

Foster. "Application of a Phenomenological Soot Model to Diesel Engine Combustion." *In: International Symposium COMMODIA*, Tokyo. 1994. 571–576. Print. **11**. Surovikin, V. F. "Analiticheskoe opisanie processov zarodysheobrazovaniya i rosta chastic sazhi pri termicheskom razlozhenii aromaticeskikh uglevodorodov v gazovoj faze." *Himija tverdogo topliva*. No. 1. 1976. 111–122. Print. **12**. Binesh, A., and S. Hossainpour. "Three Dimensional Modeling of Mixture Formation and Combustion in a Direct Injection Heavy-Duty Diesel Engine." *World Academy of Science, Engineering and Technology*. V. 2. 2008. 176–181. Print. **13**. Chryssakis, C. A., and D. N. Assanis. "Effect of multiple injections on fuel-air mixing and soot formation in diesel combustion using direct flame visualization and CFD techniques." *ASME Internal Combustion Engine Division 2005: Spring Technical Conference*, Chicago, IL, USA, April 5-7, 2005. 171–180. Print. **14**. Arsie, I., C. Pianese and M. Sorrentino. "Effects of Control Parameters on Performance and Emissions of HSDI Diesel Engines: Investigation via Two Zone Modelling." *Oil & Gas Science and Technology*. Rev. IFP, Vol. 62. No. 4. 2007. 457–469. Print. **15**. Rakopoulos, C. D., et al. "Validation and sensitivity analysis of a two zone Diesel engine model for combustion and emissions prediction." *Energy Conversion and Management*. No 45. 2004. 1471–1495. Print. **16**. Kazakov, A., and D. Foster. "Modeling of Soot Formation During DI Diesel Combustion Using a Multi-Step Phenomenological Model." *SAE Techn. Pap. Ser.* No. 982463. 1998. Print. **17**. Zel'dovich, Ja. B., P. Ja. Sadovnikov and D. I. Frank-Kameneckij. *Okislenie azota pri gorenii*. Moscow: Izd. AN SSSR, 1947. Print. **18**. Gavrilo, V. V. "Matematicheskoe modelirovanie gorenija topliva i obrazovanie oksidi azota v dizele." *Izv. vuzov. Mashinostroenie*. No. 7. 2003. 35–40. Print. **19**. Parsadanov, I. V. *Pidvyshhennja jakosti i konkurentospromozhnosti dyzeliv na osnovi kompleksnogo palyvno-ekologichnogo kryteriju*. Kharkiv: Vydavnychyj centr NTU «HPI», 2003. Print. **20**. Sabau, A., and O. Emil. "Soot Modeling in Diesel Engine." *3rd International Conference on Environmental and Geological Science and Engineering*. Constantza, Romania, 2010. 126–131. Print. **21**. Zvonov, V. A., G. S. Komilov and A. V. Kozlov. *Ocenka i kontrol' vybrosov dispersnyh chastic s otrabotavshimi gazami dizelej*. Moscow: Iz-vo Prima-Press-M, 2005. Print.

Поступила (received) 06.10.2014

УДК 539.375

**О.С. МАЧУГА**, канд. фіз.-мат. наук, доц., НЛТУ України, Львів

### **ОСОБЛИВОСТІ ПРОЕКТУВАННЯ ЛІСОЗАГОТІВЕЛЬНОЇ ТЕХНІКИ ДЛЯ РОБОТИ НА ТЕРИТОРІЯХ З УХИЛОМ. ЧАСТИНА 3. РОЗРАХУНОК РАМНИХ КОНСТРУКЦІЙ**

Для елементів конструкцій рам і напірного обладнання лісозаготівельної, сільськогосподарської, дорожно-будівельної техніки під час руху і роботи на територіях з ухилом властиве додаткове навантаження. Несиметричність зовнішнього силового впливу, викликана роботою технологічного обладнання та сумісною дією дотичних складових опорних реакцій рушіїв і сил ваги окремих частин механізму, викликають складний напружено-деформований стан елементів рами та стержневих елементів напірного обладнання: згин та звичайне або стиснене кручення. Опорні реакції та внутрішні силові фактори структури, що розглядається, запропоновано визначати шляхом використання варіаційного принципу механіки для статично невизначених стержневих систем, а саме узагальнення методу мінімуму потенційної енергії деформації. Сформульовано математичний вираз поставленої задачі. Підхід до розв'язування задач проілюстровано на прикладі розрахунку стрілоподібної рами.

**Ключові слова:** розрахунок рами лісозаготівельної техніки, згин та стиснене кручення, варіаційний принцип механіки.

© О. С. Мачуга, 2014

**Вступ.** Оцінювання несучої здатності та довговічності лісотransпортних засобів, а також інших типів машин, що пересуваються горбкуватою негоризонтальною ґрунтовою поверхнею під час виконання виробничої функції: сільськогосподарських (зокрема обприскувачі), дорожно-будівельних (екскаватори, грейдери) тощо, пов'язується із визначенням напружено-деформованого стану елементів конструкції рам таких машин та кріплення відповідного начіпного обладнання, розглянутого в роботах [1 – 5]. Проектуючі розрахунки таких структур базуються на використанні спеціальних методів наближених обчислень, розвинутих зокрема в працях [6, 7], що доцільно використовувати на стадії детального прорахунку напруженого стану в процесі підготовки виробництва конкретної машини, оскільки це потребує значних затрат часу та людських ресурсів. Оцінювання розподілу напружень інженерними методами розрахунку статично невизначених стержневих систем, поданими в огляді [8], ґрунтується на застосуванні методів опору матеріалів, а саме – *методі відкидання зайвих невідомих*, або *рівнянні трьох моментів*. У складних рамних конструкціях цей підхід потребує виконання великого обсягу графо-аналітичних розрахунків. В цій роботі для досягнення результату запропоновано модифікацію універсального варіаційного принципу механіки стержнєвої конструкції, пов'язану із використанням *методу мінімуму потенційної енергії деформації*, що започатковано в роботі [4], розвинуто в дослідженнях [9 – 13], та використано у формулюванні винаходу [14].

**Постановка задачі.** Розглянемо самохідний тривісний колісний харвестер, який рухається площиною з ухилом  $\alpha$  до горизонту зі швидкістю  $v$  уздовж осі, що утворює кут  $\beta$  з висхідною лінією площини руху. Виробнича функція виконується стрілою – маніпулятором з харвестерною (процесорною) головою, напрям стріли відведено від напрямку руху на кут  $\gamma$  (див. рис. 1 в роботі [15]). Вважатимемо в загальному випадку раму харвестера шарнірно зчленованою. Кожна із двох частин рами – замкнута стержнева конструкція довільної конфігурації три-, чотири- або п'ятикутної форми (рис. 1).

а б в

Рис. 1 – Варіанти конфігурацій частин рами:  
а – трикутна, б – чотирикутна, в – п'ятикутна.

Наслідуючи роботу [15] запровадимо декартову систему координат  $Oxuz$  з площиною  $xOy$ , яка співпадає з горизонтальною площиною, вісь  $z$  – перпендикулярна до неї (рис. 2 а).

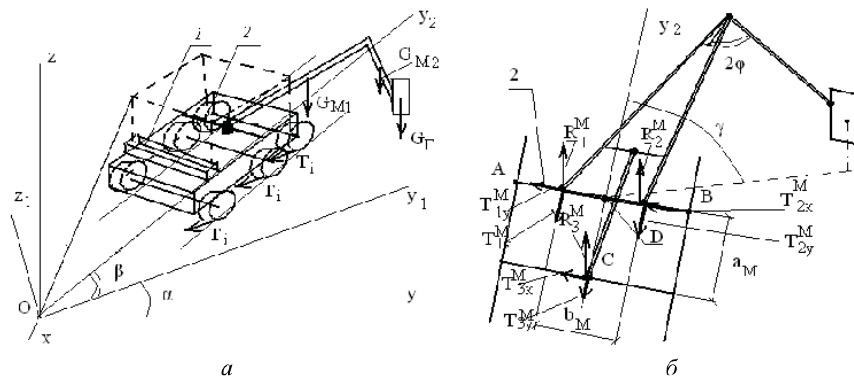


Рис. 2 – Схема руху харвестера лісосікою з розкладеним маніпулятором; 1 – поперечна балка кріплення силового агрегату, кабіни та інш., 2 – поперечна балка кріплення стріли-маніпулятора; а – загальний вигляд; б – схема кріплення маніпулятора до рами, точка С – основа гідроциліндра на допоміжній балці кріплення.

