

анализ формирования погрешностей при обработке отверстия с начальной значительной некруглостью // Вісник Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. Петра Василенка. – Харків: ХНТУСГ 2008. – Вип. 68. – С. 119–135. 5. Брижан Т.М. Условия повышения точности обработки отверстий // Инновации, качество и сервис в технике и технологиях: сборник научных трудов 4-ой Международной научно-практической конференции (4–5 июня 2014 г.). В 3-х томах, Том 1. – Курск: Юго-Зап. гос. ун-т, 2014. – С. 104–109.

Bibliography (transliterated): 1. Balakshin, B. S. *Osnovy tehnologii mashinostroenija*. Moscow: Mashinosroenie, 1969. Print. 2. Bobrov, V. F. *Osnovy teorii rezanija metallov*. Moscow: Mashinosroenie, 1975. Print. 3. Kolev, K. S., and L. M. Gorchakov. *Tochost' obrabotki i rezhimy rezanija*. Moscow: Mashinosroenie, 1976. Print. 4. Novikiov, F. V., I. E. Ivanov and I. A. Rjabenkov. "Teoreticheskij analiz formirovaniya pogreshnostej pri obrabotke otverstija s nachal'noj znachitel'noj nekruglostju." *Visnyk Kharkivs'kogo nacional'nogo tehničnogo universytetu sil's'kogo gospodarstva im. Petra Vasylenka*. No. 68. Kharkiv: KhNTUSG, 2008. 119–135. Print. 5. Brizhan, T. M. "Usloviya povyshenija tochnosti obrabotki otverstij." *Sb. nauch. trudov 4-j Mezhdunarodnoj nauchno-praktičeskoj konferencii: Innovacii, kachestvo i servis v tehnikе i tehnologijah*. Vol. 1. 3 vols. Kursk: Yugo-Zap. gos. un-t, 2014. 104–109. Print.

Надійшла (received) 26.08.2014

УДК 532.57:519.63

А.А. БРИЧАК, аспирант, ИПМаш НАНУ, Харьков;

В.А. ВАНИН, д-р техн. наук, проф., ИПМаш НАНУ, Харьков

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К РЕШЕНИЮ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Представлена методика применения метода конечных элементов к решению уравнения теплопроводности. Предложена простая процедура учета граничных условий задачи. Проведено сравнение затрат машинного времени и погрешности расчетов при использовании различных видов элементов, а также различных функций формы. Проведен анализ результатов применения метода конечных элементов в сравнении с конечно-разностными схемами. Продемонстрировано улучшение точности расчетов при измельчении расчетной сетки. Экспериментально подтвержден теоретический порядок аппроксимации при использовании различных функций формы.

Ключевые слова: метод конечных элементов, метод Галёркина, уравнение теплопроводности.

Введение. К дифференциальным уравнениям параболического типа приводят многие задачи математической физики (например, задача о распространении тепла, задачи о диффузии, задачи о фазовом переходе, и др.). Кроме аналитических методов решения указанных задач, широкое распространение получили *численные методы приближенного решения*. Метод конечных элементов является одним из наиболее гибких и экономичных методов приближенного решения указанных задач.

© А. А. Бричак, В. А. Ванин, 2014

Постановка задачи и методы ее решения. Рассмотрим простейшее уравнение параболического типа, описывающее процесс распространения тепла в двумерном однородном пространстве (уравнение теплопроводности)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f, \quad (1)$$

где $u = u(x, y, t)$ – температура; x, y – пространственные координаты; t – время; a^2 – коэффициент температуропроводности; $f = f(x, y, t)$ – функция, определяющая тепловые источники. Для этого уравнения формулируется первая, вторая или третья краевые задачи при $0 \leq t \leq T$.

