

значення кватерніонів орієнтації // Вісник НТУ «ХП», – №37. –2013. – С. 130 – 140. 4. Плаксий Ю.А. О фактическом порядке и областях эффективного применения алгоритмов определения ориентации в БИНС // Вестник Харьк. гос. политехн. унив. – 1999. – Вып. 57. – С. 87 – 90. 5. Демидович В.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. – М.: Наука, – 1967. – 368 с. 6. Плаксий Ю.А. Аналитические оценки точности алгоритмов определения ориентации в кватернионах для случая регулярной прецессии объекта // Вестник Харьк. политехн. ин-та, – № 2. – Вып. 11. – 1992. – С. 79 – 83.

**Bibliography (transliterated):** 1. Branec, V. N., and I. P. Shmyglevskij. *Vvedenie v teoriju besplatfornennykh inercial'nykh navigacionnykh sistem*. Moscow: Nauka, 1992. Print. 2. Tkachenko, A. I. "Povyshenie tochnosti vychislenija kinematcheskikh parametrov." *Kibernet. i vychisl. tehn.* Vol. 19. Kyiv, 1973. 117–121. Print. 3. Plaksij, Ju. A. "Pidvishhennja tochnosti reversivnyh shem algoritmiv viznachennja kvaternioniv orijentacii." *Visnyk NTU «KhPI»*. No. 37. Kharkiv: NTU «KhPI», 2013. 130–140. Print. 4. Plaksij, Ju. A. "O fakticheskom porjadke i oblastjah jeffektivnogo primenenija algoritmov opredelenija orijentacii v BINS." *Vestnik Har'k. gos. politehn. univ.* Vol. 57. 1999. 87–90. Print. 5. Demidovich, V. P., I. A. Maron and Je. Z. Shuvalova. *Chislennye metody analiza. Priblizhenie funkcij, differencjal'nye i integral'nye uravnenija*. Moscow: Nauka, 1967. Print. 6. Plaksij, Yu. A. "Analiticheskie ocenki tochnosti algoritmov opredelenija orijentacii v kvaternionah dlja sluchaja reguljarnoj precessii ob'ekta." *Vestnik Har'k. politehn. in-ta*. No. 2. Vol. 11. 1992. 79–83. Print.

*Надійшла (received) 01.08.2014*

УДК 517.95:519.63:532.5

**І.М. ПРИСЯЖНЮК**, канд. техн. наук, доц., РДГУ, Рівне;

**Ю.Є. КЛИМЮК**, канд. техн. наук, доц., РДГУ, Рівне;

**О.В. ПРИСЯЖНЮК**, аспірант, РДГУ, Рівне

### **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОСТОРОВИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ПРОЦЕСІВ КОНВЕКТИВНО- ДИФУЗІЙНОГО МАСОПЕРЕНОСУ В ДВОПОРИСТИХ БАГАТОШАРОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ**

Сформовано математичну модель процесу однокомпонентного конвективно-адсорбційно-дифузійного масопереносу в нанопористому багатошаровому середовищі за умов превалювання конвективної складової процесу над іншими складовими. Побудовано алгоритм асимптотичного розв'язання розв'язків відповідної модельної просторової нелінійної сингулярно збуреної крайової задачі у багатошаровому кусково-однорідному водонасиченому двопористому середовищі – криволінійному паралелепіпеді, що розділяється на підобласті еквіпотенціальними поверхнями. Наведено результати комп'ютерних розрахунків, що дозволяють оцінити вплив фізико-хімічних характеристик процесу на розподіл забруднень в області.

**Ключові слова:** конвективно-дифузійне масоперенесення, нанопористі мікрочастинки, багатошарове середовище.

**Вступ.** Суттєво покращити показники очищення технологічних потоків дозволяє застосування багатошарових середовищ, кожен шар яких складається з різних за розміром та фізико-хімічними характеристиками мікрочас-

тинок нанопористої структури з використанням принципу фільтрації в напрямку спадної крупності завантаження. Складність теоретичного опису властивостей неоднорідних середовищ з математичної точки зору пов'язана з тим, що фізичні процеси в таких середовищах описуються сингулярно збуреними крайовими задачами, коефіцієнти яких швидко змінюються на межах розділу різних компонентів матеріалу. Крім того, необхідно враховувати граничні умови на всіх поверхнях контакту, які в свою чергу також можуть змінюватися в процесі зовнішнього впливу.

**Аналіз останніх досягнень і публікацій.** У роботах [1 – 4] викладено основні результати розробки та досліджень асимптотичних методів для розв'язування сингулярно збурених типових крайових задач у прямокутних областях з урахуванням різного рівня гладкості початкової та крайових умов, задач конвективної дифузії при фільтрації в чотирикутних, а також в неоднорідних областях [4]. У [5 – 6] відповідну методику поширено на випадок модельних областей, які мають форму криволінійних паралелепіпедів, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями і чотирма поверхнями течії, а також на випадок багат шарових кусково-однорідних ізотропних насичених пористих середовищ. Чимало праць присвячено моделюванню аналогічних процесів масопереносу в нанопористих каталітичних середовищах [7 – 11]. Так у роботі [10] сформовано та досліджено математичну модель сингулярно збуреного процесу конвективної дифузії в однорідному двопористому середовищі. Актуальним залишається питання моделювання та дослідження такого роду процесів у просторових багат шарових середовищах, що складаються з різних за розміром та характеристиками пористих мікрочастинок.

**Постановка задачі.** Розглянемо модельну задачу процесу масопереносу забруднюючих речовин у багат шаровому кусково-однорідному водонасиченому двопористому середовищі – криволінійному паралелепіпеді

$$G_z = ABCDA_*B_*C_*D_*,$$

що розділяється еквіпотенціальними поверхнями  $E_jF_jF_{*j}E_{*j}$  ( $j = \overline{1, m-1}$ ) на  $m$  підобластей

$$G_z^1 = ABF_1E_1A_*B_*F_{*1}E_{*1}, \quad G_z^j = E_{(j-1)}F_{(j-1)}F_jE_jE_{*(j-1)}F_{*(j-1)}F_{*j}E_{*j} \\ (j = \overline{2, m-2}), \quad G_z^m = E_{m-1}F_{m-1}CDE_{*(m-1)}F_{*(m-1)}C_*D_*.$$

Середовище характеризується різними коефіцієнтами фільтрації  $\kappa = \{\kappa_j, (x, y, z) \in G_z^j, j = \overline{1, m}\}$ , активної пористості  $\sigma = \{\sigma_j, (x, y, z) \in G_z^j, j = \overline{1, m}\}$  і дифузії  $D = \{D_j = d_j \cdot \varepsilon, (x, y, z) \in G_z^j, j = \overline{1, m}\}$  міжчастинкового простору.

Кожна з підобластей складається з мікрочастинок різного розміру,  $R = \{R_j, (x, y, z) \in G_z^j, j = \overline{1, m}\}$  – це радіус мікрочастинок в  $j$ -му шарі, та різної структури, що характеризується відповідно коефіцієнтами пористості

$\sigma^* = \{\sigma_j^*, (x, y, z) \in G_z^j, j = \overline{1, m}\}$ , дифузії  $D^* = \{D_j^* = d_j^* \cdot \varepsilon, (x, y, z) \in G_z^j, j = \overline{1, m}\}$  в мікрочастинках, а також коефіцієнтами впливу внутрішньочастинкового переносу на міжчастинковий  $S = \{S_j = s_j \cdot \varepsilon, (x, y, z) \in G_z^j, j = \overline{1, m}\}$  і адсорбційної рівноваги  $k = \{k_j, (x, y, z) \in G_z^j, j = \overline{1, m}\}$ , де  $\kappa_j, \sigma_j, d_j, \sigma_j^*, d_j^*, s_j, k_j$  – деякі дійсні додатні числа ( $j = \overline{1, m}$ );  $\varepsilon$  – малий параметр. Відповідна модельна задача в області  $G_z \times (0, R) \times (0, \infty)$  описується системою рівнянь:

$$\bar{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi, \text{ div } \bar{v} = 0, \quad (1)$$

$$\text{div}(D \cdot \text{grad } \tilde{c}) - \bar{v} \cdot \text{grad } \tilde{c} - S \tilde{q}'|_{r=R} = \sigma \tilde{c}', \quad (2)$$

$$D^* \left( \tilde{q}_{rr}'' + \frac{2}{r} \tilde{q}_r' \right) = \sigma^* \tilde{q}_t' \quad (3)$$

з початковими та крайовими умовами:

$$\varphi|_{ABB_*A_*} = \varphi_*, \varphi|_{CDD_*C_*} = \varphi^*, \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{n}}|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0,$$

$$\tilde{c}(x, y, z, t)|_{t=0} = \tilde{c}^0(x, y, z), \tilde{c}|_{ABB_*A_*} = \tilde{c}_*(M, t), \tilde{c}|_{CDD_*C_*} = \tilde{c}^*(M, t); \quad (4)$$

$$\tilde{c}|_{BCC_*B_*} = \tilde{c}_{**}(M, t), \tilde{c}|_{ADD_*A_*} = \tilde{c}^{**}(M, t), \tilde{c}|_{ABCD} = \tilde{c}_{***}(M, t),$$

$$\tilde{c}|_{A_*B_*C_*D_*} = \tilde{c}^{***}(M, t); \quad (5)$$

$$\tilde{q}(x, y, z, r, t)|_{t=0} = \tilde{q}^0(x, y, z, r), \tilde{q}(x, y, z, r, t)|_{r=R} = k \tilde{c}(x, y, z, t),$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{q}(x, y, z, r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (6)$$

і умовами узгодженості на еквіпотенціальних поверхнях  $E_j F_j F_{*j} E_{*j}$ ,  $j = \overline{1, m-1}$ :

$$\varphi|_{E_j F_j F_{*j} E_{*j-}} = \varphi|_{E_j F_j F_{*j} E_{*j+}} = \varphi_{*j}^*, \kappa_j \cdot \varphi_n'|_{E_j F_j F_{*j} E_{*j-}} = \kappa_{j+1} \cdot \varphi_n'|_{E_j F_j F_{*j} E_{*j+}}; \quad (7)$$

$$c|_{E_j F_j F_{*j} E_{*j-}} = c|_{E_j F_j F_{*j} E_{*j+}},$$

$$\left( D_j \frac{\partial c}{\partial \bar{n}} - v_n^j c \right) \Big|_{E_j F_j F_{*j} E_{*j-}} = \left( D_{j+1} \frac{\partial c}{\partial \bar{n}} - v_n^j c \right) \Big|_{E_j F_j F_{*j} E_{*j+}}. \quad (8)$$

Тут  $c(x, y, z, t)$  – концентрація забруднень в міжчастинковому просторі, а  $q(x, y, z, r, t)$  – концентрація у внутрішньочастинковому просторі,  $\varphi$  і  $\bar{v}(v_x, v_y, v_z)$  – відповідно потенціал (квазіпотенціал) і вектор швидкості фільтрації,

$$0 < \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* < \infty, |\bar{v}| = \sqrt{v_x^2(x, y, z) + v_y^2(x, y, z) + v_z^2(x, y, z)} > v_* \gg 0,$$

$\varphi_*$ ,  $\varphi^*$  – довільні дійсні додатні числа,  $\vec{n}$  – зовнішня нормаль до відповідної поверхні,  $M$  – довільна точка відповідної поверхні,  $v_n^j$  – нормальні складові швидкості на відповідних поверхнях розділу  $E_j F_j F_{*j} E_{*j}$  ( $j = \overline{1, m-1}$ ),  $\varphi_{*j}^*$  – невідомі значення потенціалу на відповідних поверхнях розділу  $E_j F_j F_{*j} E_{*j}$ ,  $0 < \varphi_* < \varphi_{*1}^* < \varphi_{*2}^* < \dots < \varphi_{*(m-1)}^* < \varphi^* < \infty$ . Вважаємо, що всі функції, які фігурують в умовах (3) – (4), є достатньо гладкими та узгодженими між собою вздовж ребер та кутових точок даної області, а також на поверхнях  $E_j F_j F_{*j} E_{*j}$  ( $j = \overline{1, m-1}$ ) розділу підобластей.