Осі координат  $Oy_1$  та  $Oz_1$  утворюються поворотом осей  $Oy$  і  $Oz$  на кут  $\alpha$  навколо осі  $Ox$  так, що координатна площина  $xOy_1$  співпадає з площиною руху харвестера, вісь  $Oz_1$  утворює кут  $\alpha$  з віссю  $Oz$ . Вісь координат  $Oy_2$  утворюються шляхом повороту осі  $Oy_1$  на кут  $\beta$  навколо осі  $Oz_1$  так, що напрям руху механізму, який розглядається, співвісний з  $Oy_2$ . Двосекційний шарнірний маніпулятор з вагою секцій  $G_{M1}, G_{M2}$  утримує харвестерну головку вагою  $G_T$ , в якій знаходиться стовбур вагою  $G_{CT}$  (на рис. 2 не зображено). Сили ваги  $G_{M1} + G_{CT}$  направлені вертикально вниз, сили  $T_i$ , ( $i = 1 \div 6$ ) – тангенційні (дотичні) складові реакцій ґрунту на рушій, діють в площині руху харвестера  $xOy_1$ . Відзначимо, що маніпулятор може виконувати обертовий рух та одночасно розкладатись або складатись навкруг прислудувального шарніра до пасі харвестера. Це відповідним чином впливає на розподіл опорних реакцій кріплення стріли з вантажем до поперечної балки 2 (рис. 2).

Задача полягає у відшуванні нормальних складових реакцій ґрунту на рушій  $R_i$ , ( $i = 1 \div 6$ ), введених у розгляд у відповідності до роботи [15] (на рис. 2 не зображено), дотичних складових  $T_i$ , ( $i = 1 \div 6$ ), що мають компоненти  $T_{iy}, T_{ik}$  в площині руху та направлені вздовж осі  $Oy_2$  та колової осі  $AB$  відповідно, нормальних та дотичних складових опорних реакцій кріплення стріли з вантажем  $R_j^M, T_j^M$ ,  $j = 1 \div 3$  (рис. 2 б) та розподілу внутрішніх силових факторів за довжиною елементів рами харвестера. Вважаючи раму стержневою конструкцією з елементами, що мають незамкнену конфігурацію поперечного перерізу (напр., швелер, тавр тощо), слід крім традиційних сило-

вих факторів – згинаючого моменту  $M$ , перерізуючої сили  $Q$ , крутного моменту  $K$  – ввести в розгляд згинно-крутні бімоменти  $B$ , які спричиняють виникнення стисненого кручення та *депलाції* поперечного перерізу профілю балки, тобто деформацій, що призводять до втрати перерізом стержня площинності. З метою спрощення постановки задачі із розгляду вилучено розтягуючі зусилля уздовж осі стержня, згинаючі моменти та перерізуючі сили в площині рами, як фактори, що неістотні для напруженого стану рами.

Сформульована вище задача є статично невизначеною, оскільки, поперше, число невідомих опорних реакцій ґрунту на рушій становить 18, а кількість рівнянь рівноваги просторової системи сил – 6. По-друге, кожна із двох частин рами є статично невизначена стільки разів, як помножена на 4 (за числом внутрішніх силових факторів) кількість поперечних балок - траверс, що з'єднують праву і ліву сторону рами. І, врешті-решт, рама в цілому є статично невизначена ще один раз – за рахунок з'єднання обох частин шарніром. Отже ступінь статичної невизначеності  $W$  становить

$$W = 4 \cdot (m + n) + 13, \quad (1)$$

де  $m, n$  – кількість поперечних балок передньої та задньої частин рами.

Визначення опорних реакцій механізму дозволить уточнювати обґрунтований в роботі [1] вибір рушіїв механізму. Побудова епюр зазначених вище внутрішніх силових факторів виявить області їх концентрації та дозволить знайти максимальні нормальні та дотичні напруження у їх околах. За необхідності, шляхом зміни характеристик рамних конструкцій в проблемних ділянках, можливо знизити рівень напружень у них до допустимих значень.

**Визначення опорних реакцій кріплення стріли.** Розглянемо плоско-паралельну систему сил, що складається із нормальних складових реакцій  $R_j^M$ ,  $j-1 \div 3$ , які є перпендикулярними до площини руху, та проєкцій на нормаль сил ваги частин маніпулятора, головки та стовбура. Для цієї системи сил запишемо рівняння рівноваги сил на спільну вісь та два рівняння рівноваги моментів сил відносно осей  $AB$  та  $CD$ , нехтуючи підймальним моментом стріли маніпулятора під час його розкладання-складання. Розв'язуючи цю систему рівнянь отримаємо наступні вирази:

$$\begin{aligned} R_1^M &= \frac{G_{MCT}}{2} \cdot \cos \alpha + M_G \cdot \left( \frac{\cos \gamma}{2 \cdot a_M} - \frac{\sin \gamma}{b_M} \right); \\ R_2^M &= \frac{G_{MCT}}{2} \cdot \cos \alpha + M_G \cdot \left( \frac{\cos \gamma}{2 \cdot a_M} + \frac{\sin \gamma}{b_M} \right); \quad R_3^M = -\frac{M_G}{a_M} \cdot \cos \gamma, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{де} \quad G_{MCT} &= G_{M1} + G_{M2} + G_T + G_{CT}, \quad M_G = \sin \varphi \cdot \cos \alpha \cdot \left[ \frac{L_{M1}}{2} \cdot G_{M1} + \right. \\ &\quad \left. + \left( L_{M1} + \frac{L_{M2}}{2} \right) \cdot G_{M2} + (L_{M1} + L_{M2}) \cdot (G_T + G_{CT}) \right]. \end{aligned}$$

Кожну із дотичних складових реакцій опор, які у загальному випадку є довільно орієнтовані в площині руху, розкладено, як вказано вище, на дві компоненти: одна є паралельна до напрямку руху механізму ( $T_{1y}^M, T_{2y}^M, T_{3y}^M$ ), інша – орієнтовна уздовж колової осі  $BA$  ( $T_{1\kappa}^M, T_{2\kappa}^M, T_{3\kappa}^M$ ), тобто перпендикулярна до напрямку руху (рис. 2). Приймаючи незначні обмеження:

$$T_{1\kappa}^M = T_{2\kappa}^M, \quad T_{1y}^M = T_{2y}^M, \quad T_{1y}^M + T_{2y}^M = T_{3y}^M,$$

отримаємо із трьох рівнянь рівноваги плоскої системи сил решту – три невідомі дотичні складові реакцій. Тоді:

$$T_{1\kappa}^M = T_{2\kappa}^M = \frac{M_G}{2a_M} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot (\cos \beta \cdot \sin \gamma - \sin \beta \cdot \cos \gamma) + \frac{M_\omega}{2 \cdot a_m} - \frac{G_{MCT}}{2} \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta, \quad (3)$$

$$T_{3\kappa}^M = -\frac{M_G}{a_M} \operatorname{tg} \alpha (\cos \beta \sin \gamma - \sin \beta \cos \gamma) - \frac{M_\omega}{a_m}, \quad T_{1y}^M = T_{2y}^M = -\frac{G_{MCT}}{4} \sin \alpha \cos \beta.$$

Для тестового прикладу роботи [16] – харвестера Valmet 911.3 побудовано графіки залежностей величин  $R_2^M, T_{2\kappa}^M$  від кута  $\gamma$  за деяких значень кутів  $\alpha, \beta$  (рис. 3) у випадку повністю розкладеної стріли ( $\varphi = 90^\circ$ ); для обчислень прийнято  $a_M = b_M = 1 \text{ м}$ . Із аналізу результатів зазначимо, що величини опорних реакцій суттєво залежать від положення маніпулятора та ухилу верхніх рухів  $\alpha$ . Запропонований підхід дозволяє визначати внутрішні силові фактори в секціях маніпулятора, що уможливорює його розрахунок, а також з достатньою для розрахунку рами харвестера точністю визначати зовнішні силові фактори, що діють на неї.

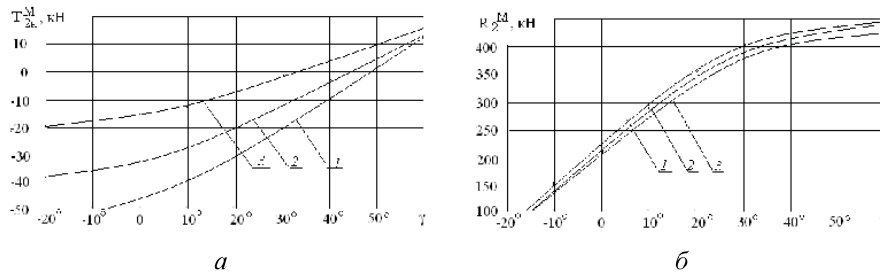


Рис. 3 – Залежності дотичних (а) та нормальних (б) реакцій кріплення стріли маніпулятора для  $\beta = 60^\circ$ ; 1 –  $\alpha = 10^\circ$ , 2 –  $\alpha = 15^\circ$ ; 3 –  $\alpha = 20^\circ$ .