Будем рассматривать распространение тепла на плоскости в прямоугольнике $0 \leq x \leq b_1, 0 \leq y \leq b_2$. Плотность тепловых источников будем считать нулевой. При помощи замены переменных, x, y и t приводятся к безразмерным величинам, а коэффициент температуропроводности a^2 – к единице, поэтому без ограничения общности можно считать $a = 1, b_1 = b_2 = 1$. Тогда первую краевую задачу для уравнения (1) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, y, 0) &= u_0(x, y), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \\ u(0, y, t) &= u_1(y, t), \quad u(1, y, t) = u_2(y, t), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0, t) &= u_3(x, t), \quad u(x, 1, t) = u_4(x, t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (2)$$

В литературе описаны разнообразные методы решения таких задач. Так, в [2] описан метод разделения переменных, позволяющий получить точное решение задачи в виде бесконечного ряда, используя собственные значения и собственные функции задачи.

Также существует большое количество конечно-разностных схем для приближенного решения таких задач. В [1] приведены примеры явных и неявных схем, а также различных экономичных схем (в частности, *схема переменных направлений*, или *продольно-поперечная*).

В [3] данные задачи решаются методом конечных элементов с использованием *метода Галёркина*, при этом форма полученных уравнений аналогична уравнениям, полученным в работах [4, 5, 6] с помощью вариационной формулировки указанной задачи.

Применение метода конечных элементов. Рассмотрим метод конечных элементов с использованием метода Галёркина, изложенный в [3].

Для применения метода конечных элементов пространственная область, в которой ищется решение, разбивается на отдельные участки – элементы. Форма элементов – различна, наиболее популярными являются треугольные и четырехугольные элементы. При этом допускается разбиение области на элементы различной величины, а также применение криволинейных треугольных или четырехугольных элементов.

Выберем для нашей прямоугольной области четырехугольные элементы – квадраты, как показано на рис. 1.

Буквами A, B, C, D обозначены элементы. Точки, в которых пересекаются ребра элементов, называются узлами сетки, их номера обозначены жирными цифрами. Кроме глобальной нумерации узлов в области, в пределах каждого элемента принимается локальная нумерация узлов (локальный номер узла в элементе обозначается цифрой в скобках).

Функции формы для прямоугольного элемента удобно записывать в локальных координатах, каждая из которых изменяется в пределах $[-1, 1]$. Для элемента с четырьмя узлами в вершинах, заданных координатами $(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_1, y_2)$, можно выписать *билинейные функции формы*:

$$\begin{aligned} N^{(1)} &= 0,25(1-\xi)(1-\eta), \\ N^{(2)} &= 0,25(1+\xi)(1-\eta), \\ N^{(3)} &= 0,25(1+\xi)(1+\eta), \\ N^{(4)} &= 0,25(1-\xi)(1+\eta), \end{aligned} \quad (3)$$

где ξ, η – локальные координаты в пределах данного элемента, которые связаны с исходными координатами в элементе следующим образом:

$$\xi = 2 \frac{x - 0,5(x_2 + x_1)}{x_2 - x_1}, \quad \eta = 2 \frac{y - 0,5(y_2 + y_1)}{y_2 - y_1}. \quad (4)$$

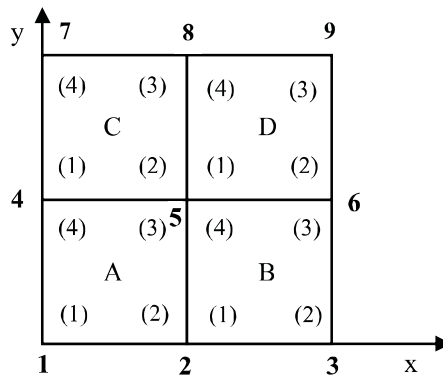


Рис. 1 – Пример разбиения области на четырехугольные элементы.

Поскольку узел 4 принадлежит элементу A и имеет локальный номер (4), а также элементу C и имеет локальный номер (1), функция формы для данного узла (обозначим ее N_4) в элементе A будет равна $N^{(4)}$, а в элементе C – будет равна $N^{(1)}$.

