<http:/www.books.google.com.ua/books>. **6.** Chudakov, D. A. *Osnovy teorii traktora i avtomobilja.* Moscow: Sel'hozizdat, 1962. Print. **7.** Skotnikov, V. A., A. A. Mashenskij and A. S. Solonskij. *Osnovy teorii i rascheta traktora i avtomobilja.* Moscow: Agropromizdat, 1986. Print. **8.** Gredeskul, A. B. "O raspredelenii tormoznyh sil mezhdu osjami avtomobilja pri tormozhenii na uklone." *Trudy konferencii po teorii i raschetu avtomobilej, rabotajushhih v gornyh uslovijah.* Tbilisi: Mecniereba, 1968. 56–62. **9.** Gredeskul, A. B., M. A. Podrigalo and N. Ju. Favorov. *Zakony regulirovanija tormoznyh sil avtomobilja pri dejstvii bokovoj sily v processe tormozhenija.* Khar'kov: HADI, 1980. Print. **10.** Podrigalo, M. A., et al. *Stabil'nost' jekspluatacionnyh svojstv kolesnyh mashin.* Khar'kov: HNADU, 2003. Print.

Надійшла (received) 27.10.2014

УДК 539.3

А.Г. НИКОЛАЕВ, д-р физ.-мат. наук, проф., НАКУ «ХАИ», Харьков;
Е.А. ТАНЧИК, ассистент НАКУ «ХАИ», Харьков

МОДЕЛЬ ЗЕРНИСТОГО КОМПОЗИТА СО СФЕРИЧЕСКИМИ ЗЕРНАМИ

Предложена модель зернистого композита, в которой зерна моделируются упругими сферическими включениями. Напряженное состояние в композите описывается краевой задачей для уравнения Ламе с условиями идеального контакта на границе зерен и условиями на бесконечности. Аналитическое решение строится в виде суперпозиции точных базисных решений уравнения Ламе в сферических системах координат, начала которых отнесены к центрам включений. Граничные условия удовлетворяются точно при помощи обобщенного метода Фурье. Задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений с фредгольмовым оператором. Приведен численный анализ нормальных компонент тензора напряжений в области между включениями.

Ключевые слова: зернистый композит, сферические включения, обобщенный метод Фурье, метод редукции.

Введение. При создании композиционных материалов и проектировании изделий из них важными факторами являются характеристики материала, связанные с его прочностью. Любые оценки прочности материала основываются на определении напряженно-деформированного состояния, возникающего в нем под действием внешних нагрузок. Теоретические методы определения напряжений и деформаций в композиционном материале недостаточно точны, так как обычно используют приближенные модели. Низкой точностью применительно к пространственным многосвязным задачам с большим числом компонент связности отличаются и стандартные численные методы (*метод конечных элементов*, *метод граничных элементов* и др.). В связи с этим актуальной задачей для высокотехнологических областей промышленности, в частности, авиации и ракетостроения, является задача точного определения напряженно-деформированного состояния многокомпонентных материалов.

Анализ исследований. В настоящее время предлагаются разные модели напряженно-деформированного состояния пористых и композиционных материалов. В работе [1] обобщены базовые подходы, применяемые в математических моделях, и общие методы решения уравнений механики стохастических композитов. Они могут быть сведены к стохастическим уравнениям *теории упругости структурно неоднородного тела*, к уравнениям *теории эффективных упругих модулей*, к уравнениям *теории упругих смесей* или к более общим уравнениям четвертого порядка. Решение *стохастических уравнений теории упругости* для произвольной области вызывает значительные математические трудности и может быть реализовано только приближенно. Построение уравнений теории эффективных упругих модулей связано с задачей определения интегральных модулей стохастически неоднородной среды, которая может быть решена *методом возмущений*, *методом моментов* или *методом условных моментов*. Однако, поскольку уравнения состояния не были строго обоснованы, эта теория не может использоваться для систематического моделирования композитных структур.

В статьях [2 – 4] методами теории аналитических функций решаются некоторые осесимметричные задачи теории упругости для системы сферических и эллипсоидальных полостей и включений.

В статье [5] предложена структурная модель зернистого эластомерного композита, позволившая связать его деформационное и прочностное поведение с размерами частиц дисперсной фазы, то есть учесть масштабный фактор прочности. На основе теоретических исследований напряженно-деформированного состояния вокруг двух жестких сферических включений в упругой несжимаемой матрице установлены зависимости математического ожидания разрывного усилия от физико-механических характеристик связующего, размеров частиц и расстояния между ними. В результате предложен новый вероятностный критерий появления микроразрушения в композитной структуре в виде отслоений матрицы от частиц. С его помощью проведены модельные исследования процессов развития внутренней поврежденности в композитной системе в зависимости от степени наполнения и величины включений. Построены соответствующие кривые растяжения, определены предельные разрывные макронапряжения и макродеформации.

В работах [6, 7] *методами обобщенных аналитических функций* исследованы осесимметричные краевые задачи для упругого пространства с двумя сферическими полостями и шара со сферической полостью.

В работе [8] *методами теории гармонических функций* исследованы осесимметричные напряженные состояния в упругом пространстве с двумя сферическими включениями.

В статье [9] дается обзор методов моделирования напряженного состояния композита с очень малыми размерами нановключений. Обсуждаются варианты применения *функции Грина*, непосредственного интегрирования уравнений равновесия, *метода бесконечно малых включений*. Все перечисленные методы учитывают неоднородные включения приближенно.

В работе [10] на примере решения *задачи Дирихле* для *уравнения Лапла-*

са приводится сравнительный анализ методов решения краевых задач в областях с N непесекающимися включениями.

В статье [11] введена локальная осесимметричная модель пористого материала, в которой напряженное состояние определяется равномерным давлением, создаваемым внутри вытянутых сфероидальных пор.