**Постановка задачі в області комплексного потенціалу.** Шляхом введення пари функцій  $\psi = \psi(x, y, z)$ ,  $\chi = \chi(x, y, z)$ , просторово комплексно спряжених із функцією  $\varphi(x, y, z)$  і таких, що

$$\kappa \cdot \text{grad } \varphi = \text{grad } \psi \times \text{grad } \chi \quad [6],$$

а також заміною останніх чотирьох з умов (5) на умови:

$$\psi \Big|_{ADD_* A_*} = 0, \quad \psi \Big|_{BCC_* B_*} = Q_*, \quad \chi \Big|_{ABCD} = 0, \quad \chi \Big|_{A_* B_* C_* D_*} = Q^*,$$

задача (1), (4), (7) замінюється більш загальною прямою задачею на знаходження просторового аналогу кусково-конформного відображення області  $G_z$  на відповідну область комплексного потенціалу  $G_w = G_w^1 \cup G_w^2 \cup \dots \cup G_w^m$  (рис. 1 б),

де

$$G_w^1 = \{w = (\varphi, \psi, \chi) : \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_{*1}^*, 0 \leq \psi \leq Q_*, 0 \leq \chi \leq Q^*\};$$

$$G_w^j = \{w = (\varphi, \psi, \chi) : \varphi_{*(j-1)}^* \leq \varphi \leq \varphi_{*j}^*, 0 \leq \psi \leq Q_*, 0 \leq \chi \leq Q^*\} \quad (j = \overline{2, p-1});$$

$$G_w^m = \{w = (\varphi, \psi, \chi) : \varphi_{*(m-1)}^* \leq \varphi \leq \varphi^*, 0 \leq \psi \leq Q_*, 0 \leq \chi \leq Q^*\};$$

$\varphi_{*s}^*$  ( $s = \overline{1, p-1}$ ),  $Q_*$ ,  $Q^*$  – невідомі величини;  $Q = Q_* \cdot Q^*$  – повна фільтраційна витрата.

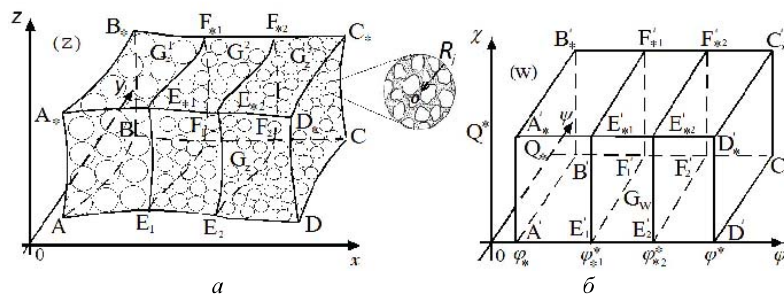


Рис. 1 – Просторова фізична область  $G_z$  – а та відповідна їй область комплексного потенціалу  $G_w$  – б при  $j = 3$ .

Припустимо, що ця задача є розв'язаною [5], зокрема, знайдено поле швидкостей  $\vec{v}$  і параметри  $\varphi_{*j}^*$  ( $j = \overline{1, m-1}$ ),  $Q_*$ ,  $Q^*$ ,  $Q$ . Здійснивши заміну змінних

$$x = x(\varphi, \psi, \chi), \quad y = y(\varphi, \psi, \chi), \quad z = z(\varphi, \psi, \chi)$$

у рівняннях (2), (3) та умовах (5), (6), (8) отримаємо відповідну дифузійну задачу для області  $G_w \times (0, R) \times (0, \infty)$ :

$$D\left(\frac{v^2}{\kappa^2} c''_{\varphi\varphi} + b_{1,1} c''_{\psi\psi} + b_{1,2} c''_{\chi\chi} + b_{2,1} c'_{\psi} + b_{2,2} c'_{\chi}\right) - \frac{v^2}{\kappa} c'_{\varphi} - Sq'_r \Big|_{r=R} = \sigma c'_t; \quad (9)$$

$$D^* \left( q''_{rr} + \frac{2}{r} q'_r \right) = \sigma^* q'_t; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} c(\varphi, \psi, \chi, t) \Big|_{t=0} &= c^0(\varphi, \psi, \chi), \quad c(\varphi_*, \psi, \chi, t) = c_*(\psi, \chi, t), \quad c \Big|_{\varphi=\varphi^*} = c^*(\psi, \chi, t), \\ c \Big|_{\psi=0} &= c_{**}(\varphi, \chi, t), \quad c \Big|_{\psi=Q_*} = c^{**}(\varphi, \chi, t), \quad c \Big|_{\chi=0} = c_{***}(\varphi, \psi, t), \\ c \Big|_{\chi=Q^*} &= c^{***}(\varphi, \psi, t); \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} q(\varphi, \psi, \chi, r, t) \Big|_{t=0} &= q^0(\varphi, \psi, \chi, r), \quad q(\varphi, \psi, \chi, r, t) \Big|_{r=R} = kc(\varphi, \psi, \chi, t), \\ \frac{\partial q(\varphi, \psi, \chi, r, t)}{\partial r} \Big|_{r=0} &= 0; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} c(\varphi_{*j-}^*, \psi, \chi, t) &= c(\varphi_{*j+}^*, \psi, \chi, t), \quad D_{j-1} c'_{\varphi}(\varphi_{*j-}^*, \psi, \chi, t) + \kappa_{j-1} c(\varphi_{*j-}^*, \psi, \chi, t) = \\ &= D_j c'_{\varphi}(\varphi_{*j+}^*, \psi, \chi, t) + \kappa_j c(\varphi_{*j+}^*, \psi, \chi, t), \quad (j = \overline{2, m}), \end{aligned} \quad (13)$$

де

$$c = c(\varphi, \psi, \chi, t) = \tilde{c}(x(\varphi, \psi, \chi), y(\varphi, \psi, \chi), z(\varphi, \psi, \chi), t),$$

інші функції інтерпретуються аналогічно;

$$\begin{aligned} b_{1,1} &= b_{1,1}(\varphi, \psi, \chi) = \psi_x'^2 + \psi_y'^2 + \psi_z'^2; \quad b_{1,2} = b_{1,2}(\varphi, \psi, \chi) = \chi_x'^2 + \chi_y'^2 + \chi_z'^2; \\ b_{2,1} &= b_{2,1}(\varphi, \psi, \chi) = \psi_{xx}'' + \psi_{yy}'' + \psi_{zz}''; \quad b_{2,2} = b_{2,2}(\varphi, \psi, \chi) = \chi_{xx}'' + \chi_{yy}'' + \chi_{zz}'' . \end{aligned}$$

#### Асимптотика розв'язку. Наближення розв'язків

$$c(\varphi, \psi, \chi, t) = \begin{cases} c_1, & \varphi_* < \varphi < \varphi_{*1}^*, \\ c_2, & \varphi_{*1}^* < \varphi < \varphi_{*2}^*, \\ \dots & \\ c_m, & \varphi_{*(m-1)}^* < \varphi < \varphi^* \end{cases} \quad \text{та} \quad q(\varphi, \psi, \chi, r, t) = \begin{cases} q_1, & \varphi_* < \varphi < \varphi_{*1}^*, \\ q_2, & \varphi_{*1}^* < \varphi < \varphi_{*2}^*, \\ \dots & \\ q_m, & \varphi_{*(m-1)}^* < \varphi < \varphi^* \end{cases}$$

задачі (9) – (13) з точністю  $O(\varepsilon^{n+1})$  шукаємо у вигляді асимптотичних рядів:

$$c_j = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i c_{j,i} + I_{1,j} \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \tilde{P}_{j,i} + I_{2,j} \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \tilde{P}_{j,i} + I_{3,j} \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \Pi_i + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} P_{j,i/2} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \Gamma_{j,i/2} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} H_{j,i/2} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} E_{j,i/2} + R_{j,n+1}^c, \quad q_j = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i q_{j,i} + \\
& + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{\frac{i}{2}} F_{j,\frac{i}{2}} + R_{j,n+1}^q, \quad j = \overline{1, m}. \tag{14}
\end{aligned}$$

Тут  $c_{j,i} = c_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, t)$ ,  $q_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, r, t)$  ( $j = \overline{1, m}$ ,  $i = \overline{0, n}$ ) – члени регулярних частин асимптотик,

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_{j,i} = \tilde{P}_{j,i}(\tilde{\phi}_j, \psi, \chi, t) \quad (j = \overline{1, m-1}, \quad i = \overline{0, n+1}), \quad \tilde{P}_{j,i} = \tilde{P}_{j,i}(\tilde{\phi}_{j-1}, \psi, \chi, t) \quad (j = \overline{2, m}, \\
i = \overline{0, n+1})
\end{aligned}$$

– функції типу примежового шару в околах  $\varphi = \varphi_{*j}^*$  ( $j = \overline{1, m-1}$ ) (поправки в околах поверхонь  $E_j' F_j' F_{*j}' E_{*j}'$  ( $j = \overline{1, m-1}$ ) розділу підобластей  $G_w^j$  ( $j = \overline{1, m-1}$ )) [4],

$$\Pi_i = \Pi_i(\xi, \psi, \chi, t) \quad (i = \overline{0, n+1})$$

– функції типу примежового шару в околі  $\varphi = \varphi^*$  (поправки на виході фільтраційної течії),

$$\begin{aligned}
P_{j,i/2} = P_{j,i/2}(\varphi, \mu, \chi, t), \quad \Gamma_{j,i/2} = \Gamma_{j,i/2}(\varphi, \eta, \chi, t), \quad H_{j,i/2} = H_{j,i/2}(\varphi, \psi, \lambda, t), \\
E_{j,i/2} = E_{j,i/2}(\varphi, \psi, \lambda, t) \quad (j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{0, 2n+1})
\end{aligned}$$