**Метод розрахунку статично невизначеної рами.** Ступінь  $W$  (див. формулу (1)) статичної невизначеності шарнірно зчленованої рами харвестера чи будь-якого іншого механізму, що рухається пересіченою місцевістю, потребує введення в розгляд еквівалентної кількості додаткових рівнянь сумісності роботи окремих елементів рамної конструкції. Загально прийнятний підхід – віртуальне розрізання балок в характерних місцях (напр., посередині поперечної балки або під невідомою реакцією опори), введення в розгляд в

обох частинах розрізаної балки таких невідомих внутрішніх силових факторів, які викликають разом із відомими зовнішніми зусиллями однакові деформації обох частин розрізу.

В роботі узагальнюється модифікація універсального варіаційного принципу механіки, пов'язана із використанням методу мінімуму потенційної енергії деформації стержневої конструкції [17] з урахуванням ефекту стисненого кручення. Запроваджується спеціальним чином побудований функціонал  $J$ , екстремум якого визначає всі невідомі внутрішні силові фактори та опорні реакції; для рамних конструкцій цей функціонал еквівалентний потенційній енергії деформації  $U$ . Внаслідок адитивності потенційної енергії, такий підхід дозволяє визначати вплив на напружено-деформований стан рами окремих видів деформування – згину, кручення, стисненого кручення тощо. Математичний вираз потенційної енергії деформації будується таким чином, щоби враховувати лише найвагоміші види деформування конструкції. Шляхом уточнення виразу потенційної енергії можливе відповідне коригування розрахунку, зокрема за рахунок депланації поперечних перерізів стержня в місцях його закріплення.

У відповідності до постановки задачі припустимо, що енергією розтягустиску стержнів уздовж їх осі та згинання стержнів в площині рами можна знехтувати. Тому компоненти  $T_{jy}^M$ ,  $j = 1 \div 3$  дотичних складових опорних реакцій кріплення стріли, орієнтовані вздовж напрямку руху та компоненти  $T_{iy}$ ,  $i = 1 \div 6$  дотичних складових реакцій ґрунту на рушій, для визначення енергетичного балансу тут не використовуються.

Потенційна енергія деформації стержневої конструкції рами за умови вільного  $U_{вільн}$  та стисненого  $U_{см}$  скручування елементів має вигляд відповідно:

$$U_{вільн} = \sum_k U_k^M + \sum_k U_k^K, U_{см} = \sum_k U_k^M + \sum_k U_k^B, \quad (4)$$

де  $U_k^M, U_k^K, U_k^B$  – потенційна енергія відповідно згинання, вільного та стисненого скручування, яка накопичується в  $k$ -му елементі рамної конструкції.

Таким елементом вважатимемо будь-яку й прямолінійну без розгалуження ділянку, на якій відсутня точкова сила (розподілене зусилля допускається), та яка має незмінну жорсткість. Для кожного із елементів:

$$U_k^M = \frac{1}{EI_k} \int_0^{a_k} M_k^2(x) dx; U_k^K = \frac{1}{GI_{Kk}} \int_0^{a_k} K_k^2(x) dx; \\ U_k^B = \frac{1}{EI_{\omega k}} \int_0^{a_k} B_k^2(x) dx, \quad (5)$$

де  $M_k(x), K_k(x)$  – розподіл згинаючих та крутних моментів за довжиною  $k$ -го елемента рами;  $B_k(x)$  – те ж саме для згинно-крутного бімоменту;  $x$  – біжуча координата  $k$ -го елемента рами, довжина якого  $a_k$ ;  $EI_k, GI_{Kk}, EI_{\omega k}$  – відповідно згинна, крутильна та секторіальна жорсткості  $k$ -го елемента рами.

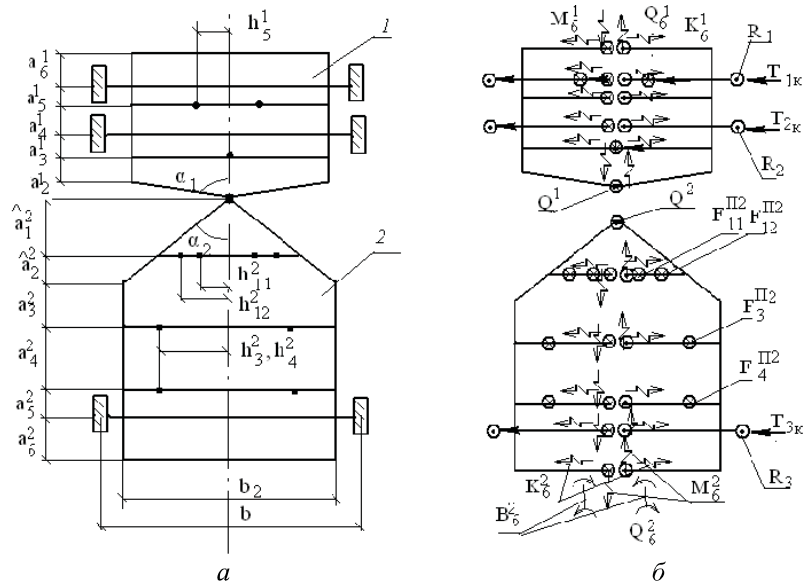


Рис. 4 – Схема двосекційної шарнірно зчленованої рами харвестера: *a* – загальний вигляд з точками прикладання зовнішніх сил; *1* – передня секція з основою маніпулятора, *2* – задня секція з кабіною та силовим обладнанням; *б* – схема розкриття статичної невизначеності.

Будування виразу потенційної енергії розглянемо на узагальненому прикладі шарнірно зчленованої рами харвестера, яка складається із двох п'ятикутних піврам (рис. 4). Тут  $i$  в подальшому викладі верхній індекс «1» у величинах, наведених на рисунку, вказує на приналежність до передньої частини рами, а верхній індекс «2» – задньої. Верхній індекс «П» вказує на те, що відповідні силові фактори відносяться до правої за напрямом руху частини рами, а використовуваний в подальших формулах індекс «Л» (на рис. 4 не показано) – до лівої частини. Величини  $a_i^j$ ,  $j = 1, 2$ ;  $i = 1 \div N$  – довжини окремих елементів рами,  $N$  – кількість елементів;  $\alpha_1, \alpha_2$  – кути розкриття стрілоподібної частини передньої та задньої частин рами;  $\hat{a}_i^j = a_i^j \cdot \cos \alpha_j$ ;  $h_{im}^j$  – відстані від осі рами до точки прикладання зовнішнього силового фактора,  $m = 0; 1; 2; \dots$  – порядковий номер силового фактора, рахуючи від осі рами, якщо на одній перемичці таких факторів декілька.

З метою розкриття статичної невизначеності рами, віртуально розріжемо кожну із перемичок по осі рами та замінимо взаємну дію в місці розрізу правої частини рами на ліву, а лівої – на праву, невідомими внутрішніми силовими факторами, які по обидві сторони розрізу мають протилежний напрям. В позначеннях з рис. 4  $b$ :  $M_i^j$  – згинальний момент в розрізі перемички, яка з'єднує ліву та праву частини рами в точці, де закінчується  $i$ -й еле-

мент рами;  $Q_i^j$  – перерізуюча сила;  $K_i^j$  – крутний момент та  $B_i^j$  – бімомент у цьому ж розрізі. На рис. 4 позначено лише деякі з цих внутрішніх силових факторів для уникнення нагромадження надписів. Дію сил, направлених перпендикулярно до площини рисунку, позначено наступним чином: колом з точкою – для сил, skierованих знизу вверху, та колом з перехрещеними лініями – для сил, зорієнтованих вертикально вниз. Дію рушійів харвестера на раму замінено відповідними невідомими реакціями  $T_{ik}$ ,  $R_i$ . Сили ваги двигуна, силових механізмів та кабіни  $F_{im}^{Ij}$  та  $F_{im}^{Jj}$  прикладені у місцях їх кріплення до рами (рис. 4 б). Зазначимо, що схема дії зовнішніх зусиль коригується для кожного конкретного механізму. Передня і задня частини рами роз'єднані між собою, їх взаємодію замінено перерізуючими силами  $Q_1$ ,  $Q_2$ ; оскільки рама шарнірно зчленована, крутний та згинальний моменти та бімомент через точку з'єднання не передаються. Віртуальне розрізування поперечних балок в точках, де дія зовнішніх силових факторів відсутня, не викликає ускладнень. В точках де прикладені зовнішні зусилля (напр., кріплення основи гідроциліндра маніпулятора до допоміжної опори), слід змістити переріз на невелику відстань так, щоб враховувати це зусилля лише в лівій або лише в правій частині рами.