В статьях [12, 13] исследовано напряженное состояние в окрестности двух сфероидальных пор и включений в упругом материале *обобщенным методом Фурье*. Численная реализация модели позволила получить характер распределения локальных напряжений в области их концентрации. Проведено сравнение результатов с решением методом конечных элементов.

В данной работе развита методика, предложенная в работах [12, 13], на случай любого конечного числа включений. Методика основана на обобщенном методе Фурье и позволяет точно удовлетворять условиям на границе включений.

Постановка задачи. Рассматривается упругое пространство Ω с N непересекающимися сферическими включениями Ω_j. Считаем, что центры включений расположены в вершинах гранецентрированной кубической решетки со стороной a.

Будем использовать одинаково ориентированные сферические системы координат $(r_j, \theta_j, \varphi_j)$, начала которых отнесены к центрам включений O_j, $j = 1 \div N$. Материалы матрицы и включений имеют упругие характеристики (G, σ), (G_j, σ_j) соответственно.

Будем считать, что на бесконечности приложены постоянные растягивающие усилия $\sigma_z^\infty = T$, $\tau_{\rho z}^\infty = \tau_{\varphi z}^\infty = 0$ (одноосное растяжение) или $\sigma_\rho^\infty = T$, $\tau_{\rho\varphi}^\infty = \tau_{\rho z}^\infty = 0$ (двухосное растяжение), а включения находятся в условиях идеального контакта с матрицей.

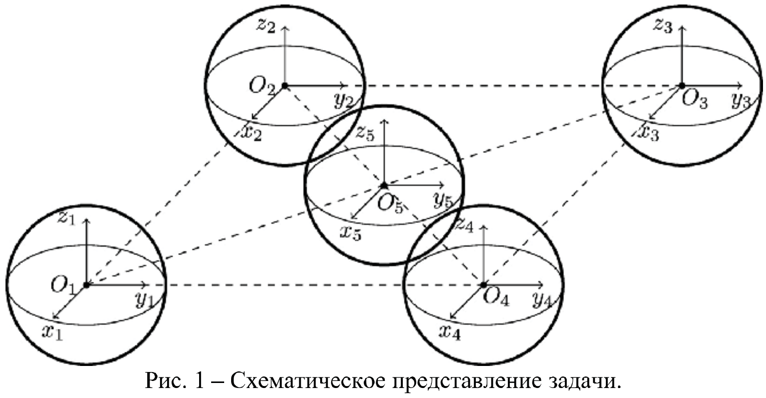

Рис. 1 – Схематическое представление задачи.

Для определения напряженно-деформированного состояния в рассматриваемом теле необходимо решить краевую задачу для *уравнения Ламе*

$$\Delta\mathbf{U}+\frac{1}{1-2\sigma}\nabla div\mathbf{U}=0 \qquad (1)$$

с условиями сопряжения на границе раздела фаз

$$\mathbf{FU}\big|_{\Gamma_j}=\mathbf{FU}_j\big|_{\Gamma_j}, \qquad (2)$$

$$\mathbf{U}\big|_{\Gamma_j}=\mathbf{U}_j\big|_{\Gamma_j}, \qquad (3)$$

а также указанными выше условиями на бесконечности. Здесь $\mathbf{U}$ – вектор перемещений; $\mathbf{FU}$ – отвечающий $\mathbf{U}$ вектор усилий на соответствующей граничной поверхности; σ – *коэффициент Пуассона*, Γ_j – поверхность включения Ω_j.

Решение задачи. Решение задачи в упругом пространстве Ω ищется в виде

$$\mathbf{U}=\tilde{\mathbf{U}}+\mathbf{U}_0; \qquad (4)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}=\sum_{j=1}^{N}\sum_{s=1}^{3}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n-1}^{n+1}a_{s,n,m}^{(j)}\mathbf{U}_{s,n,m}^{+(4)}(r_j,\theta_j,\varphi_j),\ \text{при } x\in\Omega\setminus\bigcup_j\Omega_j, \qquad (5)$$

$$\mathbf{U}_j=\sum_{s=1}^{3}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n-1}^{n+1}b_{s,n,m}^{(j)}\mathbf{U}_{s,n,m}^{-(4)}(r_j,\theta_j,\varphi_j),\ \text{при } x\in\Omega_j, \qquad (6)$$

где $a_{s,n,m}^{(j)}$, $b_{s,n,m}^{(j)}$ – неизвестные коэффициенты, которые определяются из граничных условий. Перемещение $\mathbf{U}_0$ соответствует напряженно-деформированному состоянию на бесконечности (для одноосного и двуосного растяжения упругого пространства):

$$\mathbf{U}_0=-\frac{1}{2}\frac{T\sigma\rho}{G(\sigma+1)}\mathbf{e}_\rho+\frac{1}{2}\frac{Tz}{G(\sigma+1)}\mathbf{e}_z; \qquad (7)$$

$$\mathbf{U}_0=-\frac{1}{2}\frac{T(\sigma-1)\rho}{G(\sigma+1)}\mathbf{e}_\rho-\frac{1}{2}\frac{T\sigma z}{G(\sigma+1)}\mathbf{e}_z; \qquad (8)$$

где T – усилие на бесконечности; G – модуль сдвига; $(\mathbf{e}_\rho,\mathbf{e}_\varphi,\mathbf{e}_z)$ – орты цилиндрической системы координат.