– функції типу примежового шару відповідно в околах  $\psi = 0$ ,  $\psi = Q_*$ ,  $\chi = 0$ ,  $\chi = Q^*$ , що враховують вплив бічних джерел забруднень,

$$F_{j,i/2}(x, \rho_j, t) \quad (i = \overline{0, 2n+1})$$

– функції типу примежового шару в околах

$$\begin{aligned}
r = R_j, \quad \tilde{\phi}_j = (\varphi_{*j}^* - \varphi)\varepsilon^{-1}, \quad \tilde{\phi}_j = (\varphi - \varphi_{*j}^*)\varepsilon^{-1} \quad (j = \overline{1, m-1}), \quad \xi = (\varphi^* - \varphi)\varepsilon^{-1}, \\
\mu = \psi\varepsilon^{-1/2}, \quad \eta = (Q_* - \psi)\varepsilon^{-1/2}, \quad \lambda = \chi\varepsilon^{-1/2}, \quad \gamma = (Q^* - \chi)\varepsilon^{-1/2}, \\
\rho_j = (R_j - r)\varepsilon^{-1/2}
\end{aligned}$$

– відповідні їм регуляризуючі перетворення (розтяги),

$$R_{j,n+1}^c = R_{j,n+1}^c(\varphi, \psi, \chi, t, \varepsilon), \quad R_{j,n+1}^q = R_{j,n+1}^q(\varphi, \psi, \chi, \rho_j, t, \varepsilon) \quad (j = \overline{1, m})$$

– залишкові члени (їх оцінка встановлюється на основі принципу максимуму аналогічно [3]),

$$\begin{aligned}
I_{1,1} = 0, \quad I_{1,j} = 1 \quad (j = \overline{2, m}), \quad I_{2,m} = 0, \quad I_{2,j} = 1 \quad (j = \overline{1, m-1}), \quad I_{3,m} = 1, \quad I_{3,j} = 0, \\
j = \overline{1, m-1}.
\end{aligned}$$

Підставляючи (14) в (9) – (13), та прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях  $\varepsilon$  [3], отримуємо для кожного такі задачі для знаходження ре-

гулярних частин асимптотики:

$$\begin{cases} (\tilde{v}^2 / \kappa_1)(c_{1,i})'_\varphi + \sigma_1(c'_{1,i})'_t = g_{1,i}^1(\varphi, \psi, \chi, t), \quad i = \overline{0, n}, \\ c_{1,i}(\varphi, \psi, \chi, 0) = u_{1,i}^1(\varphi, \psi, \chi), \quad c_{1,i}(\varphi_*, \psi, \chi, t) = u_{1,i}^2(\psi, \chi, t); \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} (\tilde{v}^2 / \kappa_j)(c_{i,j})'_\varphi + \sigma_j(c_{i,j})'_t = g_{j,i}^1(\varphi, \psi, \chi, t) \quad (j = \overline{1, m}, i = \overline{0, n}), \\ c_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, 0) = u_{j,i}^1(\varphi, \psi, \chi), \quad c_{j,i}(\varphi_{*(j-1)}, \psi, \chi, t) = u_{j,i}^2(\psi, \chi, t); \\ g_{j,0}^1(\varphi, \psi, \chi, t) = 0, \quad u_{j,0}^1(\varphi, \psi, \chi) = c_j^0(\varphi, \psi, \chi) \quad (j = \overline{1, m}), \quad \varphi_{*0} = \varphi_*, \\ u_{1,0}^2(\psi, \chi, t) = c_*(\psi, \chi, t), \end{cases} \quad (16)$$

$$g_{j,i}^1 = d_j \left( \frac{\tilde{v}^2}{\kappa_j^2} (c_{j,i-1})''_{\varphi\varphi} + b_{1,1}(c_{j,i-1})''_{\psi\psi} + b_{1,2}(c_{j,i-1})''_{\chi\chi} + b_{2,1}(c_{j,i-1})'_\psi + b_{2,2}(c_{j,i-1})'_\chi \right) - s_j(q_{j,i-1})'_r \Big|_{r=R_j},$$

$$u_{j,i}^1(\varphi, \psi, \chi) = 0, \quad u_{1,i}^2(\psi, \chi, t) = 0 \quad (i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}),$$

$$u_{j,i}^2(\psi, \chi, t) = c_{j-1,i}(\varphi_{*j-1}, \psi, \chi, t) \quad (j = \overline{2, m});$$

$$\begin{cases} \sigma_j^*(q_{j,i})'_t = g_{j,i}^2(\varphi, \psi, \chi, r, t), \\ q_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, r, 0) = u_{j,i}^3(\varphi, \psi, \chi, r); \end{cases} \quad (17)$$

$$g_{j,0}^2(\varphi, \psi, \chi, \rho, t) = 0, \quad g_{j,i}^2(\varphi, \psi, \chi, \rho, t) = d_j^*((q_{j,i-1})''_{rr}(\varphi, \psi, \chi, \rho, t) - 2(q_{j,i-1})'_r(\varphi, \psi, \chi, \rho, t)/r), \quad u_{j,0}^3(\varphi, \psi, \chi, r) = q_j^0(\varphi, \psi, \chi, r), \quad u_{j,i}^3(\varphi, \psi, \chi, r) = 0, \\ (i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}).$$

Розв'язки цих задач отримано у вигляді:

$$c_{1,0}(\varphi, \psi, \chi, t) = \begin{cases} c_*(\psi, \chi, t - f_1(\varphi, \psi, \chi)), & t \geq f_1(\varphi, \psi, \chi); \\ c_1^0(f_1^{-1}(f_1(\varphi, \psi, \chi) - t, \psi, \chi), \psi, \chi), & t < f_1(\varphi, \psi, \chi); \end{cases}$$

$$c_{1,i}(\varphi, \psi, \chi, t) = \begin{cases} \kappa_1 \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g_{1,i}^1(\widehat{\varphi}, \psi, \chi, f_1(\widehat{\varphi}, \psi, \chi) + t - f_1(\varphi, \psi, \chi))}{v^2(\widehat{\varphi}, \psi, \chi)} d\widehat{\varphi}, & t \geq f_1(\varphi, \psi, \chi); \\ \frac{1}{\sigma_1} \int_0^t g_{1,i}^1(f_j^{-1}(\widehat{t} + f_1(\varphi, \psi, \chi) - t, \psi, \chi), \psi, \chi, \widehat{t}) d\widehat{t}, & t < f_1(\varphi, \psi, \chi); \end{cases}$$

$$c_{j,0}(\varphi, \psi, \chi, t) = \begin{cases} c_{j-1,0}(\varphi_{*(j-1)}, \psi, \chi, t - f_j(\varphi, \psi, \chi)), & t \geq f_j(\varphi, \psi, \chi); \\ \tilde{c}_0^0(f_j^{-1}(f_j(\varphi, \psi, \chi) - t, \psi, \chi), \psi, \chi), & t < f_j(\varphi, \psi, \chi); \end{cases}$$

$$c_{j,i}(\varphi, \psi, \chi, t) = \begin{cases} \kappa_j \int_{\varphi_{*(j-1)}}^{\varphi} \frac{g_{j,i}^1(\bar{\varphi}, \psi, \chi, f_j(\bar{\varphi}, \psi, \chi) + t - f_j(\varphi, \psi, \chi))}{v^2(\bar{\varphi}, \psi, \chi)} d\bar{\varphi} + \\ + c_{j-1,i}(\varphi_{*(j-1)}^*, \psi, \chi, t), \quad t \geq f_j(\varphi, \psi, \chi); \\ \frac{1}{\sigma_j} \int_0^t g_{j,i}^1(f_j^{-1}(\bar{t} + f_j(\varphi, \psi, \chi) - t, \psi, \chi), \psi, \chi, \bar{t}) d\bar{t}, \quad t < f_j(\varphi, \psi, \chi); \end{cases}$$

$$q_j(\varphi, \psi, \chi, r, t) = q_j^0(\varphi, \psi, \chi, r), \quad q_{j,i}(x, r, t) = \frac{1}{\sigma_j} \int_0^t g_{j,i}^2(\varphi, \psi, \chi, r, \tilde{t}) d\tilde{t},$$

де

$$f_1(\varphi, \psi, \chi) = \kappa_1 \sigma_1 \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{ds}{\tilde{v}^2(s, \psi, \chi)}$$

– час проходження забруднюючими частинками шляху від точки  $(x(\varphi_*, \psi, \chi), y(\varphi_*, \psi, \chi), z(\varphi_*, \psi, \chi)) \in ABB_*A_*$

до точки  $(x(\varphi, \psi, \chi), y(\varphi, \psi, \chi), z(\varphi, \psi, \chi)) \in G_z^1$  вздовж відповідної лінії течії, а

$$f_j(\varphi, \psi, \chi) = \kappa_j \sigma_j \int_{\varphi_{*(j-1)}}^{\varphi} \frac{d\bar{\varphi}}{v^2(\bar{\varphi}, \psi, \chi)}$$

– від точки

$(x(\varphi_{*(j-1)}^*, \psi, \chi), y(\varphi_{*(j-1)}^*, \psi, \chi), z(\varphi_{*(j-1)}^*, \psi, \chi)) \in E_{j-1}F_{j-1}F_{*(j-1)}E_{*(j-1)}$  до точки

$$(x(\varphi, \psi, \chi), y(\varphi, \psi, \chi), z(\varphi, \psi, \chi)) \in G_z^j \quad (j = \overline{2, m});$$

$f_j^{-1} (j = \overline{1, m})$  – функції, обернені відповідно до  $f_j (j = \overline{1, m})$  відносно змінної  $\varphi$  (зазначимо, що такі функції існують, оскільки  $v^2(\varphi, \psi, \chi)$  – неперервно-диференційовна, обмежена, додатньо-визначена функція, а  $\kappa_j, \sigma_j (j = \overline{1, m})$  – додатньо-визначені сталі [5]).