Наслідуючи роботу [4] запишемо вирази потенційної енергії деформації згину елементів правої задньої частини поперечних балок:

$$\begin{aligned}
 U_i^{I2M} &= \frac{1}{EI_i^{I2}} \int_0^{b_2/2} (M_i^2 + Q_i^2 x)^2 dx; \\
 U_j^{I2M} &= \frac{1}{EI_j^{I2}} \int_0^{h_j^2} (M_j^2 + Q_j^2 x)^2 dx + \frac{1}{EI_j^{I2}} \int_0^{b_2/2 - h_j^2} (M_j^2 + Q_j^2 (h_j^2 + x) - F_j^{I2} x)^2 dx; \\
 U_1^{I2M} &= \frac{1}{EI_1^{I2}} \int_0^{h_{11}^2} (M_1^2 + Q_1^2 x)^2 dx + \frac{1}{EI_1^{I2}} \int_0^{h_{12}^2 - h_{11}^2} (M_1^2 + Q_1^2 (h_{11}^2 + x) - F_{11}^{I2} x)^2 dx + \\
 &+ \frac{1}{EI_1^{I2}} \int_0^{a_1^2 \sin \alpha_2 - h_{12}^2} (M_1^2 + Q_1^2 (h_{22}^2 + x) - F_{11}^{I2} (h_{11}^2 + x) - F_{12}^{I2} x)^2 dx, \\
 & i = 5, 6; j = 3, 4,
 \end{aligned} \tag{6}$$

а також деформації кручення:

$$U_i^{I2K} = \frac{1}{GI_{Ki}^{I2}} \int_0^{b_2/2} (K_i^2)^2 dx, \quad i = 3 \div 6, \quad U_1^{I2K} = \frac{1}{GI_{K1}^{I2}} \int_0^{a_1^2 \sin \alpha_2} (K_1^2)^2 dx \tag{7}$$

та деформації стисненого кручення:

$$U_i^{I2B} = \frac{1}{EI_{oi}^{I2}} \int_0^{b_2/2} \left( \frac{K_i^2 \cdot b_2/2 \cdot \operatorname{sh} [k_i^{I2} (b_2/2 - x)]}{k_i^{I2} \operatorname{ch} (k_i^{I2} \cdot b_2/2)} \right)^2 dx, \quad k_i^{I2} = \sqrt{GI_{Ki}^{I2} / EI_{oi}^{I2}}; \tag{8}$$



$$U_1^{II2B} = \frac{1}{EI_{\omega 1}^{II2}} \int_0^{a_1 \cdot \sin \alpha_2} \left( \frac{K_1^2 \cdot a_1^2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \operatorname{sh} \left[ k_1^{II2} (a_1 \cdot \sin \alpha_2 - x) \right]}{k_1^{II2} \operatorname{ch} (k_1^{II2} \cdot \sin \alpha_2)} \right)^2 dx, i = 3 \div 6.$$

Вираз (8) записано в припущенні жорсткого защемлення консольних балок-поперечок в місцях їх кріплення до бокових лонжеронів, вважається також, що посередині прольоту кручення є вільним, розподіл бімоментів  $B_i^{II2}(x)$  для такої балки узято із Додатку 2, поз. 5 на ст. 222 роботи [4]. Вирази енергії для лівої задньої частини балки є подібними з точністю до напрямку прикладання силових факторів, що впливає на знак «+» чи «-» перед силовим фактором. У передній частині балки вирази енергії записуються аналогічним чином; з метою економії місця тут вони опущені.

Для будування виразів потенційної енергії деформації елементів поздовжніх балок-лонжеронів зауважимо, що крутний момент поперечних балок викликає згин в лонжеронах, а згинальний – кручення. На кожному із елементів лонжеронів крутний момент є постійним, а згинальний змінюється за лінійним законом. В точках лонжеронів, у яких змінюється їх нахил до осі рами, крутний момент одного елемента частково переходить у згинальний момент іншого та навпаки. Враховуючи це, запишемо для задньої частини рами наступні відношення, приймаючи порядкову нумерацію елементів починаючи від шарнірного з'єднання з передньою частиною рами. Крутні моменти:

$$\begin{aligned} K_6^{II2} &= -M_6^2 - Q_6^2 \frac{b_2}{2}; K_5^{II2} = -M_6^2 - M_5^2 - (Q_6^2 + Q_5^2) \frac{b_2}{2} + R_3 \frac{b-b_2}{2} - T_{3к} (r_3 + \delta_3); \\ K_4^{II2} &= -M_6^2 - M_5^2 - M_4^2 - (Q_6^2 + Q_5^2 + Q_4^2) \frac{b_2}{2} + R_3 \frac{b-b_2}{2} - T_{3к} (r_3 + \delta_3) + \\ &+ F_4^{II2} \left( \frac{b_2}{2} - h_4^2 \right); K_3^{II2} = -M_6^2 - M_5^2 - M_4^2 - M_3^2 - (Q_6^2 + Q_5^2 + Q_4^2 + Q_3^2) \frac{b_2}{2} + \\ &+ R_3 \frac{b-b_2}{2} - T_{3к} (r_3 + \delta_3) + (F_4^{II2} + F_4^{II2}) \left( \frac{b_2}{2} - h_4^2 \right); K_2^{II2} = K_3^{II2} \cdot \cos \alpha_2 + \\ &+ \left( \sum_{i=3}^6 K_i^2 + Q_6^2 \sum_{i=3}^6 a_i^2 + (Q_5^2 + R_3) \sum_{i=3}^5 a_i^2 + (Q_4^2 - F_4^{II2}) \sum_{i=3}^4 a_i^2 + (Q_3^2 - F_3^{II2}) a_3^2 \right) \sin \alpha_2; \\ K_1^{II2} &= K_2^{II2} + F_{11}^{II2} (a_1^2 \sin \alpha_2 - h_{11}^2) \cos \alpha_2 + F_{12}^{II2} (a_1^2 \sin \alpha_2 - h_{12}^2) \cos \alpha_2, \quad (9) \end{aligned}$$

де  $r_3, \delta_3$  – радіус відповідного рушія та висота площини рами над коловою віссю. Вирази потенційної енергії деформації згину:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_6^{II2M} &= \int_0^{a_6^2} (K_6^2 + Q_6^2 x)^2 dx; \tilde{U}_5^{II2M} = \int_0^{a_5^2} (K_6^2 + K_5^2 + Q_6^2 (a_6^2 + x) + Q_5^2 x + R_3 x)^2 dx; \\ \tilde{U}_4^{II2M} &= \int_0^{a_4^2} \left( \sum_{i=4}^6 K_i^2 + Q_6^2 (a_6^2 + a_5^2 + x) + (Q_5^2 + R_3) (a_5^2 + x) + (Q_4^2 - F_4^{II2}) x \right)^2 dx; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_3^{II2M} &= \int_0^{a_3^2} \left( \sum_{i=3}^6 K_i^2 + Q_6^2 \left( \sum_{i=4}^6 a_i^2 + x \right) + (Q_5^2 + R_3)(a_5^2 + a_4^2 + x) + \right. \\
&\quad \left. + (Q_4^2 - F_4^{II2})(a_4^2 + x) + (Q_3^2 - F_3^{II2})x \right)^2 dx; \\
\tilde{U}_2^{II2M} &= \int_0^{a_2^2 \cdot \cos \alpha_2} \left( \sum_{i=3}^6 K_i^2 + Q_6^2 \left( \sum_{i=3}^6 a_i^2 + x \right) + (Q_5^2 + R_3) \left( \sum_{i=3}^5 a_i^2 + x \right) + \right. \\
&\quad \left. + (Q_4^2 - F_4^{II2})(a_4^2 + a_3^2 + x) + (Q_3^2 - F_3^{II2})(a_3^2 + x) \right)^2 \cdot \cos^2 \alpha_2 dx; \\
\tilde{U}_1^{II2M} &= \\
&= \int_0^{a_1^2 \cdot \cos \alpha_2} \left( \sum_{i=1;3}^6 K_i^2 + Q_6^2 \left( \sum_{i=3}^6 a_i^2 + a_2^2 \cdot \cos \alpha_2 + x \right) + (Q_5^2 + R_3) \times \right. \\
&\quad \times \left( \sum_{i=3}^5 a_i^2 + a_2^2 \cdot \cos \alpha_2 + x \right) + (Q_4^2 - F_4^{II2}) \times \\
&\quad \times (a_4^2 + a_3^2 + a_2^2 \cdot \cos \alpha_2 + x) + (Q_3^2 - F_3^{II2}) \times \\
&\quad \left. \times (a_3^2 + a_2^2 \cdot \cos \alpha_2 + x) + (Q_1^2 - F_{11}^{II2} - F_{12}^{II2})x \right)^2 \cdot \cos^2 \alpha_2 dx. \quad (10)
\end{aligned}$$

Вирази потенційної енергії кручення мають простіший вигляд:

$$\tilde{U}_i^{II2K} = (K_i^{II2})^2 a_i^2, \quad i = 1 \div 6. \quad (11)$$

де  $K_i^{II2}$  – наведені у (9).