Введем следующий набор линейно независимых частных решений уравнения Ламе для сферы [14]:

$$\mathbf{U}_{1,n,m}^{\pm(4)}(r_j,\theta_j,\varphi_j)=\nabla u_{n\mp1,m}^{\pm(4)}(r_j,\theta_j,\varphi_j); \qquad (9)$$

$$\mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(4)}(r_j,\theta_j,\varphi_j)=\left[z_j\nabla+(4\sigma-3)\mathbf{e}_z\right]u_{n,m}^{\pm(4)}(r_j,\theta_j,\varphi_j)-$$

$$-\frac{R_j^2}{2(n\pm1)+1}\nabla u_{n\pm1,m}^{\pm(4)}(r_j,\theta_j,\varphi_j); \qquad (10)$$

$$\mathbf{U}_{3,n,m}^{\pm(4)}(r_j,\theta_j,\varphi_j)=irot\left[u_{n\mp1,m}^{\pm(4)}(r_j,\theta_j,\varphi_j)\mathbf{e}_z\right]; \qquad (11)$$

$$u_{n,m}^{\pm(4)}(r,\theta,\varphi)=u_{n,m}^{\pm}(r)P_n^m(\cos\theta)e^{im\varphi};$$

$$u_{n,m}^{+}(r) = (n-m)!\frac{1}{r^{n+1}},\ u_{n,m}^{-}(r) = \frac{1}{(n+m)!}r^{n},$$

где $P_n^m(\cos\theta)$ – *функция Лежандра 1-го рода*, символам «+» («–») в вектор-функциях (9) – (11) отвечают внешние (внутренние) решения для шара.

Вектор напряжений на площадке с нормалью $\mathbf{n}$ имеет вид

$$\mathbf{FU} = 2G\left[\frac{\sigma}{1-2\sigma}\mathbf{n}\,div\mathbf{U} + (\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{U} + \frac{1}{2}(\mathbf{n}\times rot\mathbf{U})\right]. \qquad (12)$$

Применив к формулам (9) – (11) оператор (12), на площадке с нормалью $\mathbf{n} = \mathbf{e}_{r_j}$ получим

$$\mathbf{FU}_{1,n,m}^{+(4)}(r_j,\theta_j,\varphi_j) = -\frac{2G}{r_j}(n+1)\Big[-u_{n,m-1}^{+(4)}(r_j,\theta_j,\varphi_j)\mathbf{e}_{-1} +$$
$$+u_{n,m+1}^{+(4)}(r_j,\theta_j,\varphi_j)\mathbf{e}_1 - u_{n,m}^{+(4)}(r_j,\theta_j,\varphi_j)\mathbf{e}_0\Big], \qquad (13)$$

$$\mathbf{FU}_{2,n,m}^{+(4)}(r_j,\theta_j,\varphi_j) = \frac{2G}{r_j}\left\{(n+m)\left[\frac{(n+3)(n-m+2)}{2n+3} - 2\sigma\right]\times\right.$$
$$\times u_{n,m-1}^{+(4)}(r_j,\theta_j,\varphi_j)\mathbf{e}_{-1} -$$
$$-(n-m)\left[\frac{(n+3)(n+m+2)}{2n+3} - 2\sigma\right]u_{n,m+1}^{+(4)}(r_j,\theta_j,\varphi_j)\mathbf{e}_1 +$$
$$+\left[\frac{(n+3)(n-m+1)(n+m+1)}{2n+3} - (n+1)(2\sigma-1)\right]\times$$
$$\left.\times u_{n,m}^{+(4)}(r_j,\theta_j,\varphi_j)\mathbf{e}_0\right\}, \qquad (14)$$

$$\mathbf{FU}_{3,n,m}^{+(4)}(r_j,\theta_j,\varphi_j) = -\frac{2G}{r_j}\Big[(n-m+2)u_{n,m-1}^{+(4)}(r_j,\theta_j,\varphi_j)\mathbf{e}_{-1} +$$
$$+(n+m+2)u_{n,m+1}^{+(4)}(r_j,\theta_j,\varphi_j)\mathbf{e}_1 - m u_{n,m}^{+(4)}(r_j,\theta_j,\varphi_j)\mathbf{e}_0\Big], \qquad (15)$$

$$\mathbf{FU}_{1,n,m}^{-(4)}(r_j,\theta_j,\varphi_j) = \frac{2G}{r_j}n\Big[-u_{n,m-1}^{-(4)}(r_j,\theta_j,\varphi_j)\mathbf{e}_{-1} + u_{n,m+1}^{-(4)}(r_j,\theta_j,\varphi_j)\mathbf{e}_1 +$$
$$+u_{n,m}^{-(4)}(r_j,\theta_j,\varphi_j)\mathbf{e}_0\Big], \qquad (16)$$

$$\mathbf{FU}_{2,n,m}^{-(4)}(r_j,\theta_j,\varphi_j) = \frac{2G}{r_j}\left\{-(n-m+1)\left[\frac{(n-2)(n+m-1)}{2n-1} + 2\sigma\right]\times\right.$$
$$\times u_{n,m-1}^{-(4)}(r_j,\theta_j,\varphi_j)\mathbf{e}_{-1} + (n+m+1)\left[\frac{(n-2)(n-m-1)}{2n-1} + 2\sigma\right]\times$$
$$\times u_{n,m+1}^{+(4)}(r_j,\theta_j,\varphi_j)\mathbf{e}_1 +$$
$$\left.+\left[\frac{(n-2)(n-m)(n+m)}{2n-1} + n(2\sigma-1)\right]u_{n,m}^{-(4)}(r_j,\theta_j,\varphi_j)\mathbf{e}_0\right\}, \qquad (17)$$

$$\mathbf{FU}^{-(4)}_{3,n,m}\left(r_j,\theta_j,\varphi_j\right)=\frac{2G}{r_j}\Big[(n+m-1)u^{-(4)}_{n,m-1}\left(r_j,\theta_j,\varphi_j\right)\mathbf{e}_{-1}+$$

$$+(n-m-1)u^{-(4)}_{n,m+1}\left(r_j,\theta_j,\varphi_j\right)\mathbf{e}_1-mu^{-(4)}_{n,m}\left(r_j,\theta_j,\varphi_j\right)\mathbf{e}_0\Big]. \qquad (18)$$

