T \bar{\sigma} \equiv \sigma_{\tau}^{st}; (\bar{n}_{st})^T (A_{\partial\Omega(st)})^T \bar{\sigma} \equiv \sigma_n^{st}; \\
 (\bar{\tau}_{kp})^T (A_{\partial\Omega(kp)})^T \bar{\sigma} & \equiv \sigma_{\tau}^{kp}; (\bar{n}_{kp})^T \bar{u} \equiv u_n^k; (\bar{\tau}_{kp})^T \bar{u} \equiv u_{\tau}^k; \\
 (\bar{n}_{kp})^T (A_{\partial\Omega(kp)})^T \bar{\sigma} & \equiv \sigma_n^k \text{ на } \partial\Omega_k; (\bar{n}_{kp})^T \bar{u} \equiv u_n^o; (\bar{\tau}_{kp})^T \bar{u} \equiv u_{\tau}^o; \\
 (\bar{n}_{kp})^T (A_{\partial\Omega(kp)})^T \bar{\sigma} & \equiv \sigma_n^o \text{ на } \partial\Omega_o; (\bar{n}_{\sigma})^T (A_{\partial\Omega(\sigma)})^T \bar{\sigma} \equiv \sigma_n^{\sigma}
 \end{aligned}$$

и  $(\bar{\tau}_{\sigma})^T (A_{\partial\Omega(\sigma)})^T \bar{\sigma} \equiv \sigma_{\tau}^{\sigma}$ , а компоненты векторов направляющих косинусов, которые выражаются через производные от соответствующих функций оме-

га, обозначим через:  $l_{st}, m_{st}, l_k, m_k, l_o, m_o, l_\sigma, m_\sigma$ .

Перейдем к построению структур для перемещений. Граничные условия для перемещений формулируются следующим образом:

$$\vec{u} = \vec{u}_s \text{ на } \partial\Omega_u; (\vec{n}_{st})^T \vec{u} (\equiv u_n^{st}) = h_0 \text{ на } \partial\Omega_{st}; (\vec{n}_{kp})^T \vec{u} (\equiv u_n^k) = 0 \text{ на } \partial\Omega_k. \quad (12)$$

Структуры для компонентов вектора перемещений будем искать в виде разложений

$$u_x = \psi_{x1} + \omega\psi_{11}, \quad u_y = \psi_{y1} + \omega\psi_{21},$$

где  $\psi_{x1}, \psi_{y1}, \psi_{11}, \psi_{21}$  – некоторые неопределенные функции.

Из краевых условий (12) видно, что искомые функции  $u_x$  и  $u_y$  известны лишь на участке  $\partial\Omega_u$ , а на участках  $\partial\Omega_{st}, \partial\Omega_k$  известны их нормальные составляющие. Поэтому функции  $\psi_{x1}, \psi_{y1}$  удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \psi_{x1} = u_{xs}, \quad \psi_{y1} = u_{ys} \text{ на } \partial\Omega_u \text{ и условиям } \psi_{x1} = l_{st}h_0 + m_{st}u_\tau^{st}, \\ \psi_{y1} = m_{st}h_0 - l_{st}u_\tau^{st} \text{ на } \partial\Omega_{st}; \quad \psi_{x1} = m_k u_\tau^k, \quad \psi_{y1} = -l_k u_\tau^k \text{ на } \partial\Omega_k, \end{aligned}$$

где  $u_\tau^k, u_\tau^{st}$  – неопределенные функции.

Применяя формулу «склеивания» [5] к функциям  $\psi_{x1}, \psi_{y1}$ , получаем структуры решения для перемещений в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_x = u_{xs} \frac{\omega_k \omega_{st}}{\omega_u + \omega_k \omega_{st}} + (l_{st}h_0 + m_{st}u_\tau^{st}) \frac{\omega_u \omega_k}{\omega_{st} + \omega_u \omega_k} + m_k u_\tau^k \frac{\omega_u \omega_{st}}{\omega_k + \omega_u \omega_{st}} + \Psi_{11} \omega_u \omega_k \omega_{st}; \\ u_y = u_{ys} \frac{\omega_k \omega_{st}}{\omega_u + \omega_k \omega_{st}} + (m_{st}h_0 - l_{st}u_\tau^{st}) \frac{\omega_u \omega_k}{\omega_{st} + \omega_u \omega_k} - \\ - l_k u_\tau^k \frac{\omega_u \omega_{st}}{\omega_k + \omega_u \omega_{st}} + \Psi_{21} \omega_u \omega_k \omega_{st}. \end{aligned} \quad (13)$$