Для будування виразу потенційної енергії деформації короблення вважатимемо, що передачею бімоментів від поперечних балок до лонжерона можна знехтувати. Тоді лонжерон можна розглядати як одну консольну балку, жорстко защемлену в точці зламу осьової лінії. Починаючи від цієї точки аж до з'єднання лівої та правої поздовжніх балок лонжерон розглядатимемо як ще одну консоль, навантажену крутними моментами  $K_2^{II2}$ ,  $K_1^{II2}$ . Бімоменти в такому лонжероні викликаються окремими крутними моментами, прикладеними в точках приєднання поперечних балок, сумарний розподіл біоменту вздовж двох виділених ділянок лонжерона є сумою розподілів біоментів від дії окремих крутних моментів. Тоді, за використанням Додатка 2, поз. 5 ст. 222 роботи [4], потенційна енергія деформації короблення задньої правої поздовжньої частини  $\tilde{U}^{II2B}$  становитиме

$$\tilde{U}^{II2B} = \sum_{j=3}^6 \int_0^{\sum_{i=3}^j a_i^2} \left[ K_j^{II2} \cdot \sum_{i=3}^j a_i^2 \cdot \frac{\operatorname{sh} \left( k_j^{II2} \left( \sum_{i=3}^j a_i^2 - x \right) \right)}{k_j^{II2} \operatorname{ch} \left( k_j^{II2} \cdot \sum_{i=3}^j a_i^2 \right)} \right]^2 dx +$$

$$+ \sum_{j=1}^2 \int_0^{\sum_{i=1}^j a_i^2} \left[ K_j^{II2} \cdot \sum_{i=1}^j a_i^2 \cdot \frac{\operatorname{sh} \left( k_j^{II2} \left( \sum_{i=1}^j a_i^2 - x \right) \right)}{k_j^{II2} \operatorname{ch} \left( k_j^{II2} \cdot \sum_{i=1}^j a_i^2 \right)} \right]^2 dx. \quad (12)$$

Підсумовуючи вищевикладене зазначаємо, що вираз потенційної енергії деформації рами, за умови вільного кручення її елементів, із врахуванням формул (4), (6), (7), (10), (11) має вигляд:

$$U_{\text{вільн}} = \sum_{i=1;3;4;5;6} \left( U_i^{II2M} + U_i^{II2K} \right) + \sum_{i=1}^6 \left( \tilde{U}_i^{II2M} + \tilde{U}_i^{II2K} \right) + \sum_{i=1;3;4;5;6} \left( U_i^{II2M} + U_i^{II2K} \right) + \sum_{i=1}^6 \left( \tilde{U}_i^{II2M} + \tilde{U}_i^{II2K} \right). \quad (13)$$

Щодо потенційної енергії деформації рами за умови стисненого кручення її елементів, із врахуванням (4), (6), (8), (10), (12) запишемо:

$$U_{\text{см}} = \sum_{i=1;3;4;5;6} \left( U_i^{II2M} + U_i^{II2B} \right) + \sum_{i=1}^6 \left( \tilde{U}_i^{II2M} + \tilde{U}_i^{II2B} \right) + \sum_{i=1;3;4;5;6} \left( U_i^{II2M} + U_i^{II2B} \right) + \sum_{i=1}^6 \left( \tilde{U}_i^{II2M} + \tilde{U}_i^{II2B} \right). \quad (14)$$

Розкриття статичної невизначеності та розрахунок рамної конструкції зводиться до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які отримуються шляхом обчислення інтегралів у виразах (13) або (14) та визначення екстремумів отриманих таким чином функцій

$$U_{\text{вільн}} \left( R_i, T_{ik}, M_j^1, M_j^2, Q_j^1, Q_j^2, K_j^1, K_j^2 \right) \text{ або } U_{\text{см}} \left( R_i, T_{ik}, M_j^1, M_j^2, Q_j^1, Q_j^2, K_j^1, K_j^2 \right), \quad (i = 1 \div 6; j = 1 \div 5)$$

шляхом прирівнювання до нуля часткових похідних цих функцій по всіх невідомих аргументах. Таким чином можна отримати таку кількість алгебраїчних рівнянь, скільки є невідомих аргументів. У випадку, що розглядається, їх кількість – 42. Для замкнення цієї системи рівнянь запишемо (рис. 4 б):

$$Q_1 = Q_2.$$

Отримана система рівнянь може бути розширена на стержневі рамні конструкції довільної конфігурації, які експлуатуються в складних, зокрема гірських умовах.

**Приклад розрахунку рами.** Розглянемо трикутну раму із двома поперечними балками-траверсами, завантаженою зовнішніми зусиллями  $F_i^{II}$ ,  $F_i^{II}$ ,  $i = 1 \div 3$  та підтримувану в рівновазі трьома нормальними  $R_0, R_1, R_2$  та дотичними  $T_0, T_1, T_2$  (рис. 5) реакціями опорної поверхні. Для розв'язування цієї задачі знехтуємо потенційною енергією згину та порівняємо результати об-

числень, отриманих у випадку вільного кручення, з результатами для стисненого кручення. Розрахункова схема, що розглядається, є типовою для *причепних оприскувачів типу ОПВ 1600*. Геометричні розміри та позначення, наведені на рис. 5 а, певним чином відрізняються від тих, що наведено на рис. 4.

Умови мінімуму потенційної енергії деформації для нашого прикладу мають наступний вигляд для випадку енергії вільного кручення:

$$\frac{\partial U_{\text{вільн}}}{\partial M_i} = 0; \quad \frac{\partial U_{\text{вільн}}}{\partial Q_i} = 0; \quad \frac{\partial U_{\text{вільн}}}{\partial K_i} = 0;$$

$$U_{\text{вільн}} = \sum_{j=1}^2 (U_j^{\text{ПК}} + U_j^{\text{ЛК}}) + \sum_{j=1}^3 (\tilde{U}_j^{\text{ПК}} + \tilde{U}_j^{\text{ЛК}})$$

та відповідний вигляд для випадку стисненого кручення:

$$\frac{\partial U_{\text{ст}}}{\partial M_i} = 0; \quad \frac{\partial U_{\text{ст}}}{\partial Q_i} = 0; \quad \frac{\partial U_{\text{ст}}}{\partial K_i} = 0;$$

$$U_{\text{ст}} = \sum_{j=1}^2 (U_j^{\text{ПВ}} + U_j^{\text{ЛВ}}) + \sum_{j=1}^3 (\tilde{U}_j^{\text{ПВ}} + \tilde{U}_j^{\text{ЛВ}}). \quad (15)$$

Таблиця 1 – Значення внутрішніх силових факторів в розрізах траверсних балок.