Для знаходження примезових поправок  $\Pi_i (i = \overline{0, n+1}, j = \overline{1, m})$  в околі ділянки  $\varphi = \varphi^*$  одержимо такі задачі:

$$\begin{cases} d_m(\Pi_i)''_{\xi\xi} + \kappa_m(\Pi_i)''_{i\xi} = g_i^3(\xi, \psi, \chi, t), \\ \Pi_i(\xi, \psi, \chi, t) \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \quad \Pi_i(0, \psi, \chi, t) = u_i^4(\psi, \chi, t); \end{cases} \quad (18)$$

де

$$g_0^3(\xi, \psi, \chi, t) = 0; \quad u_0^4(\psi, \chi, t) = c^*(\psi, \chi, t) - c_{m,0}(\varphi^*, \psi, \chi, t);$$



$$g_1^3(\xi, \psi, \chi, t) = \frac{\kappa_m^2}{v^2(\varphi^*, \psi, \chi)} \times \left( \sigma_m(\Pi_0)'_t - d_m \frac{V_1}{\kappa_m^2} (\Pi_0)''_{\xi\xi} - \frac{V_1}{\kappa_m} (\Pi_0)'_{\xi} \right);$$

$$u_i^4(\psi, \chi, t) = -c_{m,i}(\varphi^*, \psi, \chi, t) \quad (i = \overline{1, n}); \quad g_i^3(\xi, \psi, \chi, t) = \frac{\kappa_m^2}{v^2(\varphi^*, \psi, \chi)} \times$$

$$\times \left( \sigma_m(\Pi_{i-1})'_t - \sum_{s=1}^i \left( d_m \frac{V_s}{\kappa_m^2} (\Pi_{i-s})''_{\xi\xi} + \frac{V_s}{\kappa_m} (\Pi_{i-s})'_{\xi} \right) - d_m \sum_{s=0}^{i-2} (B_{1,1,s}(\Pi_{i-2-s})''_{\psi\psi} + \right.$$

$$\left. + B_{2,1,s}(\Pi_{i-2-s})'_{\psi} + B_{1,2,s}(\Pi_{i-2-s})''_{\chi\chi} + B_{2,2,s}(\Pi_{i-2-s})'_{\chi} \right) \quad (i = \overline{2, n+1});$$

$$u_{n+1}^4(\psi, \chi, t) = 0; \quad V_s, \quad B_{1,1,s}, \quad B_{1,2,s}, \quad B_{2,1,s}, \quad B_{2,2,s} \text{ – коефіцієнти при } s\text{-тих степенях } \varepsilon \text{ у розкладі відповідних функцій } v^2(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi, \chi), \quad b_{1,1}(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi, \chi), \quad b_{1,2}(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi, \chi), \quad b_{2,1}(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi, \chi), \quad b_{2,2}(\varphi^* - \varepsilon\xi, \psi, \chi) \text{ у ряд Тейлора в околі } \varphi = \varphi^*.$$

У результаті їх послідовного розв'язання отримаємо:

$$\Pi_0(\xi, \psi, \chi, t) = \frac{d_m}{\kappa_m} \left( \tilde{c}^*(\psi, \chi, t) - c_0(\varphi^*, \psi, \chi, t) \right) e^{-\frac{\kappa_m \xi}{d_m}},$$

$$\Pi_i(\xi, \psi, \chi, t) = \frac{1}{d_m} \int_0^{\xi} \left( e^{-\frac{\kappa_m \xi}{d_m}} \int_0^{\xi} g_i^3(\hat{\xi}, \psi, \chi, t) e^{\frac{\kappa_m \hat{\xi}}{d_m}} d\hat{\xi} \right) d\xi - c_i(\varphi^*, \psi, \chi, t) \quad (i = \overline{1, n}),$$

$$\Pi_{n+1}(\xi, \psi, \chi, t) = \frac{1}{d_m} \int_0^{\xi} \left( e^{-\frac{\kappa_m \xi}{d_m}} \int_0^{\xi} g_{n+1}^3(\hat{\xi}, \psi, \chi, t) e^{\frac{\kappa_m \hat{\xi}}{d_m}} d\hat{\xi} \right) d\xi.$$

Задачі для знаходження поправок на поверхнях розділу шарів  $\tilde{P}_{j,i} = \tilde{P}_{j,i}(\tilde{\phi}_j, \psi, \chi, t)$  ( $j = \overline{1, m-1}$ ,  $i = \overline{0, n+1}$ ) та  $\tilde{\tilde{P}}_{j,i} = \tilde{\tilde{P}}_{j,i}(\tilde{\phi}_{j-1}, \psi, \chi, t)$  ( $j = \overline{2, m}$ ,  $i = \overline{0, n+1}$ ) мають вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_j(\tilde{P}_{j,i})''_{\tilde{\phi}_j} + \kappa_j(\tilde{P}_{j,i})'_{\tilde{\phi}_j} = g_{j,i}^4, \quad d_{j+1}(\tilde{\tilde{P}}_{j+1,i})''_{\tilde{\phi}_j} - \kappa_{j+1}(\tilde{\tilde{P}}_{j+1,i})'_{\tilde{\phi}_j} = g_{j,i}^5 \\ (j = \overline{1, m-1}, i = \overline{1, n}), \\ \tilde{P}_{j,i}(\tilde{\phi}_j, \psi, \chi, t) \xrightarrow{\tilde{\phi}_j \rightarrow \infty} 0, \quad \tilde{\tilde{P}}_{j+1,i}(\tilde{\phi}_j, \psi, \chi, t) \xrightarrow{\tilde{\phi}_j \rightarrow \infty} 0, \quad \tilde{P}_{s,i}(0, \psi, \chi, t) = \tilde{\tilde{P}}_{j+1,i}(0, \psi, \chi, t), \\ d_j \left( (c_{j,i})'_{\tilde{\phi}_j}(0, \psi, \chi, t) + (\tilde{P}_{j,i})'_{\tilde{\phi}_j}(0, \psi, \chi, t) \right) + \kappa_j \left( c_{j,i}(0, \psi, \chi, t) + \tilde{P}_{j,i}(0, \psi, \chi, t) \right) = \\ = -d_{j+1} \left( (c_{j+1,i})'_{\tilde{\phi}_j}(0, \psi, \chi, t) + (\tilde{\tilde{P}}_{j+1,i})'_{\tilde{\phi}_j}(0, \psi, \chi, t) \right) + \kappa_{j+1} \times \\ \times \left( c_{j+1,i}(0, \psi, \chi, t) + \tilde{\tilde{P}}_{j+1,i}(0, \psi, \chi, t) \right); \end{array} \right. \quad (19)$$

$$\begin{cases}
d_j(\tilde{P}_{j,n+1})''_{\tilde{\phi}_j\tilde{\phi}_j} + \kappa_j(\tilde{P}_{j,n+1})'_{\tilde{\phi}_j} = g_{j,n+1}^4, d_{j+1}(\tilde{P}_{j+1,n+1})''_{\tilde{\phi}_j\tilde{\phi}_j} - \kappa_{j+1}(\tilde{P}_{j+1,n+1})'_{\tilde{\phi}_j} = \\
= g_{j,n+1}^5 \quad (j = \overline{1, m-1}), \\
\tilde{P}_{j,n+1}(\tilde{\phi}_j, \psi, \chi, t) \xrightarrow{\tilde{\phi}_j \rightarrow \infty} 0, \tilde{P}_{j+1,n+1}(\tilde{\phi}_j, \psi, \chi, t) \xrightarrow{\tilde{\phi}_j \rightarrow -\infty} 0, \tilde{P}_{j,n+1}(0, \psi, \chi, t) = \\
= \tilde{P}_{j+1,n+1}(0, \psi, \chi, t), \\
d_j(\tilde{P}_{j,n+1})'_{\tilde{\phi}_j}(0, \psi, \chi, t) + \kappa_j \tilde{P}_{j,n+1}(0, \psi, \chi, t) = \\
= -d_{j+1}(\tilde{P}_{j+1,n+1})'_{\tilde{\phi}_j}(0, \psi, \chi, t) + \kappa_{j+1} \tilde{P}_{j+1,n+1}(0, \psi, \chi, t),
\end{cases} \quad (20)$$

де

$$\begin{aligned}
& g_{j,0}^4 = 0; \quad g_{j,0}^5 = 0; \\
& g_{j,1}^4 = \frac{\kappa_j^2}{\tilde{v}^2(\varphi_{*j}^*, \psi, \chi)} \left( \sigma_j(\tilde{P}_{j,0})'_t - d_j \frac{\tilde{V}_{j,1}}{\kappa_j^2} (\tilde{P}_{j,0})''_{\tilde{\phi}_j\tilde{\phi}_j} - \frac{\tilde{V}_{j,1}}{\kappa_j} (\tilde{P}_{j,0})'_{\tilde{\phi}_j} \right); \\
& g_{j,1}^5 = \frac{\kappa_{j+1}^2}{\tilde{v}^2(\varphi_{*j}^*, \psi, \chi)} \left( \sigma_{j+1}(\tilde{P}_{j+1,0})'_t - d_{j+1} \frac{\tilde{V}_{j,1}}{\kappa_{j+1}^2} (\tilde{P}_{j+1,0})''_{\tilde{\phi}_j\tilde{\phi}_j} - \frac{\tilde{V}_{j,1}}{\kappa_{j+1}} (\tilde{P}_{j+1,0})'_{\tilde{\phi}_j} \right); \\
& g_{j,i}^4 = \frac{\kappa_j^2}{\tilde{v}^2(\varphi_{*j}^*, \psi, \chi)} \left( \sigma_j(\tilde{P}_{j,i-1})'_t - \right. \\
& \left. - \sum_{s=1}^i \left( d_j \frac{\tilde{V}_{j,s}}{\kappa_j^2} (\tilde{P}_{j,i-s})''_{\tilde{\phi}_j\tilde{\phi}_j} - \frac{\tilde{V}_{j,s}}{\kappa_j} (\tilde{P}_{j,i-s})'_{\tilde{\phi}_j} \right) - d_j \sum_{s=0}^{i-2} \left( \tilde{B}_{1,1,j,s} (\tilde{P}_{j,i-2-s})''_{\psi\psi} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \tilde{B}_{2,1,j,s} (\tilde{P}_{j,i-2-s})'_{\psi} + \tilde{B}_{1,2,j,s} (\tilde{P}_{j,i-2-s})''_{\chi\chi} + \tilde{B}_{2,2,j,s} (\tilde{P}_{j,i-2-s})'_{\chi} \right) \right); \\
& g_{j,i}^5 = \frac{\kappa_{j+1}^2}{\tilde{v}^2(\varphi_{*j}^*, \psi, \chi)} \left( \sigma_{j+1}(\tilde{P}_{j+1,i-1})'_t - \sum_{s=1}^i \left( d_{j+1} \frac{\tilde{V}_{j,s}}{\kappa_{j+1}^2} (\tilde{P}_{j+1,i-s})''_{\tilde{\phi}_j\tilde{\phi}_j} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\tilde{V}_{j,s}}{\kappa_{j+1}} (\tilde{P}_{j+1,i-s})'_{\tilde{\phi}_j} \right) - d_{j+1} \sum_{s=0}^{i-2} \left( \tilde{B}_{1,1,j,s} (\tilde{P}_{j+1,i-2-s})''_{\psi\psi} + \tilde{B}_{2,1,j,s} (\tilde{P}_{j+1,i-2-s})'_{\psi} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \tilde{B}_{1,2,j,s} (\tilde{P}_{j+1,i-2-s})''_{\chi\chi} + \tilde{B}_{2,2,j,s} (\tilde{P}_{j+1,i-2-s})'_{\chi} \right) \right) \quad (j = \overline{2, m-1}, i = \overline{1, n+1}); \\
& \tilde{V}_{j,s}, \tilde{V}'_{j,s}, \tilde{B}_{1,1,j,s}, \tilde{B}'_{1,1,j,s}, \tilde{B}_{1,2,j,s}, \tilde{B}'_{1,2,j,s}, \tilde{B}_{2,1,j,s}, \tilde{B}'_{2,1,j,s}, \tilde{B}_{2,2,j,s}, \tilde{B}'_{2,2,j,s} \\
& \quad (j = \overline{1, m-1})
\end{aligned}$$

– коефіцієнти при  $s$ -тих степенях  $\varepsilon$  у розкладах функцій

$$v^2(\varphi_{*j}^* - \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_j, \psi, \chi), \quad v^2(\varphi_{*j}^* + \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_j, \psi, \chi), \quad b_{1,1}(\varphi_{*j}^* - \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_j, \psi, \chi),$$

$$\begin{aligned}
& b_{1,1}(\varphi_{*j}^* + \varepsilon \cdot \tilde{\varphi}_j, \psi, \chi), \quad b_{1,2}(\varphi_{*j}^* - \varepsilon \cdot \tilde{\varphi}_j, \psi, \chi), \quad b_{1,2}(\varphi_{*j}^* + \varepsilon \cdot \tilde{\varphi}_j, \psi, \chi), \\
& b_{2,1}(\varphi_{*j}^* - \varepsilon \cdot \tilde{\varphi}_j, \psi, \chi), \quad b_{2,1}(\varphi_{*j}^* + \varepsilon \cdot \tilde{\varphi}_j, \psi, \chi), \quad b_{2,2}(\varphi_{*j}^* - \varepsilon \cdot \tilde{\varphi}_j, \psi, \chi), \\
& \quad b_{2,2}(\varphi_{*j}^* + \varepsilon \cdot \tilde{\varphi}_j, \psi, \chi)
\end{aligned}$$

у ряд Тейлора відповідно в околі  $\varphi = \overline{\varphi_{*j}^*}$  ( $j = \overline{1, m-1}$ ).