Если участок  $\partial\Omega_u$  отсутствует, то структуры примут вид:

$$\begin{aligned} u_x = (l_{st}h_0 + m_{st}u_\tau^{st}) \frac{\omega_k}{\omega_{st} + \omega_k} + m_k u_\tau^k \frac{\omega_{st}}{\omega_k + \omega_{st}} + \psi_{11} \omega_k \omega_{st}; \\ u_y = (m_{st}h_0 - l_{st}u_\tau^{st}) \frac{\omega_k}{\omega_{st} + \omega_k} - l_k u_\tau^k \frac{\omega_{st}}{\omega_k + \omega_{st}} + \psi_{21} \omega_k \omega_{st}. \end{aligned} \quad (14)$$

Если отсутствуют участки  $\partial\Omega_u$  и  $\partial\Omega_{st}$ , то структуры примут вид:

$$u_x = m_k u_\tau^k + \psi_{11} \omega_k; \quad u_y = -l_k u_\tau^k + \psi_{21} \omega_k. \quad (15)$$

Далее построим структуры для напряжений; здесь граничные условия формулируются следующим образом:

$$\begin{aligned} (A_s)^T \vec{\sigma} = \vec{N}_s: \quad \sigma_n = \sigma_n^\sigma, \quad \sigma_\tau = \sigma_\tau^\sigma \text{ на } \partial\Omega_\sigma; \quad \sigma_\tau = \sigma_\tau^{st} = 0 \text{ на } \partial\Omega_{st}; \\ \sigma_\tau = \sigma_\tau^{kp} = 0 \text{ на } \partial\Omega_k; \quad \sigma_n = \sigma_n^o = 0, \quad \sigma_\tau = \sigma_\tau^{kp} = 0 \text{ на } \partial\Omega_o, \end{aligned}$$

где  $\sigma_n^\sigma, \sigma_\tau^\sigma$  – заданные функции (нормальные и касательные поверхностные нагрузки).

Структуры для компонентов вектора напряжений будем искать в виде разложений:

$$\sigma_x = \Phi_{x1} + \omega\psi_{31}, \quad \sigma_y = \Phi_{y1} + \omega\psi_{41}, \quad \sigma_{xy} = \Phi_{xy1} + \omega\psi_{51},$$

где  $\Phi_{x1}, \Phi_{y1}, \Phi_{xy1}, \psi_{31}, \psi_{41}, \psi_{51}$  – некоторые неопределенные функции.

Заметим, что

$$\begin{aligned} \Phi_{x1} &= (l_\sigma)^2 \sigma_n^\sigma - 2l_\sigma m_\sigma \sigma_\tau^\sigma + (m_\sigma)^2 \Phi_\sigma, \quad \Phi_{y1} = (m_\sigma)^2 \sigma_n^\sigma + 2l_\sigma m_\sigma \sigma_\tau^\sigma + (l_\sigma)^2 \Phi_\sigma, \\ \Phi_{xy1} &= l_\sigma m_\sigma \sigma_n^\sigma + \left( (l_\sigma)^2 - (m_\sigma)^2 \right) \sigma_\tau^\sigma - l_\sigma m_\sigma \Phi_\sigma \text{ на } \partial\Omega_\sigma; \\ \Phi_{x1} &= (l_{st})^2 \sigma_n^{st} + (m_{st})^2 \Phi_{st}, \quad \Phi_{y1} = (m_{st})^2 \sigma_n^{st} + (l_{st})^2 \Phi_{st}, \\ \Phi_{xy1} &= l_{st} m_{st} \sigma_n^{st} - l_{st} m_{st} \Phi_{st} \text{ на } \partial\Omega_{st}; \quad \Phi_{x1} = (l_k)^2 \sigma_n^k + (m_k)^2 \Phi_k, \\ \Phi_{y1} &= (m_k)^2 \sigma_n^k + (l_k)^2 \Phi_k, \quad \Phi_{xy1} = l_k m_k \sigma_n^k - l_k m_k \Phi_k \text{ на } \partial\Omega_k \\ \text{и } \Phi_{x1} &= (m_o)^2 \Phi_o, \quad \Phi_{y1} = (l_o)^2 \Phi_o, \quad \Phi_{xy1} = -l_o m_o \Phi_o \text{ на } \partial\Omega_o. \end{aligned}$$