Потенційна енергія	$M_1, \text{Н} \cdot \text{м}$	$M_2, \text{Н} \cdot \text{м}$	$K_1, \text{Н} \cdot \text{м}$	$K_2, \text{Н} \cdot \text{м}$	$Q_1, \text{Н}$	$Q_2, \text{Н}$
$U_{\text{вільн}}$	2 790	1 033	0	0	- 315	173
$U_{\text{ст}}$	2 980	912	0	0	- 315	173

У співвідношеннях (15) потенційна енергія вільного кручення елементів має вигляд (7), (11), а стисненого – (8), (12). Оскільки трикутна рама, що розглядається, складається з однієї частини, то у виразах енергій формули (15) верхній індекс «2» відсутній. Формули (15) за використання запропонованого методу дають для кожного із видів енергії по 6 алгебраїчних рівнянь, розв'язки яких розкривають статичну невизначеність рами, а саме: обчислюються внутрішні силові фактори  $M_i, Q_i, K_i, i = 1, 2$ , будуються епюри розподілу крутних та згинальних моментів, перерізаючих сил, визначається напружено-деформований стан конструктивних елементів рами. В даному випадку величини опорних реакцій  $R_0, R_1, R_2$  визначено із рівнянь рівноваги рами в цілому. Розв'язки систем рівнянь (15) наведено в табл. 1 для експериментально визначених значень силових факторів та геометричних розмірів, у яких враховано несиметричність навантаження елементів рами внаслідок руху території з ухилом та дію начіпних знарядь:

$$F_1^{\text{II}} = 15\,000 \text{ Н}, \quad F_1^{\text{I}} = 17\,000 \text{ Н}, \quad F_2^{\text{II}} = 11\,000 \text{ Н}, \quad F_2^{\text{I}} = 13\,000 \text{ Н}, \\ F_3^{\text{II}} = 2\,700 \text{ Н}, \quad F_3^{\text{I}} = 3\,200 \text{ Н}, \quad h_2 = 0,35 \text{ м}, \quad h_3 = 0,15 \text{ м}, \quad h_4 = 0,10 \text{ м} \\ a_1 = 1,384 \text{ м}, \quad a_2 = 0,795 \text{ м}, \quad \alpha = 11^\circ.$$

На рис. 5 б – д подано епюри згинаючих та крутних моментів у елементах рами, визначені за допомогою різних підходів до визначення енергії кручення. Величини бімоментів в точках А, В, С рами (рис. 5 а) набувають наступних значень:  $B_A = 45 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$ ,  $B_B = 1,47 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$ ,  $B_C = 0$ .

Із аналізу результатів розрахунку відзначимо, що уточнення виразу потенційної енергії кручення за рахунок депланції поперечних перерізів призводить до збільшення згинальних моментів в окремих точках до 8%, що необхідно враховувати в проектуючих розрахунках рамних конструкцій. Значення крутних моментів можуть за таких обставин суттєво збільшуватись.

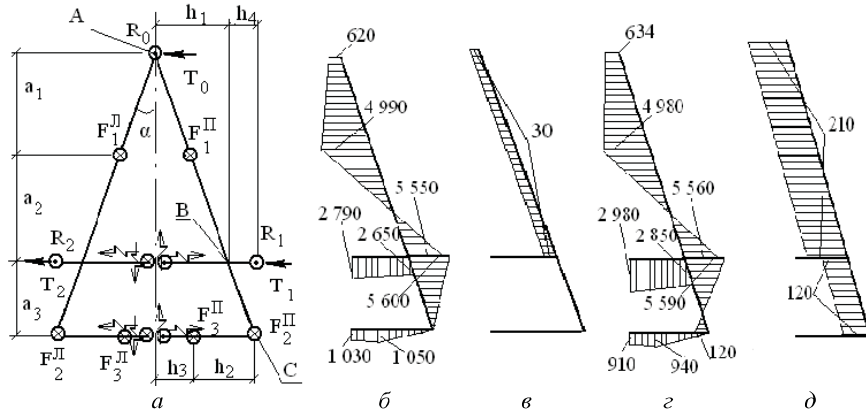


Рис. 5 – Розрахункова схема трикутної рами із додатковою траверсою: *a* – загальний вигляд, *б* – епюри згинаючих та *в* – крутних моментів, отриманих за допомогою виразу енергії вільного кручення  $U_{вільн}$ ; *г* – епюри згинаючих та *д* – крутних моментів, отриманих за допомогою виразу енергії стисненого кручення  $U_{ст}$ .

Величини моментів вказані в Н·м.

**Розрахунок рам із врахуванням депланції в поперечних балках.** Запропоновані вище розрахункові схеми (рис. 4, 5 *a*) передбачають дію зовнішнього навантаження – сил  $F_i^{II}$ ,  $F_i^{II2}$  тощо – в центрі згину балки. За такого навантаження згадані силові фактори не викликають локального кручення балок, Однак в реальних умовах точка прикладання сили не співпадає із центром згину, у випадку руху механізму територією з ухилом усі сили ваги діють під кутом до площини руху, а отже вони викликають додаткові крутні моменти в елементах рами, зокрема в траверсах. Для визначення впливу позацентрального прикладання зовнішніх сил на розподіл внутрішніх силових факторів розглянемо для схеми на рис. 5 *a* випадок прикладення сили  $F_3^{II}$  на відстані  $\delta^{II}$  від осі згину, а сили  $F_3^{II}$  – на відстані  $\delta^{II}$ . Тоді у віртуальному розрізі відповідної траверси бімомент буде відмінним від нуля:  $B_2 \neq 0$ . Вираз додаткової потенційної енергії правої траверси  $U_{2\partial\partial\partial}^{II}$ , зумовленої цим бімоментом, набуде вигляду:

$$U_{2\partial\partial\partial}^{II} = \frac{\int_{h_3}^{h_2+h_3} \left\{ F_3^{II} \delta^{II} [shk_5(h-x) - shk_5 h_2 ch k_5 x] + B_2 k_5 ch k_5 x + K_2 shk_5(h-x) \right\}^2 dx}{EI_{\omega 5} [k_5 ch k_5 h]^2} +$$

$$+ \frac{\int_0^{h_3} \left\{ -F_3^{\text{II}} \delta^{\text{II}} (chk_5 h_2 - 1) shk_5 (h-x) + B_2 k_5 chk_5 x + K_2 shk_5 (h-x) \right\}^2 dx}{EI_{\omega 5} [k_5 chk_5 h]^2}, h = h_2 + h_3.$$

Для лівої траверси вираз енергії має аналогічний вигляд. Використовуючи ще одне рівняння мінімуму потенційної енергії деформації –

$$\frac{\partial}{\partial B_2} (U_{2\partial\partial\partial}^{\text{II}} + U_{2\partial\partial\partial}^{\text{IB}}) = 0,$$

отримуємо формулу для визначення бімоменту  $B_2$  :

$$B_2 = \frac{F_2^{\text{II}} \delta^{\text{II}} - F_2^{\text{IB}} \delta^{\text{IB}}}{2} \cdot \frac{\int_0^{h_3} sh^2 k_5 (h-x) dx - \int_{h_2}^{h_2+h_3} [shk_5 (h-x) - shk_5 h_2 \cdot chk_5 x]^2 dx}{\int_0^{h_2+h_3} ch^2 k_5 x dx}. \quad (16)$$

Отриманий результат є важливим для визначення нормальних напружень в тонкостінних елементах рам з огляду на їх тріщиностійкість у залежності від асиметричності зовнішніх навантажень, викликані специфічними умовами експлуатації.

**Побудова числового методу.** Для випадку складних конструкцій рам розв'язування системи рівнянь (13), (14), (15) є достатньо громіздкою задачею, яка потребує виконання значної кількості рутинних операцій. З метою алгоритмізації процедури пропонується підхід із використанням чисельного методу, пов'язаного із розчленуванням рами на окремі елементи, визначенням потенційної енергії як суми потенційних енергій елементів та відшукуванням таких значень внутрішніх силових факторів, які надають потенційній енергії мінімального значення. Додатковою умовою задачі є забезпечення спряження окремих елементів під час їх деформування.

Застосування чисельного методу проілюструємо на прикладі простої трикутної рами (рис. 6 а). Зовнішні сили  $P_2, P_4, P_5, P_7$  направлені вертикально вниз, реакції опор  $P_1, P_3, P_6$  направлені вертикально вгору; в даному прикладі вони визначаються рівняннями рівноваги паралельної системи сил. Розчленуємо віртуально раму так, як вказано на рис. 6, та розглянемо окремо  $i$ -й елемент. Для забезпечення рівноваги прикладемо до нього згинальні  $M_i, M_i'$  та крутні  $K_i, K_i'$  моменти, перерізуючі сили  $Q_i, Q_i'$ , зовнішні зусилля  $P_i$ , напрям яких визначається знаками «+» або «-», та бімоменти  $B_i, B_i'$ .

Потенційна енергія деформації  $i$ -го елемента рами в даному випадку має вигляд:

$$2U_i = \int_0^{a_i} \left( \frac{K_i^2(x)}{G_i I_{ik}} + \frac{M_i^2(x)}{E_i I_i} + \frac{Q_i^2(x)}{G_i F_i} + \frac{B_i^2(x)}{E_i I_{i\omega}} \right) dx, \quad (17)$$

де  $K_i(x)$ ,  $M_i(x)$ ,  $Q_i(x)$ ,  $B_i(x)$  – розподіл відповідних характеристик за довжиною відповідного елемента;  $F_i$  – площа поперечного перерізу  $i$ -го елемента, інші позначення співпадають із прийнятими раніше.