Излагаемый вариант метода конечных элементов состоит в поиске приближенного решения (значений функции) в узлах. После этого приближен-

ное решение внутри каждого элемента можно вычислить с использованием найденных значений искомой функции в четырех узлах элемента, а также функций формы. Так, внутри показанного на рис. 1 элемента A приближенное решение представляется в виде

$$u_a = N^{(1)}u^{(1)} + N^{(2)}u^{(2)} + N^{(3)}u^{(3)} + N^{(4)}u^{(4)}, \quad (5)$$

где $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, u^{(4)}$ – приближенное решение в соответствующих локальных узлах элемента A .

Нетрудно заметить, что в каждый момент времени t приближенное решение внутри всей области можно представить в виде

$$u_a = \sum_{j=1}^N \bar{u}_j(t) N_j, \quad (6)$$

где $\bar{u}_j(t), N_j$ – соответственно приближенное значение функции в момент времени t и функция формы, связанные с глобальным узлом j ; N – количество всех глобальных узлов (в случае, приведенном на рис. 1, $N = 9$).

Применяя метод Галёркина и обозначая скалярное произведение двух функций f и g как (f, g) , запишем исходное уравнение теплопроводности (2) в слабой форме:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, N_k\right) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, N_k\right) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, N_k\right) = 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad (7)$$

то есть в виде N дифференциальных уравнений, получаемых путем скалярного произведения уравнения (2) на функцию формы N_k , связанную с каждым глобальным узлом области.

Поскольку используемые в данном методе конечные элементы гарантируют междуэлементную непрерывность только искомой функции и не гарантируют непрерывности ее производных, важным этапом расчетов является понижение степени производной в скалярных произведениях вида

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, N_k\right), \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, N_k\right), \quad (8)$$

для чего используется *теорема Остроградского-Гаусса* с учетом того, что поток тепла через границу области отсутствует, т.к. решается первая краевая задача. После этого в полученную систему (7) подставляется представление температуры u_a в виде (6), и после несложных преобразований получается следующая система дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных значений искомой функции в узлах сетки:

$$\sum_{j=1}^N (N_j, N_k) \frac{d\bar{u}_j}{dt} + \sum_{j=1}^N \left\{ \left(\frac{\partial N_j}{\partial x}, \frac{\partial N_k}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial N_j}{\partial y}, \frac{\partial N_k}{\partial y}\right) \right\} \bar{u}_j = 0, \quad k = \overline{1, N}. \quad (9)$$

Систему (9) удобно записывать в матричной форме:

$$M(d\bar{u}/dt) + H\bar{u} = 0, \quad (10)$$

где M – матрица масс; H – матрица жесткости; \bar{u} – вектор-столбец значений функции в узлах сетки. Заметим, что матрицы M и H являются симметричными в силу свойств операции скалярного произведения.

Для приближенного решения данной системы можно воспользоваться схемой Крэнка-Никольсона, заменив производную по времени разностным отношением

$$\frac{d\bar{u}_j}{dt} = \frac{1}{\Delta t} (\bar{u}_j^{-(n+1)} - \bar{u}_j^{-(n)}), \quad (11)$$

а значения \bar{u}_j – на

$$\bar{u}_j = 0,5(\bar{u}_j^{-(n+1)} + \bar{u}_j^{-(n)}), \quad (12)$$

где Δt – величина шага по времени; $\bar{u}_j^{-(n)}$ и $\bar{u}_j^{-(n+1)}$ – значения температуры в узле с глобальным номером j на текущем и следующем слое по времени.