Применяя формулу «склеивания» к функциям  $\Phi_{x1}, \Phi_{y1}, \Phi_{xy1}$ , получаем (универсальные, самые общие структуры) решения для напряжений в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \left[ (l_\sigma)^2 \sigma_n^\sigma - 2l_\sigma m_\sigma \sigma_\tau^\sigma + (m_\sigma)^2 \Phi_\sigma \right] \frac{\omega_k \omega_o \omega_{st}}{\omega_\sigma + \omega_k \omega_o \omega_{st}} + \\ &+ \left[ (l_{st})^2 \sigma_n^{st} + (m_{st})^2 \Phi_{st} \right] \frac{\omega_\sigma \omega_k \omega_o}{\omega_{st} + \omega_\sigma \omega_k \omega_o} + \left[ (l_k)^2 \sigma_n^k + (m_k)^2 \Phi_k \right] \frac{\omega_\sigma \omega_{st} \omega_o}{\omega_k + \omega_\sigma \omega_{st} \omega_o} + \\ &+ (m_o)^2 \Phi_o \frac{\omega_\sigma \omega_{st} \omega_k}{\omega_o + \omega_\sigma \omega_{st} \omega_k} + \psi_{31} \omega_\sigma \omega_{st} \omega_k \omega_o; \\ \sigma_y &= \left[ (m_\sigma)^2 \sigma_n^\sigma + 2l_\sigma m_\sigma \sigma_\tau^\sigma + (l_\sigma)^2 \Phi_\sigma \right] \frac{\omega_k \omega_o \omega_{st}}{\omega_\sigma + \omega_k \omega_o \omega_{st}} + \\ &+ \left[ (m_{st})^2 \sigma_n^{st} + (l_{st})^2 \Phi_{st} \right] \frac{\omega_\sigma \omega_k \omega_o}{\omega_{st} + \omega_\sigma \omega_k \omega_o} + \left[ (m_k)^2 \sigma_n^k + (l_k)^2 \Phi_k \right] \frac{\omega_\sigma \omega_{st} \omega_o}{\omega_k + \omega_\sigma \omega_{st} \omega_o} + \\ &+ (l_o)^2 \Phi_o \frac{\omega_\sigma \omega_{st} \omega_k}{\omega_o + \omega_\sigma \omega_{st} \omega_k} + \psi_{41} \omega_\sigma \omega_{st} \omega_k \omega_o; \\ \sigma_{xy} &= \left[ l_\sigma m_\sigma \sigma_n^\sigma + \left( (l_\sigma)^2 - (m_\sigma)^2 \right) \sigma_\tau^\sigma - l_\sigma m_\sigma \Phi_\sigma \right] \frac{\omega_k \omega_o \omega_{st}}{\omega_\sigma + \omega_k \omega_o \omega_{st}} + \\ &+ \left[ l_{st} m_{st} \sigma_n^{st} - l_{st} m_{st} \Phi_{st} \right] \frac{\omega_\sigma \omega_k \omega_o}{\omega_{st} + \omega_\sigma \omega_k \omega_o} + \left[ l_k m_k \sigma_n^k - l_k m_k \Phi_k \right] \frac{\omega_\sigma \omega_{st} \omega_o}{\omega_k + \omega_\sigma \omega_{st} \omega_o} - \\ &- l_o m_o \Phi_o + \psi_{51} \omega_\sigma \omega_{st} \omega_k \omega_o. \end{aligned} \tag{16}$$

Если нет участков отрыва, то общие структуры имеют вид:

$$\sigma_x = \left[ (l_\sigma)^2 \sigma_n^\sigma - 2l_\sigma m_\sigma \sigma_\tau^\sigma + (m_\sigma)^2 \Phi_\sigma \right] \frac{\omega_k \omega_{st}}{\omega_\sigma + \omega_k \omega_{st}} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ (l_{st})^2 \sigma_n^{st} + (m_{st})^2 \Phi_{st} \right] \frac{\omega_\sigma \omega_k}{\omega_{st} + \omega_\sigma \omega_k} + \\
& + \left[ (l_k)^2 \sigma_n^k + (m_k)^2 \Phi_k \right] \frac{\omega_\sigma \omega_{st}}{\omega_k + \omega_\sigma \omega_{st}} + \psi_{31} \omega_k \omega_\sigma \omega_{st}; \\
\sigma_y = & \left[ (m_\sigma)^2 \sigma_n^\sigma + 2l_\sigma m_\sigma \sigma_\tau^\sigma + (l_\sigma)^2 \Phi_\sigma \right] \frac{\omega_k \omega_{st}}{\omega_\sigma + \omega_k \omega_{st}} + \\
& + \left[ (m_{st})^2 \sigma_n^{st} + (l_{st})^2 \Phi_{st} \right] \frac{\omega_\sigma \omega_k}{\omega_{st} + \omega_\sigma \omega_k} + \\
& + \left[ (m_k)^2 \sigma_n^k + (l_k)^2 \Phi_k \right] \frac{\omega_\sigma \omega_{st}}{\omega_k + \omega_\sigma \omega_{st}} + \psi_{41} \omega_k \omega_\sigma \omega_{st}; \\
\sigma_{xy} = & \left[ l_\sigma m_\sigma \sigma_n^\sigma + \left( (l_\sigma)^2 - (m_\sigma)^2 \right) \sigma_\tau^\sigma - l_\sigma m_\sigma \Phi_\sigma \right] \frac{\omega_k \omega_{st}}{\omega_\sigma + \omega_k \omega_{st}} + \\
& + \left[ l_{st} m_{st} \sigma_n^{st} - l_{st} m_{st} \Phi_{st} \right] \frac{\omega_\sigma \omega_k}{\omega_{st} + \omega_\sigma \omega_k} + \\
& + \left[ l_k m_k \sigma_n^k - l_k m_k \Phi_k \right] \frac{\omega_\sigma \omega_{st}}{\omega_k + \omega_\sigma \omega_{st}} + \psi_{51} \omega_k \omega_\sigma \omega_{st}. \tag{17}
\end{aligned}$$