Розв'язки відповідних задач мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_{j,0}(\tilde{\varphi}_j, \psi, \chi, t) &= \frac{1}{2(\kappa_{j+1} - \kappa_j)} \left( d_{j+1}(c_{j+1,0})'_{\tilde{\varphi}_j} (0, \psi, \chi, t) + d_j(c_{j,0})'_{\tilde{\varphi}_j} (0, \psi, \chi, t) + \right. \\
&\quad \left. + \kappa_j c_{j,0} (0, \psi, \chi, t) - \kappa_{j+1} c_{j+1,0} (0, \psi, \chi, t) \right) e^{\frac{\kappa_j}{d_j} \tilde{\varphi}_j} \quad (j = \overline{1, m-1}), \\
\tilde{P}_{j,0}(\tilde{\varphi}_{j-1}, \psi, \chi, t) &= \frac{1}{2(\kappa_j - \kappa_{j-1})} \left( d_j(c_{j,0})'_{\tilde{\varphi}_{j-1}} (0, \psi, \chi, t) - d_{j-1}(c_{j-1,0})'_{\tilde{\varphi}_{j-1}} (0, \psi, \chi, t) + \right. \\
&\quad \left. + \kappa_{j-1} c_{j-1,0} (0, \psi, \chi, t) - \kappa_j c_{j,0} (0, \psi, \chi, t) \right) e^{\frac{\kappa_j}{d_j} \tilde{\varphi}_{j-1}} \quad (j = \overline{2, m}), \\
\tilde{P}_{j,i}(\tilde{\varphi}_j, \psi, \chi, t) &= \frac{1}{d_j} \int_0^{\tilde{\varphi}_j} \left( e^{-\frac{\kappa_j}{d_j} \tilde{\varphi}} \int_0^{\tilde{\varphi}} g_{j,i}^4(\tilde{\varphi}, \psi, \chi, t) e^{\frac{\kappa_j}{d_j} \tilde{\varphi}} d\tilde{\varphi} \right) d\tilde{\varphi} + \\
&\quad + \frac{1}{\kappa_{j+1} - \kappa_j} \left( d_j(c_{j,i})'_{\tilde{\varphi}_j} (0, \psi, \chi, t) + d_{j+1}(c_{j+1,i})'_{\tilde{\varphi}_j} (0, \psi, \chi, t) + \right. \\
&\quad \left. + \kappa_j c_{j,i} (0, \psi, \chi, t) - \kappa_{j+1} c_{j+1,i} (0, \psi, \chi, t) \right) \quad (j = \overline{1, m-1}, i = \overline{1, n}), \\
\tilde{P}_{j,i}(\tilde{\varphi}_{j-1}, \psi, \chi, t) &= \frac{1}{d_j} \int_0^{\tilde{\varphi}_{j-1}} \left( e^{-\frac{\kappa_j}{d_j} \tilde{\varphi}} \int_0^{\tilde{\varphi}} g_{j,i}^5(\tilde{\varphi}, \psi, \chi, t) e^{\frac{\kappa_j}{d_j} \tilde{\varphi}} d\tilde{\varphi} \right) d\tilde{\varphi} + \frac{1}{\kappa_j - \kappa_{j-1}} \times \\
&\quad \times \left( d_{j-1}(c_{j-1,i})'_{\tilde{\varphi}_{j-1}} (0, \psi, \chi, t) + d_j(c_{j,i})'_{\tilde{\varphi}_{j-1}} (0, \psi, \chi, t) + \kappa_{j-1} c_{j-1,i} (0, \psi, \chi, t) - \right. \\
&\quad \left. - \kappa_j c_{j,i} (0, \psi, \chi, t) \right) \quad (j = \overline{2, m}, i = \overline{1, n}), \\
\tilde{P}_{j,n+1}(\tilde{\varphi}_j, \psi, \chi, t) &= \frac{1}{d_j} \int_0^{\tilde{\varphi}_j} \left( e^{-\frac{\kappa_j}{d_j} \tilde{\varphi}} \int_0^{\tilde{\varphi}} g_{j,n+1}^4(\tilde{\varphi}, \psi, \chi, t) e^{\frac{\kappa_j}{d_j} \tilde{\varphi}} d\tilde{\varphi} \right) d\tilde{\varphi} \quad (j = \overline{1, m-1}), \\
\tilde{P}_{j,n+1}(\tilde{\varphi}_{j-1}, \psi, \chi, t) &= \frac{1}{d_j} \int_0^{\tilde{\varphi}_{j-1}} \left( e^{-\frac{\kappa_j}{d_j} \tilde{\varphi}} \int_0^{\tilde{\varphi}} g_{j,n+1}^5(\tilde{\varphi}, \psi, \chi, t) e^{\frac{\kappa_j}{d_j} \tilde{\varphi}} d\tilde{\varphi} \right) d\tilde{\varphi} \quad (j = \overline{2, m}).
\end{aligned}$$

Для врахування впливу бічних джерел забруднення будемо поправки  $P_{j,i/2}(\varphi, \mu, \chi, t)$ ,  $\Gamma_{j,i/2}(\varphi, \eta, \chi, t)$ ,  $H_{j,i/2}(\varphi, \psi, \lambda, t)$ ,  $E_{j,i/2}(\varphi, \psi, \gamma, t)$  ( $j = \overline{1, m}$   $i = \overline{0, 2n+1}$ ), які знаходимо в результаті розв'язання наступних задач [6]:

$$\begin{cases} b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) d_j (P_{j,i})''_{\mu\mu} - v^2(\varphi, 0, \chi) (P_{j,i})'_\varphi = g_{j,i}^6(\varphi, \mu, \chi, t), \\ P_{(j,i)}(\varphi, \mu, \chi, t) \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0, P_{(j,i)}(\varphi, 0, \chi, t) = u_{j,i}^6(\varphi, \chi, t); \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} b_{1,1}(\varphi, Q^*, \chi) d_j (\Gamma_{j,i})''_{\eta\eta} - v^2(\varphi, Q^*, \chi) (\Gamma_{j,i})'_\varphi = g_{j,i}^7(\varphi, \eta, \chi, t), \\ \Gamma_{(j,i)}(\varphi, \eta, \chi, t) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0, \Gamma_{(j,i)}(\varphi, 0, \chi, t) = u_{j,i}^7(\varphi, \chi, t); \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} b_{1,2}(\varphi, \psi, 0) d_j (H_{j,i})''_{\lambda\lambda} - v^2(\varphi, \psi, 0) (H_{j,i})'_\varphi = g_{j,i}^8(\varphi, \psi, \lambda, t), \\ H_{(j,i)}(\varphi, \psi, \lambda, t) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0, H_{(j,i)}(\varphi, \psi, 0, t) = u_{j,i}^8(\varphi, \psi, t); \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} b_{1,2}(\varphi, \psi, Q^*) d_j (E_{j,i})''_{\gamma\gamma} - v^2(\varphi, \psi, Q^*) (E_{j,i})'_\varphi = g_{j,i}^9(\varphi, \psi, \gamma, t), \\ E_{j,i}(\varphi, \psi, \gamma, t) \xrightarrow{\gamma \rightarrow \infty} 0, E_{j,i}(\varphi, \psi, 0, t) = u_{j,i}^9(\varphi, \psi, t), \end{cases} \quad (24)$$

де

$$g_{j,0}^6(\varphi, \mu, \chi, t) = 0; g_{j,1/2}^6(\varphi, \mu, \chi, t) = \tilde{V}_{1/2}(P_{j,0})'_\varphi - \tilde{B}_{11,1/2} d_j (P_{j,0})''_{\mu\mu} - \tilde{B}_{21,1/2} d_j (P_{j,0})'_\mu;$$

$$g_{j,i/2}^6(\varphi, \mu, \chi, t) = \sum_{s=1}^i \tilde{V}_{i/2}(P_{j,i-s})'_\varphi - d_j \left( \sum_{s=1}^i \left( \tilde{B}_{11,i/2}(P_{j,i-s})''_{\mu\mu} + \tilde{B}_{21,i/2}(P_{j,i-s})'_\mu \right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{s=0}^{i-2} \tilde{V}_{i/2}(P_{j,i-2-s})''_{\varphi\varphi} - \sum_{s=0}^{i-2} \tilde{B}_{12,i/2}(P_{j,i-2-s})''_{\chi\chi} - \sum_{s=0}^{i-2} \tilde{B}_{22,i/2}(P_{j,i-2-s})'_\chi \right) \quad (i = \overline{2, 2n+1});$$

$\tilde{V}_s$ ,  $\tilde{B}_{1,1,s}$ ,  $\tilde{B}_{1,2,s}$ ,  $\tilde{B}_{2,1,s}$  і  $\tilde{B}_{2,2,s}$  – коефіцієнти при  $s$ -их степенях  $\sqrt{\varepsilon}$  в розкладі функцій

$$v^2(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\mu, \chi), b_{1,1}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\mu, \chi), b_{1,2}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\mu, \chi), b_{2,1}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\mu, \chi) \text{ і } b_{2,2}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\mu, \chi)$$