Окончательно получим для нахождения значений \bar{u} на следующем слое по времени систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\left(\frac{1}{\Delta t}M + 0,5H\right)\bar{u}^{-(n+1)} = \left(\frac{1}{\Delta t}M - 0,5H\right)\bar{u}^{-(n)}. \quad (13)$$

Обозначив матрицу $\left(\frac{1}{\Delta t}M + 0,5H\right)$ через B , а матрицу $\left(\frac{1}{\Delta t}M - 0,5H\right)$ – через C , запишем систему (13) в виде

$$B\bar{u}^{-(n+1)} = C\bar{u}^{-(n)}. \quad (14)$$

Таким образом, задаваясь начальными условиями и решая на каждом слое по времени систему (14), можно вычислить приближенные значения функции в узлах области в искомый момент времени T . Приближенное решение в любой точке области получается далее с использованием формулы (6).

Особенности компьютерной реализации алгоритма. При нахождении скалярных произведений для построения матриц M и H необходимо учитывать, в каком количестве элементов эти два узла «соседствуют».

Так, два узла с глобальными номерами 2 и 5 на рис. 1 являются для элемента A узлами с локальными номерами (2) и (3) с функциями формы $N^{(2)}$ и $N^{(3)}$ соответственно, а для элемента B – узлами с локальными номерами (1) и (4) с функциями формы $N^{(1)}$ и $N^{(4)}$. Поэтому для получения элемента $m_{2,5}$ матрицы масс M скалярное произведение (N_2, N_5) будет рассчитываться так:

$$(N_2, N_5) = \underbrace{(N^{(2)}, N^{(3)})}_{\text{в элементе } A} + \underbrace{(N^{(1)}, N^{(4)})}_{\text{в элементе } B}. \quad (15)$$

Аналогично, скалярное произведение вида (N_5, N_5) будет рассчитываться уже в пределах четырех элементов A, B, C, D .

Такие же соображения должны применяться и при расчете элементов матрицы H .

В случае применения четырехугольных элементов с билинейными функциями формы, а также линейных треугольных элементов несложно получить аналитические выражения для элементов матриц M и H ; указанные матрицы приведены в явном виде, например, в [4]. Однако уже в случае прямоугольных элементов с квадратичными функциями формы (то есть, каждый элемент определяется восемью узлами) для получения необходимых элементов матриц M и H потребуется найти значения около 200 интегралов, что затруднительно сделать без использования вычислительной техники. При компьютерной реализации указанных алгоритмов можно вычислять элементы матриц M и H с применением численного интегрирования. Эти методы подробно рассмотрены в литературе.

В рассматриваемом случае поиска решения для первой краевой задачи необходимо отдельно остановиться на учете граничных условий. Поскольку значения функции в узлах, находящихся на границе области (обозначим количество таких узлов через K), задаются в каждый момент времени граничными условиями, то система линейных алгебраических уравнений (14) содержит $N-K$ неизвестных. А значит, чтобы эта система была определенной, достаточно иметь $N-K$ уравнений. Данные уравнения можно получить, если в выражениях для слабой формы уравнения теплопроводности (7) оставить $N-K$ уравнений, отвечающих скалярному произведению уравнения теплопроводности только на функции формы, соответствующие внутренним узлам сетки, в которых решение неизвестно. Тогда необходимые $N-K$ уравнений системы (14) могут быть представлены в виде

$$\mathbf{V}' u_{\text{внутр}}^{-(n+1)} + \mathbf{V}'' u_{\text{внеш}}^{-(n+1)} = C' u^{-(n)}, \quad (16)$$

где \mathbf{V}' – квадратная матрица – часть матрицы B , полученная вычеркиванием из нее всех строк и столбцов, соответствующих внешним узлам; \mathbf{V}'' – часть матрицы B , полученная вычеркиванием из нее всех строк, соответствующих внешним узлам, и всех столбцов, соответствующих внутренним узлам; C' – часть матрицы C , полученная вычеркиванием из нее всех строк, соответствующих внешним узлам; $u_{\text{внутр}}^{-(n+1)}$ и $u_{\text{внеш}}^{-(n+1)}$ – части вектора $u^{-(n+1)}$, соответствующие внутренним и внешним узлам.