Если отсутствует участок  $\partial\Omega_{st}$ , то

$$\begin{aligned}
\sigma_x = & \left[ (l_\sigma)^2 \sigma_n^\sigma - 2l_\sigma m_\sigma \sigma_\tau^\sigma + (m_\sigma)^2 \Phi_\sigma \right] \frac{\omega_k \omega_o}{\omega_\sigma + \omega_k \omega_o} + \\
& + \left[ (l_k)^2 \sigma_n^k + (m_k)^2 \Phi_k \right] \frac{\omega_\sigma \omega_o}{\omega_k + \omega_\sigma \omega_o} + \\
& + (m_o)^2 \Phi_o \frac{\omega_\sigma \omega_k}{\omega_o + \omega_\sigma \omega_k} + \psi_{31} \omega_\sigma \omega_k \omega_o; \\
\sigma_y = & \left[ (m_\sigma)^2 \sigma_n^\sigma + 2l_\sigma m_\sigma \sigma_\tau^\sigma + (l_\sigma)^2 \Phi_\sigma \right] \frac{\omega_k \omega_o}{\omega_\sigma + \omega_k \omega_o} + \\
& + \left[ (m_k)^2 \sigma_n^k + (l_k)^2 \Phi_k \right] \frac{\omega_\sigma \omega_o}{\omega_k + \omega_\sigma \omega_o} + \\
& + (l_o)^2 \Phi_o \frac{\omega_\sigma \omega_k}{\omega_o + \omega_\sigma \omega_k} + \psi_{41} \omega_\sigma \omega_k \omega_o; \\
\sigma_{xy} = & \left[ l_\sigma m_\sigma \sigma_n^\sigma + \left( (l_\sigma)^2 - (m_\sigma)^2 \right) \sigma_\tau^\sigma - l_\sigma m_\sigma \Phi_\sigma \right] \frac{\omega_k \omega_o}{\omega_\sigma + \omega_k \omega_o} + \\
& + \left[ l_k m_k \sigma_n^k - l_k m_k \Phi_k \right] \frac{\omega_\sigma \omega_o}{\omega_k + \omega_\sigma \omega_o} - \\
& - l_o m_o \Phi_o + \psi_{61} \omega_\sigma \omega_k \omega_o. \tag{18}
\end{aligned}$$

Если нет участков отрыва и участка  $\partial\Omega_{st}$ , то структуры приобретают

ВИД

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \left[ (l_\sigma)^2 \sigma_n^\sigma - 2l_\sigma m_\sigma \sigma_\tau^\sigma + (m_\sigma)^2 \Phi_\sigma \right] \frac{\omega_k}{\omega_\sigma + \omega_k} + \\
 &+ \left[ (l_k)^2 \sigma_n^k + (m_k)^2 \Phi_k \right] \frac{\omega_\sigma}{\omega_k + \omega_\sigma} + \psi_{31} \omega_\sigma \omega_k; \\
 \sigma_y &= \left[ (m_\sigma)^2 \sigma_n^\sigma + 2l_\sigma m_\sigma \sigma_\tau^\sigma + (l_\sigma)^2 \Phi_\sigma \right] \frac{\omega_k}{\omega_\sigma + \omega_k} + \\
 &+ \left[ (m_k)^2 \sigma_n^k + (l_k)^2 \Phi_k \right] \frac{\omega_\sigma}{\omega_k + \omega_\sigma} + \psi_{41} \omega_\sigma \omega_k; \\
 \sigma_{xy} &= \left[ l_\sigma m_\sigma \sigma_n^\sigma + \left( (l_\sigma)^2 - (m_\sigma)^2 \right) \sigma_\tau^\sigma - l_\sigma m_\sigma \Phi_\sigma \right] \frac{\omega_k}{\omega_\sigma + \omega_k} + \\
 &+ \left[ l_k m_k \sigma_n^k - l_k m_k \Phi_k \right] \frac{\omega_\sigma}{\omega_k + \omega_\sigma} + \psi_{61} \omega_\sigma \omega_k; \quad (19)
 \end{aligned}$$