Базис $(\mathbf{e}_{-1},\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_0)$ связан с ортами цилиндрической системы координат следующим образом:

$$\mathbf{e}_{-1}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{e}_\rho+i\mathbf{e}_\varphi\right)e^{i\varphi};\mathbf{e}_1=\frac{1}{2}\left(\mathbf{e}_\rho-i\mathbf{e}_\varphi\right)e^{-i\varphi};\mathbf{e}_0=\mathbf{e}_z. \qquad (19)$$

Теоремы сложения связывают базисные решения уравнения Ламе в системах координат, совмещенных с центрами пары сферических включений. Справедливы следующие теоремы сложения [14]:

$$\mathbf{U}^{+(4)}_{s,n,m}(r_j,\theta_j,\varphi_j)=\sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-k-1}^{l=k+1}(-1)^{k+l}\Big\{(-1)^s\delta_{st}f^{(44)k,l,j,\alpha}_{n,m}+\delta_{s2}\delta_{t1}\times$$

$$\times\left[\left(\frac{R_\alpha^2}{2k+3}+\frac{R_j^2}{2n+3}\right)f^{(44)k+2,l,j,\alpha}_{n,m}-z_{j\alpha}f^{(44)k+1,l,j,\alpha}_{n,m}\right]\Big\}\mathbf{U}^{-(4)}_{t,k,l}(r_\alpha,\theta_\alpha,\varphi_\alpha); \qquad (20)$$

$$f^{(44)k,l,j,\alpha}_{n,m}=u^{+(4)}_{n+k,m-l}(r_{j\alpha},\theta_{j\alpha},\varphi_{j\alpha}),$$

где $s=1\div3$, $(r_{j\alpha},\theta_{j\alpha},\varphi_{j\alpha})$ – сферические координаты точки O_α в системе координат с началом O_j.

Разрешающая система уравнений. Используя теоремы сложения (20), представим вектор перемещения $\tilde{\mathbf{U}}$ в системе координат с началом в точке O_j:

$$\tilde{\mathbf{U}}=\sum_{s=1}^{3}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n-1}^{n+1}\Big\{A^{(j)}_{s,n,m}\mathbf{U}^{+(4)}_{s,n,m}(r_j,\theta_j,\varphi_j)+(-1)^{n+m}\mathbf{U}^{-(4)}_{s,n,m}(r_j,\theta_j,\varphi_j)\times$$

$$\times\sum_{\alpha\neq j}\sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-k-1}^{k+1}A^{(\alpha)}_{t,k,l}\Big\{(-1)^t\delta_{st}f^{(44)n,m,\alpha,j}_{k,l}+\delta_{t2}\delta_{s1}\times$$

$$\times\left[\left(\frac{R_j^2}{2n+3}+\frac{R_\alpha^2}{2k+3}\right)f^{(44)n+2,m,\alpha,j}_{k,l}-z_{\alpha j}f^{(44)n+1,m,\alpha,j}_{k,l}\right]\Big\}\Big\}. \qquad (21)$$

Применим оператор (12) к формулам (7), (8) на площадке с нормалью $\mathbf{n}=\mathbf{e}_{r_j}$ для одноосного и двухосного растяжения и получим соответственно

$$\mathbf{FU}_0=TP_1(\cos\theta_j)\mathbf{e}_z;\ \ \mathbf{FU}_0=-TP^{(1)}_1(\cos\theta_j)\mathbf{e}_{\rho_j}.$$

После удовлетворения граничным условиям задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $a^{(j)}_{s,n,m}$, $b^{(j)}_{s,n,m}$:

$$\sum_{s=1}^{3}\Big\{a^{(j)}_{s,n,m}F^{+(\mathrm{r})}_{s,n,m}(R_j,\sigma)+(-1)^{n+m}F^{-(\mathrm{r})}_{s,n,m}(R_j,\sigma)\times$$

$$\times\sum_{\alpha\neq j}\sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-k-1}^{k+1} a_{\mathrm{t},k,l}^{(\alpha)}\Big\{(-1)^l\delta_{st}\, f_{k,l}^{(44)n,m,\alpha,j}+\delta_{t2}\delta_{s1}\times$$

$$\times\left[\left(\frac{R_j^2}{2n+3}+\frac{R_\alpha^2}{2k+3}\right)f_{k,l}^{(44)n+2,m,\alpha,j}-z_{\alpha j}f_{k,l}^{(44)n+1,m,\alpha,j}\right]\Bigg\}=$$

$$=F_{n,m}^{(r)}+\frac{G_j}{G}\sum_{s=1}^{3}b_{s,n,m}^{(j)}F_{s,n,m}^{-(r)}(R_j,\sigma_j);\qquad(22)$$

$$\sum_{s=1}^{3}\Big\{a_{s,n,m}^{(j)}E_{s,n,m}^{+(\mathrm{r})}(R_j,\sigma)+(-1)^{n+m}E_{s,n,m}^{-(\mathrm{r})}(R_j,\sigma)\times$$

$$\times\sum_{\alpha\neq j}\sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-k-1}^{k+1} a_{\mathrm{t},k,l}^{(\alpha)}\Big\{(-1)^l\delta_{st}\, f_{k,l}^{(44)n,m,\alpha,j}+\delta_{t2}\delta_{s1}\times$$

$$\times\left[\left(\frac{R_j^2}{2n+3}+\frac{R_\alpha^2}{2k+3}\right)f_{k,l}^{(44)n+2,m,\alpha,j}-z_{\alpha j}f_{k,l}^{(44)n+1,m,\alpha,j}\right]\Bigg\}=$$

$$=E_{n,m}^{(r)}+\sum_{s=1}^{3}b_{s,n,m}^{(j)}E_{s,n,m}^{-(r)}(R_j,\sigma_j);\qquad(23)$$