После обращения матрицы \mathbf{V}' решение системы (16) запишется в виде

$$u_{\text{внутр}}^{-(n+1)} = (\mathbf{V}')^{-1} (-\mathbf{V}'' u_{\text{внеш}}^{-(n+1)} + C' u^{-(n)}). \quad (17)$$

Учитывая соотношения (17), получение решения становится особенно простым. Поскольку матрицы B и C не меняются во времени, достаточно найти матрицы $(\mathbf{V}')^{-1}$, \mathbf{V}'' и C' один раз, в самом начале расчетов, а дальше в каждый момент времени, зная значения векторов $u_{\text{внеш}}^{-(n+1)}$ и $u^{-(n)}$, получать искомое решение путем применения соотношений (17).

Обратную матрицу можно находить *методом Жордано-Гаусса*, однако

уже для 10^3 узлов время работы программы (на персональном компьютере) составляет несколько минут. Так как в реальных задачах используются сетки с количеством узлов порядка 10^6 , необходимо повысить скорость расчетов, что можно сделать путем применения приближенных методов решения систем алгебраических уравнений. Такие методы будут особенно эффективными, учитывая тот факт, что матрицы являются блочно-диагональными и сильно разреженными (так, для области с 10^3 узлов общее количество элементов матрицы будет 10^6 , из которых только порядка 10^4 элементов будут ненулевыми).

Анализ полученных результатов. Применение метода конечных элементов было проверено на задаче (2), в которой начальное и граничные условия заданы следующим образом:

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \\ u(0, y, t) &= u(1, y, t) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 1, t) &= 0, \quad u(x, 0, t) = t \sin \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (18)$$

Точное решение данной задачи получено методом разделения переменных в виде бесконечного ряда

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= (1-y)t \sin \pi x - \\ &- \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{1}{j\pi\lambda_{1j}} V_{1j}(x, y) \left(\left(1 - \frac{\pi^2}{\lambda_{1j}^2}\right) (1 - e^{-\lambda_{1j}t}) + \pi^2 t \right) \right], \end{aligned} \quad (19)$$

где $V_{1j}(x, y) = 2 \sin(\pi x) \sin(j\pi y)$ – собственные функции; $\lambda_{1j} = \pi^2 + (j\pi)^2$ – собственные значения задачи.

Приближенное решение отыскивалось для момента времени $t=1$ методом конечных элементов. Были выбраны треугольные конечные элементы первого порядка (элемент построен на трех узлах), прямоугольные элементы с билинейными функциями формы (элемент построен на четырех узлах), а также прямоугольные элементы с квадратичными функциями формы (элемент построен на восьми узлах). Шаг по времени выбирался достаточно малым, чтобы уменьшить погрешность аппроксимации. Обращение матриц производилось методом Жордано-Гаусса. При этом сравнивалось машинное время, затрачиваемое на вычисления при различной степени измельчения анализируемой области, и среднеквадратичная погрешность вычислений σ , вычисляемая по формуле:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N (u_j - \bar{u}_j)^2}{N}}, \quad (20)$$

где u_j, \bar{u}_j – соответственно точное и приближенное решение задачи в узле с

глобальным номером j ; N – количество узлов, для которых рассчитывалось приближенное решение (учитываются только внутренние узлы).

Для сравнения такие же расчеты проводились методом конечных разностей (использовалась продольно-поперечная схема).

Результаты представлены на графиках (рис. 2 и рис. 3).