где  $u_\tau^k, u_\tau^{st}, \psi_{11}, \psi_{21}, \Phi_\sigma, \sigma_n^{st}, \Phi_{st}, \sigma_n^k, \Phi_k, \Phi_o, \psi_{31}, \psi_{41}, \psi_{51}$  – неопределенные компоненты структур решения.

Использованные неопределенные компоненты представляются линейными комбинациями некоторых полных систем функций и ищутся по методу Ритца из условия стационарности функционала Рейсснера.

**Результаты численного исследования.** Одну из реализаций предложенной методики проиллюстрируем на следующей задаче. Рассмотрим упругую трапецию ( $\Omega$ ) в системе координат  $Oxy$ , с границей  $\partial\Omega = \partial\Omega_{st} \cup \partial\Omega_\sigma \cup \cup \partial\Omega_{kp}$  (рис. 1).

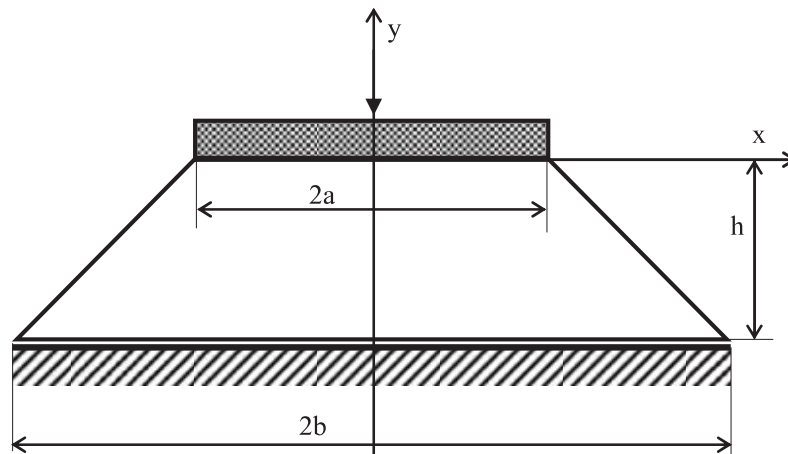


Рис. 1 – Тело, опирающееся на жесткое основание и нагруженное штампом.



Как видно из рисунка, нижнее основание трапеции ( $\partial\Omega_{kp}$ ) опирается на абсолютно жесткое идеально гладкое основание. В среднюю часть ( $\partial\Omega_{st}$ ) верхнего основания в трапецию вдавливаются жесткий штамп с прямолинейным основанием без учета трения. По верхнему основанию ( $\partial\Omega_{st}$ ) трапеция сжимается жестким штампом с прямолинейным основанием без учета трения. Боковые стороны ( $\partial\Omega^\sigma$ ) свободны. Остальные участки  $\partial\Omega^\sigma$  границы свободны.

Контактную поверхность  $\partial\Omega_k$  будем считать состоящей из  $n$  участков, для каждого из которых заданы координата центра  $d_{mi}$  и полуширина  $L_{ki}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Введем следующие опорные области:

$$\Omega_1 = \left[ f_1 = \frac{(h/2)^2 - (y+h/2)^2}{h} \geq 0 \right]; \quad \Omega_2 = [f_2 = -y \geq 0]; \quad \Omega_3 = [f_3 = y+h \geq 0];$$

$$\Omega_{bi} = \left[ f_{bi} = \frac{L_{ki}^2 - (x-d_{mi})^2}{2L_{ki}} \geq 0 \right]; \quad \Omega_{mi} = \left[ f_{mi} = \frac{(x-d_{mi})^2 - L_{ki}^2}{2L_{ki}} \geq 0 \right],$$

если  $d_{mi} \geq 0$  и

$$\Omega_{bi} = \left[ f_{bi} = \frac{L_{ki}^2 - (x+d_{mi})^2}{2L_{ki}} \geq 0 \right]; \quad \Omega_{mi} = \left[ f_{mi} = \frac{(x+d_{mi})^2 - L_{ki}^2}{2L_{ki}} \geq 0 \right],$$

если  $d_{mi} \leq 0$ .