$$r=-1,0,1;\quad n=0,1,2,\ldots;\quad m=-n-1\div n+1,\quad j=1\div N,$$

где $E_{n,m}^{(\mathrm{r})}(R)=\dfrac{TR}{2G}\left(\dfrac{-2\sigma}{1+\sigma}\delta_{\mathrm{r},-1}+\dfrac{\sigma}{1+\sigma}\delta_{\mathrm{r},1}+\dfrac{1}{1+\sigma}\delta_{\mathrm{r},0}\right)\delta_{n,1}\delta_{m,0}$, $F_{n,m}^{(\mathrm{r})}=-T\delta_{n1}\delta_{m0}\delta_{r0}$, для одноосного растяжения и

$$F_{n,m}^{(\mathrm{r})}=T\delta_{n1}\delta_{m0}(\delta_{r1}-2\delta_{r,-1}),$$

$$E_{n,m}^{(\mathrm{r})}(R)=\frac{TR}{G}\left(\frac{1-\sigma}{1+\sigma}\delta_{\mathrm{r},-1}-\frac{1-\sigma}{2(1+\sigma)}\delta_{\mathrm{r},1}-\frac{\sigma}{1+\sigma}\delta_{\mathrm{r},0}\right)\delta_{n,1}\delta_{m,0}$$

для двуосного растяжения;

$$F_{1,n,m}^{+(-1)}(R)=\frac{2(n+1)(n-m+1)!}{R^{n+2}},\quad F_{1,n,m}^{+(1)}(R)=-\frac{2(n+1)(n-m-1)!}{R^{n+2}};$$

$$F_{1,n,m}^{+(0)}(R)=\frac{2(n+1)(n-m)!}{R^{n+2}},\ F_{3,n,m}^{+(-1)}(R)=-\frac{1}{R^{n+2}}(n-m+2)!;$$

$$F_{2,n,m}^{+(-1)}(R)=\frac{2}{R^{n+2}}(n+m)\left[\frac{(n+3)(n-m+2)}{2n+3}-2\sigma\right](n-m+1)!;$$

$$F_{2,n,m}^{+(0)}(R)=\frac{2}{R^{n+2}}(n-m)!\left[\frac{(n-m+1)(n+m+1)(n+3)}{2n+3}-(n+1)(2\sigma-1)\right];$$

$$F_{2,n,m}^{+(1)}(R)=-\frac{2}{R^{n+2}}(n-m)\left[\frac{(n+3)(n+m+2)}{2n+3}-2\sigma\right](n-m-1)!;$$

$$F_{3,n,m}^{+(1)}(R)=-\frac{1}{R^{n+2}}(n+m+2)(n-m-1)!;$$

$$F_{3,n,m}^{+(-1)}(R)=\frac{1}{R^{n+2}}m(n-m)!,\ F_{1,n,m}^{-(-1)}(R)=-2R^{n-1}\frac{n}{(n+m-1)!};$$

$$F_{1,n,m}^{-(1)}(R)=2R^{n-1}\frac{n}{(n+m+1)!},\ F_{1,n,m}^{-(0)}(R)=2R^{n-1}\frac{n}{(n+m)!};$$

$$F_{2,n,m}^{-(-1)}(R)=-2R^{n-1}\left[\frac{(n-2)(n+m-1)}{2n+1}+2\sigma\right]\frac{n-m+1}{(n+m-1)!};$$

$$F_{2,n,m}^{-(1)}(R)=2R^{n-1}\left[\frac{(n-2)(n-m-1)}{2n-1}+2\sigma\right]\frac{1}{(n+m)!};$$

$$F_{2,n,m}^{-(0)}(R)=2R^{n-1}\left[\frac{(n+m)(n-m)(n-2)}{2n-1}+n(2\sigma-1)\right]\frac{1}{(n+m)!};$$

$$F_{3,n,m}^{-(-1)}(R)=R^{n-1}\frac{1}{(n+m-2)!},\ F_{3,n,m}^{-(1)}(R)=R^{n-1}\frac{n-m-1}{(n+m+1)!};$$

$$F_{3,n,m}^{-(0)}(R)=-R^{n-1}\frac{m}{(n+m)!},\ E_{1,n,m}^{\pm(-1)}(R)=-u_{n,m-1}^{\pm}(R);$$

$$E_{1,n,m}^{\pm(1)}(R)=u_{n,m+1}^{\pm}(R),\ E_{1,n,m}^{\pm(0)}(R)=\mp u_{n,m}^{\pm}(R);$$

$$E_{2,n,m}^{+(-1)}(R)=-\frac{(n-m+2)(n+m)}{2n+3}u_{n,m-1}^{+}(R);$$

$$E_{2,n,m}^{+(1)}(R)=\frac{(n-m)(n+m+2)}{2n+3}u_{n,m+1}^{+}(R);$$

$$E_{2,n,m}^{+(0)}(R)=-\left[\frac{(n-m+1)(n+m+1)}{2n+3}+4-3\sigma\right]u_{n,m}^{+}(R);$$

$$E_{2,n,m}^{-(-1)}(R)=-\frac{(n-m+1)(n+m-1)}{2n-1}u_{n,m-1}^{-}(R);$$

$$E_{2,n,m}^{-(1)}(R)=\frac{(n-m-1)(n+m+1)}{2n-1}u_{n,m+1}^{-}(R);$$

$$E_{2,n,m}^{-(0)}(R)=\left[\frac{(n-m)(n+m)}{2n-1}-4+3\sigma\right]u_{n,m}^{-}(R);$$

$$E_{3,n,m}^{\pm(-1)}(R)=-u_{n,m-1}^{\pm}(R);$$

$$E_{3,n,m}^{\pm(1)}(R)=-u_{n,m+1}^{\pm}(R),\ E_{3,n,m}^{\pm(0)}(R)=0.$$

Оператор системы уравнений (22), (23) является фредгольмовым при условии непересечения граничных поверхностей [15].