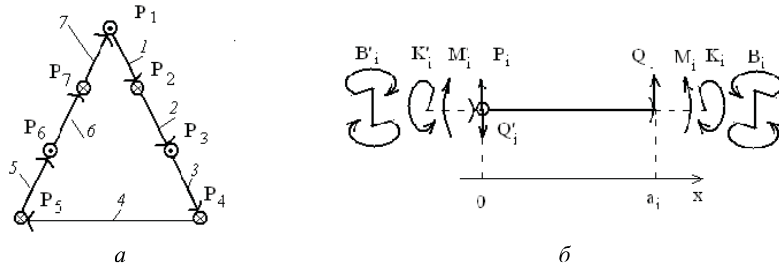


Рис. 6 – Схеми для будовання числового методу розрахунку рами: а – розчленування трикутної рами; б – прикладення зусиль до  $i$ -го елемента рами.

З умов рівноваги  $i$ -го елемента випливає:

$$Q_i = \frac{M_i - M'_i}{a_i}, \quad Q'_i = \frac{M_i - M'_i}{a_i} + P_i, \quad K_i = K'_i, \quad (18)$$

звідки легко отримати розподіл згинно-крутних факторів уздовж поточного елемента. Для визначення залежності  $B_i(x)$  слід використати рівняння пружної лінії кутів закручення [18]:

$$\theta_i^{IV} - k_i^2 \theta_i^{II} = 0, \quad B_i = -E_i I_{i\omega} \theta_i^{II}, \quad K_i = G_i I_{ik} \theta_i^I, \quad (19)$$

де  $\theta_i$  – кут закручування; римські цифри у верхньому індексі вказують на ступінь похідної по координаті  $x$ . Застосовуючи розв'язок рівнянь (19) та співвідношення (18) у формулі (17), отримуємо:

$$2U_i = \frac{K_i^2 a_i}{G_i I_{ik}} + (M_i^2 + M_i'^2) \left( \frac{a_i}{3E_i I_i} + \frac{1}{a_i G_i F_i} \right) + M_i M'_i \left( \frac{a_i}{3E_i I_i} - \frac{2}{a_i G_i F_i} \right) + \frac{1}{E_i I_{i\omega}} \int_0^{a_i} \left[ -G_i I_{ik} (c_{1i} \cdot \operatorname{ch} k_i x + c_{2i} \cdot \operatorname{sh} k_i x) \right]^2 dx, \quad (20)$$

де  $c_{1i}$ ,  $c_{2i}$  – постійні інтегрування, які визначаються з умов закручування елемента рами на його кінцях:  $\theta_i(0) = \varphi'_i$ ;  $\theta_i(a_i) = \varphi_i$ ;  $\theta_i^I(0) = \theta_i^I(a_i) = K_i / G_i I_{ik}$ ;  $\varphi'_i$ ,  $\varphi_i$  – кути закручування елемента на його лівому та правому кінцях відповідно. Загальний вигляд постійних  $c_{1i}$ ,  $c_{2i}$  тут випущено з огляду на їх громіздкість.

Визначення невідомих внутрішніх силових факторів у вузлових точках потребує задовільнення умов спряження сусідніх елементів рами, кількість яких визначається ступенем статичної невизначеності та кількістю невідомих силових та геометричних факторів:

$$f_{ik} = 0, \quad i = 1 \div 5, \quad k = 1 \div 6. \quad (21)$$

Умови  $f_{1k} = 0$ ,  $f_{2k} = 0$ ,  $f_{3k} = 0$ ,  $k = 1 \div 6$  – це традиційні умови рівноваги сил у вузлових точках,  $f_{4k} = 0$  – умова рівноваги бімоментів у відповідному вузлі,  $f_{5k} = 0$  – умова неперервності кута закручування. Умови (21) враховують фактичну передачу силових факторів та деформацій у всіх вузлах рами, в тому числі у вузлах, де окремі елементи з'єднуються під кутом.

Визначимо функцію  $L = L(M_i, M'_i, K_i, \varphi_i, \varphi'_i)$  наступним чином:

$$L = \sum_{i=1}^7 U_i + \sum_{k=1}^6 \sum_{i=1}^5 \lambda_{ik} f_{ik},$$

де  $\lambda_{ik}$  – невизначені множники Лагранжа. Умови екстремуму функції багатьох змінних:

$$\frac{\partial L}{\partial M_i} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial M'_i} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial K_i} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi'_i} = 0$$

разом із умовами спряження (21) складають замкнуту систему алгебраїчних рівнянь, розв'язок якої визначає величини внутрішніх силових факторів та геометричних параметрів у вузлах рами.

Для ілюстраційного прикладу (рис. 6) отримано результати розрахунку за наступних значень геометричних розмірів і силового навантаження:

$$a_1 = 0,5 \text{ м}, \quad a_2 = 0,8 \text{ м}, \quad a_3 = 0,9 \text{ м}, \quad \alpha = 11^\circ, \quad P_2 = 15\,000 \text{ Н}, \quad P_4 = 11\,000 \text{ Н}, \\ P_5 = 13\,000 \text{ Н}, \quad P_7 = 17\,000 \text{ Н} \text{ та перерізу всіх елементів – швелеру № 10.}$$

Результати розрахунку подано в табл. 2. З метою визначення впливу депланації поперечних перерізів елементів рами на її напружений стан в цій же таблиці наведено результати розрахунку внутрішніх силових факторів такої ж рами без врахування згинно-крутних бімоментів згідно методики [7].

Таблиця 2 – Значення згинаючих та крутних моментів для тестової рами (рис. 6 а).

№	Згинний момент	Із врахуванням депланації	Без врахування депланації	№	Крутний момент	Із врахуванням депланації	Без врахування депланації
1	$M'_1$	-198	-198	8	$K_1$	87	84
2	$M'_2$	9 150	7 912	9	$K_2$	87	84
3	$M'_3$	-132 100	-99 110	10	$K_3$	87	84
4	$M'_4$	-58	-75	11	$K_4$	-67	-75
5	$M'_5$	80	70	12	$K_5$	-61	-83
6	$M'_6$	-98 000	116 900	13	$K_6$	-61	-83
7	$M'_7$	6 390	7 490	14	$K_7$	-61	-83

Із аналізу результатів відзначимо, що величини крутних моментів незначно змінюються із врахуванням стисненого кручення окремих елементів. Однак суттєвим чином змінюється розподіл згинаючих моментів між вузлами рами, що свідчить про необхідність обґрунтування конструкції за допомогою запропонованого підходу. Це може привести як до збільшення надійності та довговічності рамних конструкцій, так і до економії матеріальних ре-



сурсів у випадку зменшення ваги відповідних елементів рами.

За використання запропонованого чисельного методу в ГСКТБ Сільгоспхіммаш був розроблений та впроваджений програмний засіб САПР-РАМА [11], який дозволяє розраховувати напружено-деформований стан рамних конструкцій довільної конфігурації з будь-якою кількістю траверсних балок та із заданими зовнішніми навантаженнями без обмеження на їх точки прикладання.

**Висновки.** Запропонований в роботі підхід дозволяє визначати напружено – деформований стан стержневих конструкцій сільськогосподарської, лісозаготівельної, транспортувальної та іншої техніки, що працює в умовах територій з ухилом із несиметрично прикладеним навантаженням унаслідок дії начепних технологічних знарядь, що експлуатуються в процесі руху. Підхід дозволяє розраховувати як стержневі конструкції начіпного обладнання, зокрема стріл-маніпуляторів, так і рам довільної форми. Для розрахунку статично-невизначених рам застосовується модифікований на випадок врахування стисненого кручення метод мінімуму потенційної енергії деформації. Цей метод став підґрунтям до створення чисельного методу розрахунку довільних статично невизначених рамних конструкцій, реалізованого у відповідному програмному засобі.

Викладений в опублікованому циклі досліджень підхід, дозволяє вивчати особливості експлуатації машин і механізмів, зумовлені специфікою територій, на якій експлуатується така техніка, та виконанням в процесі руху операцій виробничої функції механізму, виконуваних несиметрично розташованими начепними знаряддями. Предметом аналізу є двигуни, елементи трансмісії та конструкції рам. Запропонований підхід дозволяє як розробляти рекомендації щодо проектування нової техніки стосовно умов експлуатації, так і коригувати режими експлуатації наявних механізмів.