Введем также опорные области

$$\Omega_4 = \left[ f_4 = \frac{-xh + y(a-b) + ha}{\sqrt{(a-b)^2 + h^2}} \geq 0 \right]; \quad \Omega_5 = \left[ f_5 = \frac{xh - y(b-a) + ha}{\sqrt{(b-a)^2 + h^2}} \geq 0 \right];$$

$$\Omega_6 = \left[ f_6 = \frac{x^2 - l^2}{2l} \geq 0 \right]; \quad \Omega_7 = \left[ f_7 = \frac{l^2 - x^2}{2l} \geq 0 \right],$$

где  $l$  – полуширина участка контакта под штампом.

На первом шаге итерационного процесса принимаем, что область контакта  $\partial\Omega_k$  состоит из одного участка и равна длине основания упругого тела, то есть  $i = 1$ ,  $2L_{k1} = 2b$ . Для решения задачи на первом шаге будем использовать структурные формулы (14), (17) в которых принято

$$l_{st} = 0; \quad m_{st} = 1; \quad l_k = 0; \quad m_k = -1; \quad u_\tau^{st} \frac{\omega_k}{\omega_{st} + \omega_k} - u_\tau^k \frac{\omega_{st}}{\omega_k + \omega_{st}} + \psi_{11} \omega_k \omega_{st} \equiv \Phi_1;$$

$$\psi_{21} \equiv \Phi_2; \quad \sigma_n^\sigma = 0, \quad \sigma_\tau^\sigma = 0; \quad \Phi_\sigma \equiv \Phi_3,$$

$$\Phi_{st} \frac{\omega_{\sigma} \omega_k}{\omega_{st} + \omega_{\sigma} \omega_k} + \Phi_k \frac{\omega_{\sigma} \omega_{st}}{\omega_k + \omega_{\sigma} \omega_{st}} + \psi_{31} \omega_k \omega_{\sigma} \omega_{st} \equiv \Phi_4 \omega_{\sigma};$$

$$\sigma_n^{st} \frac{\omega_{\sigma} \omega_k}{\omega_{st} + \omega_{\sigma} \omega_k} + \sigma_n^k \frac{\omega_{\sigma} \omega_{st}}{\omega_k + \omega_{\sigma} \omega_{st}} + \psi_{41} \omega_k \omega_{\sigma} \omega_{st} \equiv \Phi_5 \omega_{\sigma}; \psi_{51} \omega_k \omega_{\sigma} \omega_{st} \equiv \Phi_6 \omega.$$

В результате они будут иметь вид:

$$u_x = \Phi_1; u_y = \frac{h_0 \omega_k}{\omega_{st} + \omega_k} + \Phi_2 \omega_k \omega_{st}; \sigma_x = (m_{\sigma})^2 \Phi_3 \frac{\omega_k \omega_{st}}{\omega_{\sigma} + \omega_k \omega_{st}} + \Phi_4 \omega_{\sigma};$$

$$\sigma_y = (l_{\sigma})^2 \Phi_3 \frac{\omega_k \omega_{st}}{\omega_{\sigma} + \omega_k \omega_{st}} + \Phi_5 \omega_{\sigma}; \sigma_{xy} = -l_{\sigma} m_{\sigma} \Phi_3 \frac{\omega_k \omega_{st}}{\omega_{\sigma} + \omega_k \omega_{st}} + \Phi_6 \omega.$$

Запишем с помощью R-операций [5, 6], входящие в структуры функции  $\omega_{\sigma}, \omega_{st}, \omega_k, \omega$  следующим образом:

$$\omega_k = f_3; \omega_{\sigma} = f_4 \wedge_0 f_5 \quad \omega_{\sigma} = (f_2 \vee_0 f_7) \wedge_0 (f_4 \wedge_0 f_5); \omega_{st} = f_2; \omega_{st} = f_2 \vee_0 f_6,$$

$$\omega = (f_4 \wedge_0 f_5) \wedge_0 f_1.$$

На последующих шагах итерационного процесса, после установления текущих областей контакта  $\partial\Omega_k$  и отрыва  $\partial\Omega_o$ , принимаем:

$$\omega_k = f_3 \vee_0 \left( \wedge_{i=1}^n f_{mi} \right); \omega_{\sigma}^* = \omega_0 \wedge_0 \omega_{\sigma} = \left[ f_3 \vee_0 \left( \wedge_{i=1}^n f_{bi} \right) \right] \wedge_0 [f_4 \wedge_0 f_5];$$

$$\omega_{\sigma}^* = \omega_0 \wedge_0 \omega_{\sigma} = \left[ f_3 \vee_0 \left( \wedge_{i=1}^n f_{bi} \right) \right] \wedge_0 [(f_4 \wedge_0 f_5) \wedge_0 (f_7 \vee_0 f_2)].$$