в ряд Тейлора в околі  $\psi = 0$ ;

$$u_{j,0}^6(\varphi, \chi, t) = c_{j**}(\varphi, \chi, t) - c_{(j,0)}(\varphi, 0, \chi, t) - \Pi_{(j,0)}(\varphi, 0, \chi, t);$$

$$u_{j,i/2}^6(\varphi, \chi, t) = \begin{cases} -c_{(j,i/2)}(\varphi, 0, \chi, t) - \Pi_{(j,i/2)}(\varphi, 0, \chi, t), & \text{якщо } i \text{ парне,} \\ 0, & \text{якщо } i \text{ непарне, } i = \overline{1, 2n+1}; \end{cases}$$

$$g_{j,0}^7(\varphi, \eta, \chi, t) = 0; g_{j,1/2}^7(\varphi, \eta, \chi, t) = \tilde{V}_{1/2}^* \Gamma'_{(j,0)\varphi} - \tilde{B}_{11,1/2}^* d_j \Gamma''_{0\eta\eta} - \tilde{B}_{21,1/2}^* d_j \Gamma'_{0\eta};$$

$$g_{j, \frac{i}{2}}^7(\varphi, \eta, \chi, t) = \sum_{s=1}^i \tilde{V}_i^* \left( \Gamma_{j, \frac{i-s}{2}} \right)'_{\varphi} - d_j \times$$

$$\times \left( \sum_{s=1}^i \left( \tilde{B}_{1,1, \frac{i}{2}}^* \left( \Gamma_{j, \frac{i-s}{2}} \right)''_{\eta\eta} + \tilde{B}_{2,1, \frac{i}{2}}^* \left( \Gamma_{j, \frac{i-s}{2}} \right)'_{\eta} \right) - \sum_{s=0}^{i-2} \tilde{V}_i^* \left( \Gamma_{j, \frac{i-2-s}{2}} \right)''_{\varphi\varphi} - \right.$$

$$\left. - \sum_{s=0}^{i-2} \tilde{B}_{1,2, \frac{i}{2}}^* \left( \Gamma_{j, \frac{i-2-s}{2}} \right)''_{\chi\chi} - \sum_{s=0}^{i-2} \tilde{B}_{2,2, \frac{i}{2}}^* \left( \Gamma_{j, \frac{i-2-s}{2}} \right)'_{\chi} \right), \quad i = \overline{2, 2n+1};$$

$\tilde{V}_s^*$ ,  $\tilde{B}_{1,1,s}^*$ ,  $\tilde{B}_{1,2,s}^*$ ,  $\tilde{B}_{2,1,s}^*$  і  $\tilde{B}_{2,2,s}^*$  – коефіцієнти при  $s$ -их степенях  $\sqrt{\varepsilon}$  в розкладі функцій

$$v^2(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\eta, \chi), \quad b_{1,1}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\eta, \chi), \quad b_{1,2}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\eta, \chi), \quad b_{2,1}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\eta, \chi) \quad \text{і} \quad b_{2,2}(\varphi, Q_* - \sqrt{\varepsilon}\eta, \chi)$$

в ряд Тейлора в околі  $\psi = Q_*$ ;

$$u_{j,0}^7(\varphi, \chi, t) = c_j^{**}(\varphi, \chi, t) - c_{(j,0)}(\varphi, Q^*, \chi, t) - \Pi_{(j,0)}(\varphi, Q^*, \chi, t);$$

$$u_{j, \frac{i}{2}}^7(\varphi, \chi, t) = \begin{cases} -c_{(j, \frac{i}{2})}(\varphi, Q^*, \chi, t) - \Pi_{(j, \frac{i}{2})}(\varphi, Q^*, \chi, t), & \text{якщо } i \text{ парне,} \\ 0, & \text{якщо } i \text{ непарне, } \quad i = \overline{1, 2n+1}; \end{cases}$$

$$g_{j,0}^8(\varphi, \psi, \lambda, t) = 0, \quad g_{j, \frac{1}{2}}^8(\varphi, \psi, \lambda, t) = \bar{V}_1'(H_{j,0})'_{\varphi} -$$

$$-d_j \left( \bar{B}_{1,2, \frac{1}{2}}(H_{j,0})''_{\lambda\lambda} - \bar{B}_{2,2, \frac{1}{2}}(H_{j,0})'_{\lambda} \right), \quad g_{j, \frac{i}{2}}^8(\varphi, \psi, \lambda, t) =$$

$$= \sum_{s=1}^i \bar{V}_i'(H_{j, \frac{i-s}{2}})'_{\varphi} - d_j \left( \sum_{s=1}^i \left( \bar{B}_{1,2, \frac{i}{2}}(H_{j, \frac{i-s}{2}})''_{\lambda\lambda} + \bar{B}_{2,2, \frac{i}{2}}(H_{j, \frac{i-s}{2}})'_{\lambda} \right) - \sum_{s=0}^{i-2} \bar{V}_i'(H_{j, \frac{i-2-s}{2}})''_{\varphi\varphi} - \right.$$

$$\left. - \sum_{s=0}^{i-2} \bar{B}_{1,1, \frac{i}{2}}(H_{j, \frac{i-2-s}{2}})''_{\psi\psi} - \sum_{s=0}^{i-2} \bar{B}_{2,1, \frac{i}{2}}(H_{j, \frac{i-2-s}{2}})'_{\psi} \right), \quad i = \overline{2, 2n+1};$$

$\bar{V}_s$ ,  $\bar{B}_{1,1,s}$ ,  $\bar{B}_{1,2,s}$ ,  $\bar{B}_{2,1,s}$  і  $\bar{B}_{2,2,s}$  – коефіцієнти при  $s$ -их степенях  $\sqrt{\varepsilon}$  в розкладі функцій

$v^2(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}\lambda)$ ,  $b_{1,1}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}\lambda)$ ,  $b_{1,2}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}\lambda)$ ,  $b_{2,1}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}\lambda)$  і  $b_{2,2}(\varphi, \psi, \sqrt{\varepsilon}\lambda)$

в ряд Тейлора в околі  $\chi = 0$ ;

$$u_{j,0}^8(\varphi, \psi, t) = c_{j***}(\varphi, \psi, t) - c_{(j,0)}(\varphi, \psi, 0, t) - \Pi_{(j,0)}(\varphi, \psi, 0, t);$$

$$u_{j, \frac{i}{2}}^8(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} -c_{(j, \frac{i}{2})}(\varphi, \psi, 0, t) - \Pi_{(j, \frac{i}{2})}(\varphi, \psi, 0, t), & \text{якщо } i \text{ парне,} \\ 0, & \text{якщо } i \text{ непарне, } \quad i = \overline{1, 2n+1}; \end{cases}$$

$$g_{j,0}^9(\varphi, \psi, \gamma, t) = 0; \quad g_{j, \frac{1}{2}}^9(\varphi, \psi, \gamma, t) = \bar{V}_1^*(E_{j,0})'_{\varphi} - d_j \left( \bar{B}_{1,2, \frac{1}{2}}^*(E_{j,0})''_{\gamma\gamma} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\bar{B}_{2,2,\frac{1}{2}}^*(E_{j,0})'_\gamma); g_{j,\frac{i}{2}}^9(\varphi, \psi, \gamma, t) = \sum_{s=1}^i \bar{V}_{\frac{i}{2}}^*(E_{j,\frac{i-s}{2}})'_\varphi - \\
& -d_j \left( \sum_{s=1}^i \left( \bar{B}_{1,2,\frac{i}{2}}^*(E_{j,\frac{i-s}{2}})''_{\gamma\gamma} + \bar{B}_{2,2,\frac{i}{2}}^*(E_{j,\frac{i-s}{2}})'_\gamma \right) - \sum_{s=0}^{i-2} \bar{V}_{\frac{i}{2}}^*(E_{j,\frac{i-2-s}{2}})''_{\varphi\varphi} - \right. \\
& \left. - \sum_{s=0}^{i-2} \bar{B}_{1,1,\frac{i}{2}}^*(E_{j,\frac{i-2-s}{2}})''_{\psi\psi} - \sum_{s=0}^{i-2} \bar{B}_{2,1,\frac{i}{2}}^*(E_{j,\frac{i-2-s}{2}})'_\psi \right), \quad i = \overline{2, 2n+1};
\end{aligned}$$

$\bar{V}_s^*$ ,  $\bar{B}_{1,1,s}^*$ ,  $\bar{B}_{1,2,s}^*$ ,  $\bar{B}_{2,1,s}^*$  і  $\bar{B}_{2,2,s}^*$  – коефіцієнти при  $s$ -их степенях  $\sqrt{\varepsilon}$  в розкладі функцій

$$\begin{aligned}
& v^2(\varphi, \psi, Q^* - \sqrt{\varepsilon}\gamma), \quad b_{1,1}(\varphi, \psi, Q^* - \sqrt{\varepsilon}\gamma), \quad b_{1,2}(\varphi, \psi, Q^* - \sqrt{\varepsilon}\gamma), \\
& b_{2,1}(\varphi, \psi, Q^* - \sqrt{\varepsilon}\gamma) \quad \text{і} \quad b_{2,2}(\varphi, \psi, Q^* - \sqrt{\varepsilon}\gamma)
\end{aligned}$$

в ряд Тейлора в околі  $\chi = Q^*$ ;

$$\begin{aligned}
& u_{j,0}^9(\varphi, \psi, t) = c_j^{***}(\varphi, \psi, t - c_{(j,0)}(\varphi, \psi, Q^{**}, t) - \Pi_{(j,0)}(\varphi, \psi, Q^{**}, t); \\
& u_{j,\frac{i}{2}}^9(\varphi, \psi, t) = \begin{cases} -c_{(j,\frac{i}{2})}(\varphi, \psi, Q^*, t) - \Pi_{(j,\frac{i}{2})}(\varphi, \psi, Q^*, t), & \text{якщо } i \text{ парне,} \\ 0, & \text{якщо } i \text{ непарне, } \quad i = \overline{1, 2n+1}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Поправки  $F_{j,\frac{i}{2}}(x, \rho_j, t)$ , які забезпечують виконання другої та третьої з умов (12), знаходяться з наступних задач:

$$\begin{cases} d_j^*(F_{j,\frac{i}{2}})''_{\rho\rho}(\varphi, \psi, \chi, \rho_j, t) - \sigma_j^*(F_{j,\frac{i}{2}})'_i(\varphi, \psi, \chi, \rho_j, t) = \\ = g_{j,\frac{i}{2}}^{10}(\varphi, \psi, \chi, \rho_j, t), \\ F_{j,\frac{i}{2}}(\varphi, \psi, \chi, \rho_j, 0) = 0, F_{j,\frac{i}{2}}(\varphi, \psi, \chi, 0, t) = \\ = u_{j,\frac{i}{2}}^{10}(\varphi, \psi, \chi, t), (F_{j,\frac{i}{2}})'_\rho(\varphi, \psi, \chi, \rho_j, t) \Big|_{\rho_j \rightarrow \infty} = 0, \end{cases} \quad (25)$$