Анализ численных результатов. При численной реализации принимались следующие значения параметров: $\sigma=0.38$, $\sigma_j=0.21$, $G_j/G=25$, что соответствует зернам из алюмоборосиликатного стекла и матрице из эпоксидно-малеиновой смолы. Рассматривается случай $N=5$, считается, что центры включений расположены в одной плоскости. Система (22), (23) численно решалась методом редукции по параметру n .

На рис. 2 – 4 показаны графики распределения напряжений σ_x / T , σ_y / T , σ_z / T на линии O_1O_4 между включениями в зависимости от относительного расстояния a / R между ними. Слева приведен случай одноосного растяжения пространства, справа – двуосного. Максимальные по модулю значения напряжений σ_x / T , σ_y / T наблюдаются при наиболее близко расположенных включениях. Для напряжений σ_z / T подобное свойство имеет место для двуосного растяжения. А в случае одноосного растяжения, напротив, максимальные по модулю значения напряжений σ_z / T соответствуют наиболее удаленным друг от друга включениям. Характер распределения приведенных напряжений в одноосном и двуосном случаях принципиально отличается. В одноосном случае напряжение σ_z / T меняет знак, становясь сжимающим вблизи границы включений.

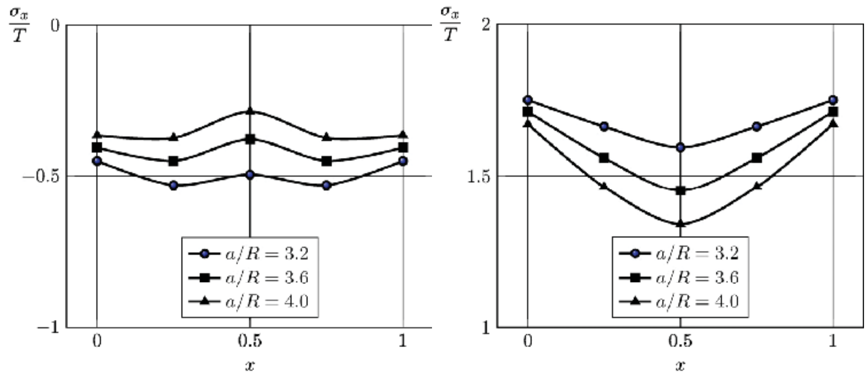

Рис. 2 – Напряжения σ_x / T на линии O_1O_4 между включениями для одноосного (слева) и двуосного (справа) растяжения.

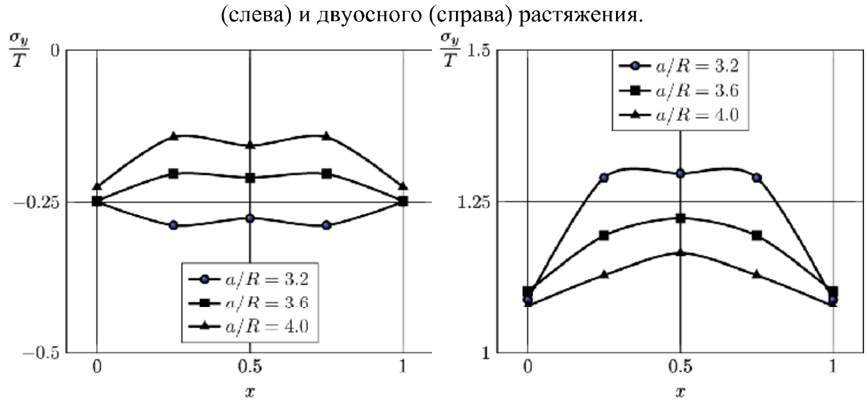

Рис. 3 – Напряжения σ_y / T на линии O_1O_4 между включениями для одноосного (слева) и двуосного (справа) растяжения.

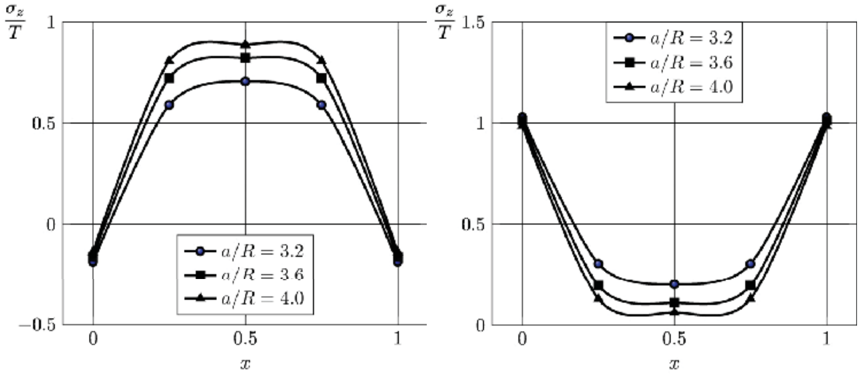

Рис. 4 – Напряжения σ_z / T на линии O_1O_4 между включениями для одноосного (слева) и двуосного (справа) растяжения.

На рис. 5, 6 приведены напряжения σ_x / T, σ_y / T и σ_z / T на линии O_1O_5 между включениями в зависимости от относительного расстояния между ними. Слева приведены графики для одноосного растяжения пространства, справа – для двуосного. В случае двуосного растяжения для напряжений σ_x / T, σ_y / T, σ_z / T областью концентрации является окрестность границ включений, при этом все они являются растягивающими. Для одноосного растяжения σ_x / T, σ_y / T меняются незначительно в пределах рассматриваемого отрезка. Обнаружена интересная закономерность в распределении напряжений σ_z / T при одноосном растяжении. С уменьшением расстояния между включениями напряжения из растягивающих на большей части рассматриваемой линии ($a / R = 4.0$) становятся сжимающими на всей линии ($a / R = 3.2$).