Структурные формулы для перемещений остаются прежними. Поскольку предполагается наличие областей отрыва, то в качестве структур для напряжений будем использовать структурные формулы (16), в которых принимались те же обозначения, что и в структурах (17), а так же, что  $\Phi^o \equiv 0$ . Таким образом, они примут следующий вид:

$$\sigma_x = (m_{\sigma}^*)^2 \Phi_3 \frac{\omega_k \omega_{st}}{\omega_{\sigma}^* + \omega_k \omega_{st}} + \Phi_4 \omega_{\sigma}^*, \quad \sigma_y = (l_{\sigma})^2 \Phi_3 \frac{\omega_k \omega_{st}}{\omega_{\sigma}^* + \omega_k \omega_{st}} + \Phi_5 \omega_{\sigma}^*,$$

$$\sigma_{xy} = -l_{\sigma} m_{\sigma} \Phi_3 \frac{\omega_k \omega_{st}}{\omega_{\sigma}^* + \omega_k \omega_{st}} + \Phi_6 \omega_{\sigma}^* \omega_{st} \omega_k (\omega).$$

Для аппроксимации неопределенных компонент структур  $\Phi_i, i = \overline{1,6}$  использовались *полиномы Чебышева*. Расчеты проводились при следующих значениях физических и геометрических параметров:

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ кГ/см}^2, \quad G = 0.77 \cdot 10^6, \quad \nu = 0.3, \quad a = 5 \text{ см}, \quad h = 10 \text{ см},$$

$$b = 15 \text{ см}, \quad h_0 = -8 \cdot 10^{-2} \text{ см}.$$

Окончательное решение выбрано из некоторой совокупности решений, отличающихся количеством базисных функций в аппроксимациях напряжений и перемещений, наиболее точно удовлетворяющее условиям (9) и (10), а также общим критериям [4]. При определении границы области контакта для выполнения локальных критериев с удовлетворительной точностью потребо-

валось 5 итераций. При этом критерии точности в определении точки границы области контакта по напряжениям и перемещениям были выполнены с относительной погрешностью, не превышающей 2%.

Установлено что контактная поверхность состоит из одного участка с центром  $d_{m1} = 0$  и полушириной  $L_{k1} = 13.18$  см . Значения интегралов  $I_1$  и  $I_2$  оказались равными, соответственно,  $0.435 \cdot 10^4$  и  $0.433 \cdot 10^4$  с относительной погрешностью 0.46%. Выполнение условий равновесия проверялось в ряде сечений по высоте тела. Значения соответствующих интегралов приведены в таблице.

Таблица – Значения интегралов по условиям равновесия

| у, см              | 0                  | -2                 | -4                 | -6                 | -8                 | -10                |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| Значение интеграла | $0.226 \cdot 10^6$ | $0.234 \cdot 10^6$ | $0.228 \cdot 10^6$ | $0.226 \cdot 10^6$ | $0.235 \cdot 10^6$ | $0.237 \cdot 10^6$ |

Здесь значение интеграла в сечении  $y = 0$  равно значению нагрузки, передаваемой со стороны штампа на трапецию. Как видно из таблицы различия не превышают 1.4%.

**Выводы:** Приведено систематизированное описание общей методики постановки и решения плоской задачи теории упругости на основе использования метода R-функций и функционала Рейсснера. Возможность независимой аппроксимации перемещений и напряжений и простота построения структур решений является ее существенным преимуществом. Объектами исследования являются однородные тела произвольной геометрической формы с известными и неизвестными заранее областями контакта.

Приведены структуры решений для различных граничных условий, допускающие конкретизацию и модификацию в зависимости от специфики задачи.

Одна из реализаций методики проиллюстрирована на конкретной задаче. Достоверность и точность результатов подтверждается выполнением предложенных критериев.