де

$$\begin{aligned}
& g_{j,0}^{10}(\varphi, \psi, \chi, \rho_j, t) = 0; \quad g_{j,\frac{i}{2}}^{10}(\varphi, \psi, \chi, \rho_j, t) = -2d_j^* \sum_{s=1}^i \frac{\rho_j^{s-1}}{R_j^s} (F_{j,\frac{i-s}{2}})'_{\rho_j}(\varphi, \psi, \chi, \rho_j, t); \\
& u_{j,0}^{10}(\varphi, \psi, \chi, t) = k_j(c_{j,0} + I_{1,j}\tilde{P}_{j,0} + I_{2,j}\tilde{P}_{j,0} + I_{3,j}\Pi_{j,0} + P_{j,0} + \Gamma_{j,0} + H_{j,0} + E_{j,0}) - \\
& \quad - q_{j,0}(\varphi, \psi, \chi, R_j, t)
\end{aligned}$$

$$u_{j, \frac{i}{2}}^{10} = \begin{cases} k_j (c_{j, \frac{i}{2}} + I_{1,j} \tilde{P}_{j, \frac{i}{2}} + I_{2,j} \tilde{P}_{j, \frac{i}{2}} + I_{3,j} \Pi_{j, \frac{i}{2}} + P_{j, \frac{i}{2}} + \Gamma_{j, \frac{i}{2}} + H_{j, \frac{i}{2}} + E_{j, \frac{i}{2}}) - \\ - q_{j, \frac{i}{2}}(\varphi, \psi, \chi, R_j, t), \quad i \text{ парне;} \\ k_j (P_{j, \frac{i}{2}} + \Gamma_{j, \frac{i}{2}} + H_{j, \frac{i}{2}} + E_{j, \frac{i}{2}}), \quad \text{якщо } i \text{ непарне.} \end{cases}$$

**Чисельні розрахунки.** Для проведення комп'ютерного моделювання процесу масопереносу забруднюючих речовин у двошаровому кусково-однорідному двопористому середовищі, що характеризується різними коефіцієнтами фільтрації, пористості і дифузії та ін., використано ідеальний фільтраційний фон для області  $G_z$ , обмеженої поверхнями

$$f_1(x, y, z) = (x + 20.9582786)^2 + y^2 + z^2 - 8822.56088033,$$

$$f_2(x, y, z) = (x - 420.9582786)^2 + y^2 + z^2 - 8822.56088033,$$

$$f_3(x, y, z) = (x - 200)^2 + z^2 + (y - 615.536707)^2 - 41885.4382,$$

$$f_4(x, y, z) = (x - 200)^2 + (y + 615.53670744)^2 + z^2 - 41885.4382,$$

$$f_5(x, y, z) = f_6(x, y, z) = 160000y^2 + (x(x - 400) + y^2 + z^2)^2 - 932548.33996z^2,$$

вибрано положення поверхні розділу  $EFF_*E_*$ :

$$f_*(x, y, z) = (x + 2604.7602859)^2 + y^2 + z^2 - 7826680.261098 \quad [5].$$

При цьому перша підобласть складається з мікрочастинок радіусом  $R_1 = 10^{-4}$  м, а друга – з частинок радіусом  $R_2 = 5 \cdot 10^{-5}$  м, і розглянуто два випадки різного задання відповідних коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} 1) \quad \kappa_1 = 0.45 \text{ м/добу}, \quad \kappa_2 = 0.3 \text{ м/добу}, \quad \sigma_1 = 0.7, \quad \sigma_2 = 0.5, \\ D_1 = 0.008 \text{ м}^2/\text{добу}, \quad D_2 = 0.005 \text{ м}^2/\text{добу}, \quad \sigma_1^* = 0.37, \quad \sigma_2^* = 0.48, \\ D_1^* = 8 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{добу}, \quad D_2^* = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{добу}, \quad k_1 = 0.8, \quad k_2 = 0.95, \quad S_1 = 0.005, \\ S_2 = 0.004; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \kappa_1 = 0.45 \text{ м/добу}, \quad \kappa_2 = 0.375 \text{ м/добу}, \quad \sigma_1 = 0.7, \quad \sigma_2 = 0.6, \\ D_1 = 0.008 \text{ м}^2/\text{добу}, \quad D_2 = 0.007 \text{ м}^2/\text{добу}, \quad \sigma_1^* = 0.5, \quad \sigma_2^* = 0.8, \\ D_1^* = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{добу}, \quad D_2^* = 4 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{добу}, \quad k_1 = 0.8, \quad k_2 = 0.95, \quad S_1 = 0.01, \\ S_2 = 0.008. \end{aligned}$$

Відповідно побудовано розрахункові динамічні сітки  $G_z^1$  при  $\varphi_* = -7.14$ ,  $\varphi^* = 10.2$  (рис. 2),  $G_z^2$  при  $\varphi_* = -7.9$ ,  $\varphi^* = 9.03$  (мають схожий вигляд), які отримані в залежності від вибору задання відповідних коефіцієнтів при  $N = n_1 + n_2 = 20$ ,  $n_1 = n_2 = 10$ . Значення  $\varphi_*$  та  $\varphi^*$  вибиралися так, щоб середня швидкість фільтрації вздовж двошарового пористого середови-

ща  $v_{сер}$  була приблизно рівною 1 м/добу. Також для областей  $G_z^j$  ( $j=1,2$ ) знайдено фільтраційні витрати, які відповідно становлять  $Q = 1.91 \text{ м}^3/\text{добу}$  та  $Q = 2.38 \text{ м}^3/\text{добу}$ , потенціали на поверхнях розділу  $\varphi_*^* = 3.06$  і  $\varphi_*^* = 1.13$  та обчислено величини швидкостей фільтрації  $|v|$  (рис. 3).

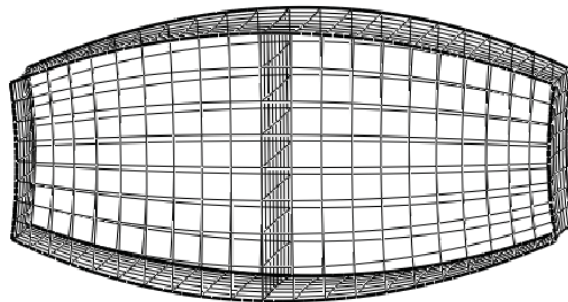


Рис. 2 – Розрахована сіткова область  $G_z$ .

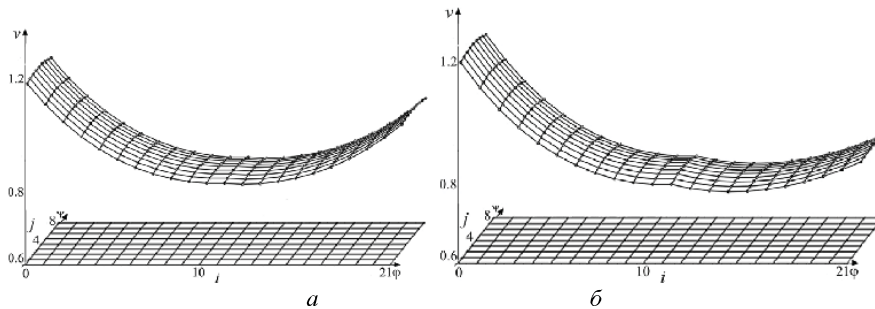


Рис. 3 – Розподіл величин швидкостей фільтрації вздовж поверхонь течій  $\chi(x, y, z) = \chi_4$ ; а – для області  $G_z^1$ , б – для області  $G_z^2$ .

На рис. 4 проілюстровано вплив дифузії та адсорбції на розподіл концентрації забруднюючої речовини в міжчастинковому просторі. Криві 1 та 2 відповідають конвективній складовій розв'язку

$$c_0(\varphi, \psi_4, \chi_4, t) = \begin{cases} c_{1,0}(\varphi, \psi_4, \chi_4, t), & \varphi < \varphi_*^* \\ c_{2,0}(\varphi, \psi_4, \chi_4, t), & \varphi \geq \varphi_*^* \end{cases}$$

для областей  $G_z^1$  та  $G_z^2$ , а криві 1\* та 2\* – розв'язку

$$c(\varphi, \psi_4, \chi_4, t) = \begin{cases} c_1(\varphi, \psi_4, \chi_4, t), & \varphi < \varphi_*^* \\ c_2(\varphi, \psi_4, \chi_4, t), & \varphi \geq \varphi_*^* \end{cases}$$

для областей  $G_z^1$  та  $G_z^2$  відповідно в моменти часу  $t = 1 \text{ доба}$  (а) та  $t = 15 \text{ діб}$  (б) за таких початкових та крайових умов:

$$c_1^0(\varphi, \psi, \chi) = c_2^0(\varphi, \psi, \chi) = 0.1 + 0.01 \left( \frac{\varphi_0^2 - \varphi^2}{100} + 1 \right) \text{tg} \left( \frac{\psi^2 + \chi^2}{50} \right), \quad c_*(\psi, \chi, t) = 0.1 +$$



$$+0.01 \operatorname{tg}\left(\frac{\psi^2 + 5t + \chi^2}{50}\right), \quad q_j^0(\varphi, \psi, \chi, r) = k_j \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{100(r - R_j)}{R_j}\right) + 1\right) c_j^0(\varphi, \psi, \chi).$$

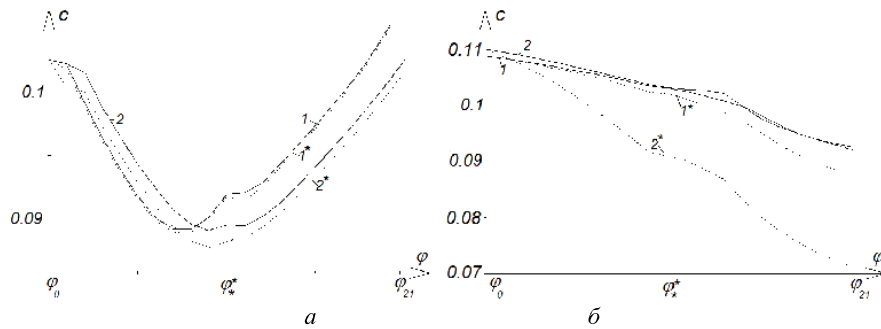


Рис. 4 – Розподіл концентрації забруднюючої речовини вздовж лінії течії  $(\varphi, \psi_4, \chi_4)$  для областей  $G_z^1, G_z^2$ ;  $a$  – в моменти часу  $t=1$  доба,  $b$  – в моменти часу  $t=15$  діб.

На рис. 5 зображено накопичення забруднюючої речовини в мікрочастинках в першому шарі  $q_1(\varphi_5, \psi_1, \chi_4, r, t)$  (рис. 5  $a$ ) та в другому шарі  $q_2(\varphi_{15}, \psi_1, \chi_4, r, t)$  (рис. 5  $b$ ), де  $\varphi_5 = -3.39$ ,  $\varphi_{15} = 4.52$ ,  $\psi_1 = 2.9$ ,  $\psi_4 = 3.14$ ,  $\chi_4 = 0$ . Криві 1 – 3 відповідають значенням концентрації забруднюючої речовини у виділених частинках в моменти часу  $t=1$  доба,  $t=15$  діб,  $t=20$  діб в першому випадку задання коефіцієнтів (область  $G_z^1$ ), а криві 1\* – 3\* – в другому (область  $G_z^2$ ).