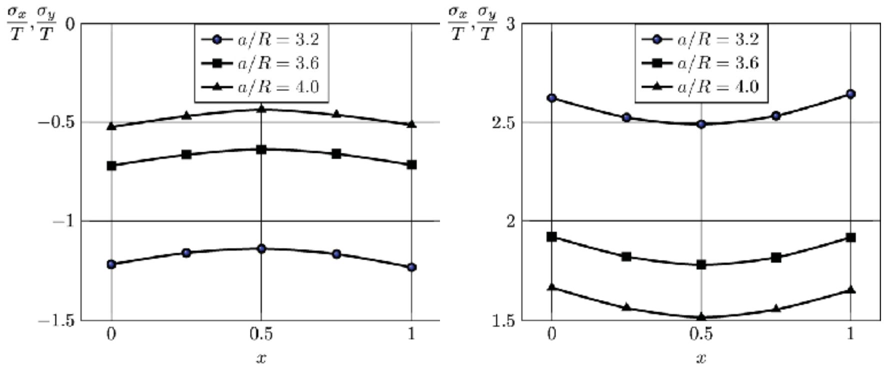

Рис. 5 – Напряжения σ_x / T, σ_y / T на линии O_1O_5 между включениями для одноосного (слева) и двуосного (справа) растяжения.

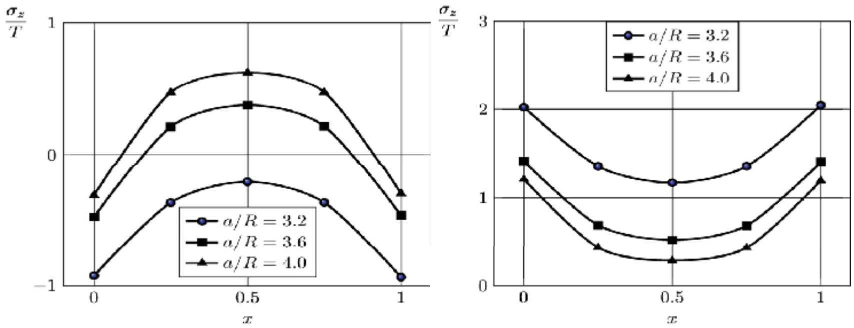

Рис. 6 – Напряжения σ_z / T на линии O_1O_5 между включениями для одноосного (слева) и двуосного (справа) растяжения.

Заключение. В работе предложена модель зернистого композита, в которой зерна моделируются упругими сферическими включениями, центры которых расположены в вершинах гранецентрированной кубической решетки. Напряженное состояние в композите описывается краевой задачей для уравнения Ламе с условиями идеального контакта на границе зерен и условиями на бесконечности. Аналитическое решение строится в виде суперпозиции точных базисных решений уравнения Ламе в сферических системах координат, начала которых отнесены к центрам включений. Граничные условия удовлетворяются точно при помощи обобщенного метода Фурье. Задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений с экспоненциально убывающими матричными коэффициентами и фредгольмовым оператором. Последнее обстоятельство позволяет строить эффективные численные решения как разрешающей системы, так и исходной краевой задачи. Численные результаты получены для случая пяти сферических включений. Приведены графики нормальных компонент тензора напряжений на линиях, соединяющих центры включений, в зависимости от относительного расстояния между включениями. Проведен качественный анализ полученных результатов.

Разработанная в настоящей статье модель напряженно-деформированного состояния композиционного материала со сферическими включениями может использоваться для определения его интегральных упругих модулей. Модель допускает обобщение на случай регулярной периодической структуры зерен в материале.

Список литературы: **1.** *Khoroshun L.P.* Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites // International Applied Mechanics. – 2000. – V. 36, – No. 10. – P. 1284 – 1316. **2.** *Вольперт В.С.*, *Олегин И.П.* Осесимметричное напряжённое состояние пространства, содержащего систему сферических полостей или включений // Новосиб. ин-т инж. ж.-д. транспорта. – 1977. – 19 с. – Деп. в ВИНИТИ. №3266 – 77. **3.** *Олегин И.П.* Осесимметричное напряженное состояние в трансверсально-изотропной упругой среде с двумя жесткими эллипсоидальными включениями // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2002. – Т. V, – № 1 (9). – С. 127 – 132. **4.** *Олегин И.П.* Решение пространственной задачи теории упругости для трансверсально-изотропного тела, содержащего периодическую систему эллипсоидальных полостей // Сибирский журнал индустриальной математики. – 1999. – Т. II, – № 1. – С. 117 – 122. **5.** *Гаришин О.К.*, *Комар Л.А.* Прогнозирование прочности эластомерных зернистых композитов в зависимости от размеров частиц наполнителя // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2003. –