**Список литературы:** 1. Тарсис Е.Ю. Решение односторонних контактных задач теории упругости вариационно-структурным методом для смешанного функционала Рейсснера. Динамика и прочность машин. – Харьков: ХГПУ. – 2000. – Вып. 57. – С. 16 – 23. 2. Тарсис Е.Ю. Контактная задача для плоского тела с односторонними жесткими ограничениями // Вестник НТУ «ХПИ». – Харьков: НТУ «ХПИ», 2001. – №6 – С. 251 – 255. 3. Рвачев В.Л., Тарсис Е.Ю. Вариационно-структурный метод для решения задач теории упругости на основе функционала Рейсснера // Вісник Інженерної академії України. – Київ, 2001. – №3 – С. 17 – 20. 4. Тарсис Е.Ю. Исследование эффективности вариационно-структурного метода для функционала Рейсснера в смешанных задачах теории упругости // Вестник Харьковского государственного политехнического университета. – Харьков: ХГПУ, 1999. – Вып. 29. – С. 34 – 42. 5. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, – 1982. – 552 с. 6. Рвачев В.Л., Синекон Н.С. Метод R-функций в задачах теории упругости и пластичности. – Киев: Наук. думка, – 1990. – 216 с.

**Bibliography (transliterated):** 1. Tarsis, E. Ju. "Reshenie odnostoronnykh kontaknykh zadach teorii uprugosti variacionno-strukturnym metodom dlja smeshannogo funkcionala Rejssnera." *Dinamika i ISSN 2222-0631. Вісник НТУ «ХПИ». 2014. №18 (1061)*

*prochnost' mashin*. No. 57. Kharkov: KhGPU, 2000. 16–23. Print. 2. Tarsis, E. Ju. "Kontaktная задача для плоского тела с односторонними жесткими ограничениями." *Vestnik NTU «KhPI»*. No. 6. Kharkov: NTU «KhPI», 2001. 251–255. Print. 3. Rvachev, V. L., and E. Ju. Tarsis "Variacionno-strukturnyj metod dlja reshenija zadach teorii uprugosti na osnove funkcionala Rejssnera." *Visnik Inzhenernoi akademii Ukraïni*. No. 3. Kiïv, 2001. 17–20. Print. 4. Tarsis, E. Ju. "Issledovanie jeffektivnosti variacionno-strukturnogo metoda dlja funkcionala Rejssnera v smeshannyh zadachah teorii uprugosti." *Vestnik Har'kovskogo gosudarstvennogo politehnicheskogo universiteta*. No. 29. Kharkov: KhGPU, 1999. 34–42. Print. 5. Rvachev, V. L. *Teorija R-funkcij i nekotorye ee prilozhenija*. Kiev: Nauk. dumka, 1982. Print. 6. Rvachev, V. L., and N. S. Sinekop. *Metod R-funkcij v zadachah teorii uprugosti i plastichnosti*. Kiev: Nauk. dumka, 1990. Print.

*Поступила (received) 31.03.2014*

УДК 532.57:519.63

**Н.С. ТИМОШЕНКО**, аспирант ДонНУ, Донецк;  
**А.Н. СЕМКО**, д-р. техн. наук, проф., ДонНУ, Донецк

#### **ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ВЫТЯЖНОГО ГАЗОХОДА ДЛЯ ДУГОВЫХ СТАЛЕПЛАВИЛЬНЫХ ПЕЧЕЙ**

Выполнено исследование модели кольцевого вытяжного газохода с равномерным всасыванием газа, представляющего собой часть системы аспирации дуговой сталеплавильной печи. Разработана инженерная методика расчета параметров газохода. Предложенная конструкция газохода обеспечивает равномерное всасывание газа по всей длине, что при использовании его в системе аспирации ДСП будет способствовать снижению и локализации пылегазовых выбросов. Сравнение результатов расчетов по инженерной методике и численного решения в пакете прикладных программ с результатами экспериментов на модели линейного вытяжного газохода, показало хорошее совпадение.

**Ключевые слова:** сталеплавильная печь, модель газохода, аспирация, теория вентиляции, визуализация потока.

**Введение.** При выплавке стали в дуговых сталеплавильных печах (ДСП) выделяется большое количество запыленных технологических газов, которые надо отводить из печи и утилизировать. Средний выход газа из печи составляет  $200–300\text{ м}^3$  на 1 тонну производимой стали. Запыленность газа составляет от 10 до  $50\text{ г/м}^3$ . Как показывают исследования [1–3] с пылегазовыми выбросами теряется в среднем 15% вводимой энергии и до 2,5% металлошхты в виде плавильной пыли. С целью повышения энергоэффективности производства стали в ДСП и снижению количества неорганизованных выбросов представляется актуальным оптимизировать систему газоудаления. Оптимальная конструкция и правильно организованная работа вытяжного газохода позволит минимизировать неорганизованные выбросы и снизить вынос материалов из печи в виде плавильной пыли.

---

© Н. С. Тимошенко, А. Н. Семко, 2014