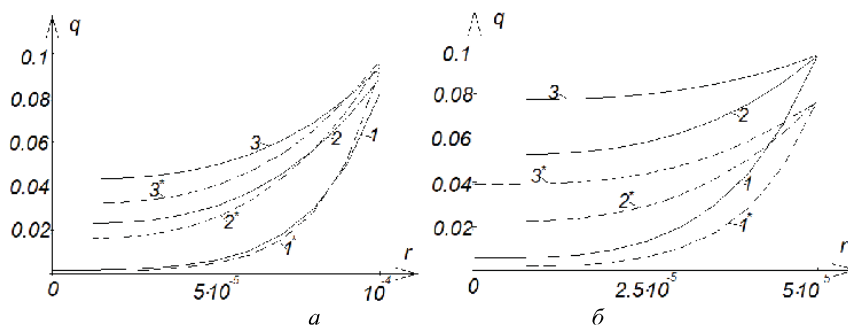


Рис. 5 – Розподіл концентрації забруднюючої речовини в мікрочастинках;  $a$  – в шарі  $q_1(\varphi_5, \psi_1, \chi_4, r, t)$ ;  $b$  – в шарі  $q_2(\varphi_{15}, \psi_1, \chi_4, r, t)$ .

Вплив фізико-хімічних характеристик мікрочастинок на розподіл концентрації забруднюючої речовини в області  $G_z^1$  проілюстровано на рис. 6.

Зокрема досліджено вплив коефіцієнта впливу внутрішньочастинкового переносу на міжчастинковий в першій підобласті  $S_1$  (рис. 6 а) та коефіцієнта адсорбційної рівноваги в першій підобласті  $k_1 = 0.8$  (рис. 6 б) на розподіл концентрації забруднюючої речовини у міжчастинковому просторі за таких вхідних даних:

$$\begin{aligned} \kappa_1 = 0.45 \text{ м/добу}, \quad \kappa_2 = 0.3 \text{ м/добу}, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 0.7, \quad D_1 = D_2 = 0.008 \text{ м}^2/\text{добу}, \\ D_1^* = 10^{-8} \text{ м}^2/\text{добу}, \quad D_2^* = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{добу}, \quad k_2 = 0.9, \quad S_2 = 0.005, \quad \sigma_1^* = \sigma_2^* = 0.3, \\ R_1 = R_2 = 10^{-5} \text{ м}. \end{aligned}$$

Суцільна крива рис. 6 а, б відповідає конвективній складовій процесу (відсутній вплив дифузії та адсорбції пористими мікрочастинками). Крива 1 рис. 6 а відповідає значенню  $S_1 = 0.005$ , крива 2 –  $S_1 = 0.009$ , крива 3 –  $S_1 = 0.012$ , а на рис. 6 б крива 2 відповідає значенню  $k_1 = 0.4$ , крива 2 –  $k_1 = 0.65$ , крива 3 –  $k_1 = 0.87$  вздовж лінії течії  $(\varphi, \psi_4, \chi_4)$  в момент часу  $t = 15$  діб.

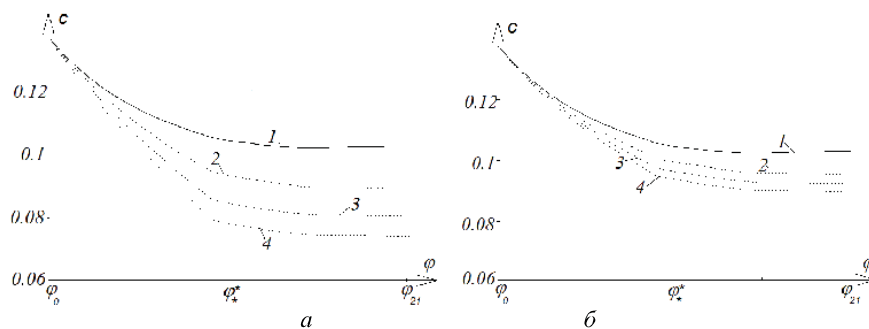


Рис. 6 – Залежність розподілу концентрації забруднюючої речовини в міжчастинковому просторі від фізичних властивостей мікрочастинок; а – вплив коефіцієнту переносу; б – вплив адсорбції рівноваги.

**Висновки.** Зазначимо ефективність такого підходу при проектуванні багатошарових засипних фільтрів з кусково-однорідними нанопористими завантаженнями кожного шару з метою оптимального використання нанопористої засипки. Запропонована методика дозволяє з наперед заданою точністю прогнозувати поширення забруднень в багатошаровому нанопористому середовищі та в значній мірі автономно досліджувати окремі складові процеси. Перспективою дослідження є застосування даного методу для розв'язання відповідних просторових сингулярно збурених задач конвективно-дифузійне масоперенесення багатокомпонентного забруднення в багатошарових середовищах з подвійною пористістю.

**Список літератури:** 1. Булавацький В.М., Кривонос Ю.Г., Скопецький В.В. Некласичні математичні моделі процесів тепло– та масопереносу. – К.: Наукова думка, 2005. – 282с. 2. Бомба А.Я.

Об асимптотическом методе приближенного решения одной задачи массопереноса при фильтрации в пористой среде // Укр. матем. журн. – 1982. – Т.4, №4. – С. 493 – 496. **3. Бомба А.Я., Барановський С.В., Присяжнюк І.М.** Нелінійні сингулярно збудені задачі типу «конвекція-дифузія». – Рівне: НУВГП, 2008. – 254 с. **4. Булычева О.Н., Васильева А.Б., Сушко В.Г.** Асимптотические разложения по малым параметрам решений некоторых задач для параболических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – Т. 31. – 1991. – №9. – С. 1328 – 1337. **5. Сивак В.М., Шепетько Ю.О., Климюк Ю.С.** Математичне моделювання просторових сингулярно збудених процесів масопереносу забруднюючих речовин у двошарових ізотропних насичених пористих середовищах // Вісник Укр. нац. ун-ту водн. госп. та природокорист.: Збірн. наук. праць. Серія "Технічні науки". – Вип. 4 (56). – Рівне : НУВГП, 2011. – С. 37 – 55. **6. Климюк Ю.С., Теслик А.О., Шепетько Ю.О.** Математичне моделювання одного класу просторових нелінійних сингулярно збудених процесів масопереносу забруднюючих речовин у двошарових ізотропних насичених пористих середовищах // Волинський математичний вісник. Серія: прикладна математика. – Вип. 8 (17). – Рівне : РДГУ, 2011. – С. 76 – 91. **7. Петрик М.Р., Фрессард Ж.** Математическое моделирование и визуализация системы многоуровневого массопереноса в неоднородных каталитических средах нанопористых частиц // Проблемы управления и информатики. – 2008. – № 5. – С. 54 – 73. **8. Сергиенко И.В., Дейнека В.С.** Идентификация градиентными методами параметров задач диффузии вещества в нанопористой среде // Пробл. управления и информатики. – 2010. – № 6. – С. 5 – 18. **9. Бомба А.Я., Присяжнюк І.М., Присяжнюк О.В.** Асимптотичний метод розв'язання одного класу модельних сингулярно збудених задач процесу масопереносу в різнопористих середовищах // Доповіді НАН України. – 2013. – № 3. – С. 28 – 34. **10. Бомба А.Я., Присяжнюк І.М., Присяжнюк О.В., Фурсачик О.А.** Обернені сингулярно збудені задачі процесу масопереносу в різнопористих середовищах // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: технічні науки. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2012. – Вип. 7. – С. 3 – 11.

**Bibliography (transliterated):** **1.** Bulavac'kyj, V. M., Ju. H. Kryvonos and V. V. Skopce'kyj. *Neklasychni matematychni modeli procesiv teplo- ta masoperenosu.* Kyiv: Naukova dumka, 2005. Print. **2.** Bomba, A. Ja. "Ob asymptoticheskom metode priblyzhenogo reshenija odnoj zadachi massoperenosu pri fyl'tracii v poristoj srede." *Ukr. matem. zhurn.* Vol. 4. No. 4. 1982. 493–496. Print. **3.** Bomba, A. Ya., S. V. Baranovs'kij and I. M. Prysjazhnjuk. *Nelinijni synguljarno zburjeni zadachi typu "konvekciya-dyfuziya."* Rovno: NUVHP, 2008. Print. **4.** Bulycheva, O. N., A. B. Vasil'eva and V. G. Sushko. "Asimptoticheskie razlozhenija po malym parametram reshenij nekotoryh zadach dlja parabolicheskikh uravnenij." *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.* Vol. 31. No. 9. 1991. 1328–1337. Print. **5.** Sivak, V. M., Ju. O. Shepet'ko and Ju. Je. Klym'juk. "Matematychno modeljuvannja prostорових synguljarno zburjenyh procesiv masoperenosu zabrudnjujuchyh rehovyn u dvosharovyh izotropnyh nasychenyh porystyh seredovyshhah." *Visnyk Ukr. nac. un-tu vodn. gosp. ta pryrodokoryst.: Zbirn. nauk. prac'.* Ser.: *Tekhnichni nauky.* No. 4 (56). Rovno: NUVHP, 2011. 37–55. Print. **6.** Klym'juk, Ju. Je., A. O. Tesljuk and Ju. O. Shepet'ko. "Matematychno modeljuvannja odnogo klasu prostорових nclinijnyh synguljarno zburjenyh procesiv masoperenosu zabrudnjujuchyh rehovyn u dvosharovyh izotropnyh nasychenyh porystyh seredovyshhah." *Volyns'kyj matematychnyj visnyk. Ser.: Prykladna matematyka.* No. 8 (17). Rovno: RDHU, 2011. 76–91. Print. **7.** Petryk, M. R., and Zh. Fressard. "Matematicheskoe modelirovanie i vizualizacija sistemy mnogourovneвого massoperenosu v neodnorodnyh kataliticheskikh sredah nanoporistyh chastic." *Problemy upravlenija i informatiki.* No. 5. 2008. 54–73. Print. **8.** Sergienko, I. V., and V. S. Dejneka. "Identifikacija gradientnymi metodami parametrov zadach diffuzii veshhestva v nanoporistoj srede." *Problemy upravlenija i informatiki.* No.6. 2010. 5–18. Print. **9.** Bomba, A. Ja., I. M. Prysjazhnjuk and O. V. Prysjazhnjuk. "Asymptotychnyj metod rozv'jazannja odnogo klasu model'nyh synguljarno zburjenyh zadach procesu masoperenosu v riznoporystyh seredovyshhah." *Dopovidi NAN Ukrainy.* No. 3. 2013. 28–34. Print. **10.** Bomba, A. Ja., et al. "Oberneni synguljarno zburjeni zadachi procesu masoperenosu v riznoporystyh seredovyshhah." *Matematychno ta komp'juterne modeljuvannja. Ser.: Tekhnichni nauky.* No. 7. Kamenetz-Podolsk: Kam'janec'-Podil's'kyj nacional'nyj univcrsytet imeni Ivana Ogiienka, 2012. 3–11. Print.

Надійшло (received) 10.10.2014