Т. 9, – № 3. – С. 278 – 286. **6.** *Капшивый А.А., Копыстра Н.П., Ломонос Л.Н.* Осесимметричное напряженное состояние шара с неконцентрической шаровой полостью // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – №9. – С. 50 – 55. **7.** *Ломонос Л.Н.* Первая основная задача об осесимметричном напряженном состоянии пространства с двумя сферическими полостями // Мат. физика и нелинейная механика. – 1990. – № 13. – С. 51 – 56. **8.** *Tsuchida E., Nakahara I., Kodama M.* On the asysimmetric problem of the theory for an infinite elastic solid containing two spherical inclusions // Bull. JSME. – 1980. – V. 23, – № 181. – P. 1072 – 1080. **9.** *Овидько И.А., Шейнерман А.Г.* Упругие поля наноскопических включений в нанокомпозитах // Физика и механика материалов. – 2010. – Т. 10, – №1/2. – С. 1 – 29. **10.** *Трай-так С.Д.* Методы решения краевых задач в областях с несвязной границей // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2005. – Т. 11, – № 1. – С. 87 – 112. **11.** *Николаев А.Г., Танчик Е.А.* Математическая модель напряженно-деформированного состояния пористого материала // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – 2009. – Т. 2 (58). – С. 48 – 58. **12.** *Николаев А.Г., Танчик Е.А.* Развитие локальной модели напряженного состояния пористого материала // Авиационно-космическая техника и технология. – 2013. – № 1(98). – С. 14 – 18. **13.** *Николаев А.Г., Танчик Е.А.* Локальная математическая модель зернистого композиционного материала // Віcн. Харк. Нац. ун-та ім. В.Н. Каразіна. Сер.: Математика, прикладна математика і механіка. – 2010. – Т. 922. – С. 4 – 19. **14.** *Николаев А.Г.* Теоремы сложения решений уравнения Ламе. – Х.: Харьк. авиац. ин-т, 1993. – 109 с. – Деп. в ГНТБ Украины 21.06.93, – № 1178 – Ук 93. **15.** *Николаев А.Г.* Обоснование обобщенного метода Фурье в основных краевых задачах теории упругости для некоторых пространственных канонических областей // Доповіді НАН України. – 1998. – Т. 2. – С. 78 – 83.

Bibliography (transliterated): 1. Khoroshun, L. P. "Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites." *International Applied Mechanics*. Vol. 36. No. 10, 2000. 1284–1316. Print. **2.** Volpert, V. S., and I. P. Olegin. *Osesimmetrichnoe naprjazhjonnoe sostojanie prostranstva, soderzhashhego sistemu sfericheskih polostej ili vkljuchenij*. Novosib. in-t inzh. zh.-d. transporta. Dep. v VINITI. No. 3266–77, 1977. Print. **3.** Olegin, I. P. "Osesimmetrichnoe naprjazhennoe sostojanie v transversal'no-izotropnoj uprugoj srede s dvumja zhestkimi ellipsoidal'nymi vkljuchenijami." *Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki*. Vol. V. No. 1 (9). 2002. 127–132. Print. **4.** Olegin, I. P. "Reshenie prostranstvennoj zadachi teorii uprugosti dlja transversal'no-izotropnogo tela, soderzhashhego peri-odicheskuju sistemu ellipsoidal'nyh polostej." *Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki*. Vol. II. No. 1. 1999. 117–122. Print. **5.** Garishin, O. K., and L. A. Komar. "Prognozirovanie prochnosti elastomernyh zernistyh kompozitov v zavisimosti ot razmerov chastic napolnitelja." *Mehanika kompozicionnyh materialov i konstrukcyj*. Vol. 9. No. 3. 2003. 278–286. Print. **6.** Kapshivyj, A. A., N. P. Kopystra, and L. N. Lomonos. "Osesimmetrichnoe naprjazhennoe sostojanie shara s nekoncentricheskoj sharovoj polostju." *Dokl. AN USSR. Ser.: A*. No. 9. 1980. 50–55. Print. **7.** Lomonos, L. N. "Pervaja osnovnaja zadacha ob osesimmetrichnom naprjazhjonnom sostojanii prostranstva s dvumja sfericheskimi polostjami." *Mat. fizika i nelinejnaja mehanika*. No. 13. 1990. 51–56. Print. **8.** Tsuchida, E., I. Nakahara, and M. Kodama. "On the asysimmetric problem of the theory for an infinite elastic solid containing two spherical inclusions." *Bull. JSME*. Vol. 23. No 181. 1980. 1072–1080. Print. **9.** Ovid'ko, I. A., and A. G. Shejnerman. "Uprugie polja nanoskopicheskih vkljuchenij v nanokompozitah." *Fizika i mehanika materialov*. Vol. 10. No. ½. 2010. 1–29. Print. **10.** Trajtak, S. D. "Metody reshenija kraevyh zadach v oblastjah s nesvjaznoj granicej." *Mehanika kompozicionnyh materialov i konstrukcyj*. Vol. 11. No. 1. 2005. 87–112. Print. **11.** Nikolaev, A. G., and E. A. Tanchik. "Matematicheskaja model' naprjazhenno-deformirovannogo sostojanija poristogo materiala." *Voprosy proektirovanija i proizvodstva konstrukcyj letatel'nyh apparatov: sb. nauch. tr. Nac. aerokosm. un-ta im. N. Ye. Zhukovskogo «KhAI»*. Vol. 2 (58). 2009. 48–58. Print. **12.** Nikolaev, A. G., and E. A. Tanchik. "Razvitie lokal'noj modeli naprjazhennogo sostojanija poristogo materiala." *Aviacionno-kosmicheskaja tehnika i tehnologija*. No. 1(98). 2013. 14–18. Print. **13.** Nikolaev, A. G., and E. A. Tanchik. "Lokal'naja matematicheskaja model' zernistogo kompozicionnogo materiala." *Visn. Khark. Nac. un-ta im. V. N. Karazina. Ser.: Matematyka, prykladna matematyka i mehanika*. Vol. 922. 2010. 4–19. Print. **14** Nikolaev, A. G. "Teoremy slozhenija reshenij uravnenija Lame." Kharkiv: Khark. aviac. in-t, 1993. Dep. v GNTB Ukrainy 21.06.93. No. 1178–Uk 93. Print. **15.** Nikolaev, A. G. "Obosnovanie obobshhjonnogo metoda Fur"e v osnovnyh kraevyh zadachah teorii uprugosti dlja nekotoryh prostranstvennyh kanonicheskih oblastej." *Dopovidi NAN Ukrai'ny*. Vol. 2. 1998. 78–83. Print.

Надійшла (received) 01.08.2014