**Список літератури:** 1. *Библюк Н.І.* Лісотранспортні засоби: Теорія: Підручник. – Львів: Видавничий дім «Панорама», – 2004. – 453 с. 2. *Антощенко В.М., Артюмов М.П. та ін.* Трактори і автомобілі. Ч.4. Робоче, додаткове і допоміжне обладнання: Навчальний посібник / За ред. проф. *А.Т. Лебедева.* – Харків: ХНТСТУ, – 2006. – 164 с. 3. *Білоконь Я.Ю., Окоча А.І.* Нова мобільна сільськогосподарська техніка. – Ніжин, – 1999. – 264 с. 4. *Рыбак Т.И.* Методы оценки несущей способности и долговечности машин для химической защиты в растениеводстве. – Киев: Наукова думка, – 1985. – 232 с. 5. *Немцов В.П., Шестаков Б.А.* Техническая эксплуатация автомобильного и тракторного транспорта на лесозаготовках. –М: Лесная промышленность, – 1985. – 345 с. 6. *Варвак П.М.* Метод конечных элементов: Учебное пособие для вузов. – Киев: Вища школа, – 1981. – 176 с. 7. *Резников Р.А.* Решение задач строительной механики на ЭЦВМ. – М: Стройиздат. – 1971. – 311 с. 8. *Фесик С.П.* Справочник по сопротивлению материалов. – К.: Будівельник, – 1982. – 280 с. 9. *Рыбак Т.И., Мачуга О.С.* Расчет рам сельхозмашин методом минимума потенциальной энергии с учетом эффекта дилатации // Физико-химическая механика материалов. – 1984, – № 1. – С. 97 – 101. 10. *Гыкавий В.П., Мачуга О.С.* Применение метода конечных элементов к расчету тонкостенных рамных конструкций работающих в условиях стесненного кручения. – В кн.: Материалы 11 конференции молодых ученых Ин.-та Прикладных Проблем Механики и Математики АН УССР. Ч.2 (Львов, 1 – 3 октября 1985 г.). – Львов: Рукопись депонирована ВИНТИ 1987 г. № 1089 – В 87 ДЕП., 1985. – С.65 – 69. 11. *Рыбак Т.И., Андрушко А.Е., Мачуга О.С.* Методическое и программное обеспечение САПР-РАМА некоторых сельскохозяйственных машин. – В кн.: Информационное и математическое обеспечение САПР. Сборник тезисов докладов научно-технической конференции. – Днепропетровск, – 1987. – С. 96 – 97. 12. *Лазько В.А., Ново-*

сад Е.Н., Мачуга О.С. Исследование возможности применения композиционных полимерных материалов в конвейеростроении. – В кн.: Применение полимерных композиционных материалов в машиностроении: Тез. докл. I Вс. н.-т.- семинара. – Ворошиловград, 19 – 21 мая 1987. – С. 196 – 197. **13.** Рыбак Т.И., Грицай Ю.В., Попович П.В. Напряжено-деформованный стан несучих рам мобильных сельскогосподарских машин. – В кн.: Міжнародна науково-технічна конференція молодих учених та студентів «Актуальні задачі сучасних технологій»: Зб. тез доповідей (11 – 12 грудня 2013 року, Тернопіль). – Тернопіль: ТНУ ім. І. Пулюя, 2013. – С.121 – 122. **14.** Новосад Е.Н., Будиневський П.Н., Мачуга О.С., Ткачик О.В. Каретка подвесного конвейера. – Авторское свидетельство SU 1620394. – ПКИ конвейеростроения. – Заявлено 19.09.88, опубликовано 15.01.91. Бюл. №2. **15.** Мачуга О.С. Особенности проектирования лесозаготовительной техники для работы на территориях з ухилом. Частина 1. Математична модель // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2014. – № 6 (1049). – С. 130 – 144. **16.** Мачуга О.С. Особенности проектирования лесозаготовительной техники для работы на территориях з ухилом. Частина 2. Розв'язування практичних задач // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2014. – № 18 (1061). – С. 94 – 109. **17.** Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопrotivление материалов: Учебное пособие. – М: Наука, – 1986. – 500 с. **18.** Бычков Д.В. Строительная механика. – М: ГСИ, 1962. – 472 с.

**Bibliography (transliterated)** 1. Bybljuk, N. I. *Lisotransportni zasoby: Teorija. Pidruchnyk*. L'viv: Vydavnychij dim «Panorama», 2004. Print. **2.** Antoshenkov, V. M. et al. *Tracktory i avtomobili. Part 4. Roboche, dodatkovе i dopomizhne obladnannja: Navchal'nyj posibnyk*. Ed. Prof. A. T. Lebedev. Kharkiv: KhNTSGU, 2006. Print. **3.** Bilokon', Ja. Ju., and A. I. Okocha. *Nova mobil'na sil's'kogospodars'ka tehnika*. Nizhyn, 1999. Print. **4.** Rybak, T. I. *Metody ocnki nesushhej sposobnosti i dolgovechnosti mashyn dlja himicheskoy zashhity v rastenievodstve*. Kyev: Naukova dumka, 1985. Print. **5.** Nemcov, V. P., and B. A. Shestakov. *Tehnicheskaja ekspluatacija avtomobil'nogo i traktornogo transporta na lesozahotovkah*. Moscow: Lesnaja promyshlennost', 1985. Print. **6.** Varvak, P. M. *Metod konechnyh elementov: Uchebnoe posobie dlja vuzov*. Kyev: Vyshha shkola, 1981. Print. **7.** Reznikov, R. A. *Reshenie zadach stroitel'noj mehaniki na ECVМ*. Moscow: Strojizdat, 1971. Print. **8.** Fesyk, S. P. *Spravochnik po soprotivleniju materialov*. Kyev: Budivelnik, 1982. Print. **9.** Rybak, T. I., and O. S. Machuga. "Raschjot ram sel'hozmashin metodom minimuma potencial'noj jenerгии s uchjotom jeffekta deplanacii." *Fiziko-himicheskaja mehanika materialov*. No. 1. 1984. 97–101/ Print. **10.** Gykavyj, V. P., and O. S. Machuga. Primenenie metoda konechnyh jelementov k raschjotu tonkostennyh ramnyh konstrukcij, rabotajushhiv v uslovijah stesnjonnogo kruchenija." *Materialy 11-th konferencii molodyh uchenyh In-ta Prikladnyh Problem Mehaniki i Matematiki AN USSR*. Vol. 2. L'vov, 1 – 3 oktjabrja 1985. L'vov: Rukopis' deponirovana VINITI, 1987. No. 1089. V 87 DEP, 1985. 65–69. Print. **11.** Rybak, T. I., A. E. Andrushko and O. S. Machuga. "Metodicheskoe I programmnoe obespechenie SAPR-RAMA nekotoryh sel'skohozjajstvennyh mashin." *Informacyonnoe i matematicheskoe obespechenie SAPR. Sbornik tezisov dokladov nauchno-tehnicheskoy konferencii*. Dnepropetrovsk, 1987. 96–97. Print. **12.** Laz'-ko, V. A., E. N. Novosad and O. S. Machuga. "Issledovanie vozmozhnosti primenenija kompozicionnyh polimernyh materialov v konveerostroenii." *Primenenie polimernyh kompozicionnyh materialov v mashynostroenii: Tez. dokl. I Vs. n.-t. seminaru*. Voroshylovgrad, 19 – 21 may 1987. 196–197. Print. **13.** Rybak, T. I., Ju. V. Grycaj and P. V. Popovych. "Napruzhenodeformovanyj stan nesuchyh ram mobil'nyh sil's'kogospodars'kyh mashyn." *Mizhnarodna naukovotekhnichna konferencija molodyh uchenyh ta studentiv «Aktual'ni zadachi suchasnyh tehnolohij»: Zb. tez dopovidej*. Ternopil': TNU im. I. Puljuja, 2013. 121–122. Print. **14.** Novosad, E. N., et al. Каретка подвесного конвеера. USSR assignee. Patent SU 1620394. PКИ конвееростроения. Decl. 19.09.88. Publ. 15.01.91. Bulletin № 2. **15.** Machuga, O. S. "Osoblyvosti proektuvannja lisozagotivel'noi' tehniky dlja roboty na terytorijah z uhylom. Chastyна 1. Matematychna model'." *Visnyk NTU «KhPI»*. Ser.: *Matematychnе modeljuvannja v tehnici ta tehnologijah*. Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. No. 6 (1049). 130–144. Print. **16.** Machuga, O. S. "Osoblyvosti proektuvannja lisozagotivel'noi' tehniky dlja roboty na terytorijah z uhylom. Chastyна 2. Rozv'jazuvannja praktychnyh zadach." *Visnyk NTU «KhPI»*. Ser.: *Matematychnе modeljuvannja v tehnici ta tehnologijah*. Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. No. 18 (1061). 94–109. Print. **17.** Birger, I. A., and R. R. Mavljutov. *Soprotivlenie materialov: Uchebnoe posobie*. Moscow: Nauka, 1986. Print. **18.** Bychkov, D. V. *Stroitel'naja mehanika*. Moscow: GSI, 1962. Print.

Надійшла (received) 01.08.2014