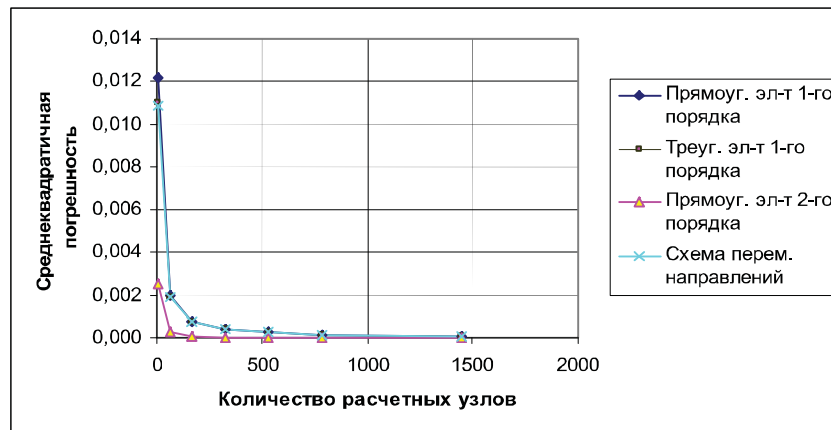


Рис. 2 – Среднеквадратичная погрешность расчетов.

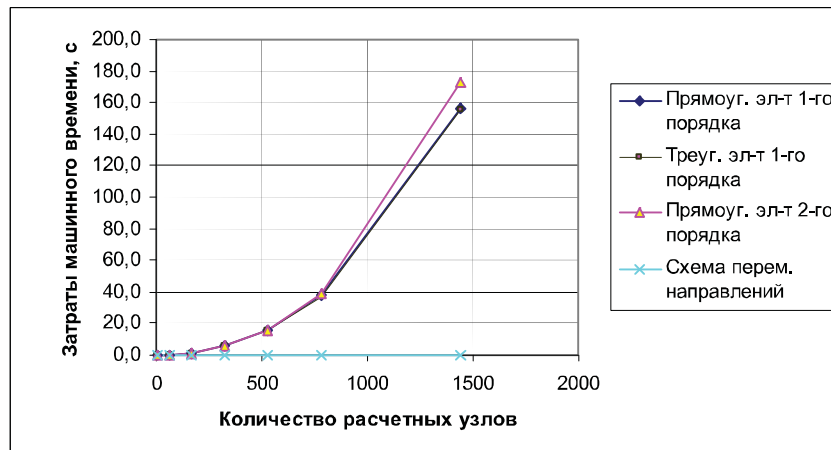


Рис. 3 – Затраты машинного времени.

Видно, что погрешность вычислений очень быстро убывает при увеличении числа узлов, причем точность вычислений с применением квадратичных функций формы значительно превышает точность с применением эле-

ментов с билинейными функциями формы, при сопоставимых затратах машинного времени. Как и ожидалось исходя из данных, приведенных в [3], погрешность аппроксимации при расчетах с использованием элементов с билинейными функциями формы является величиной порядка $O(h^2)$, где h – характерный размер элемента, а при использовании элементов с квадратичными функциями формы – $O(h^3)$.

Результаты применения треугольных элементов первого порядка и прямоугольных элементов с билинейными функциями формы одинаковы как по точности вычислений, так и по затратам машинного времени. В реальных расчетных задачах способ выбора формы элемента связан, прежде всего, с удобством разбиения области.

Необходимо отметить, что метод конечных элементов с применением квадратичных функций формы дает в сравнении с продольно-поперечной схемой примерно одинаковую точность вычислений при одинаковом времени, однако для этого в продольно-поперечной схеме приходится значительно сильнее измельчать расчетную область, что не всегда является целесообразным, а иногда и невозможным. Поэтому метод конечных элементов с применением квадратичных функций формы является более универсальным и применимым для широкого круга задач.

Выводы. Рассмотренная схема решения параболических задач с применением метода конечных элементов показала высокую точность расчетов, сравнимую с экономичными разностными схемами, при сопоставимых затратах машинного времени. Показано, что точность расчетов значительно улучшается с измельчением сетки, а также с применением элементов с квадратичными функциями формы.

Список литературы: 1. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, – 1971. – 553 с. 2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, – 1977. – 735 с. 3. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина. – М.: Мир, 1988. – 352 с. 4. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, – 1979. – 392 с. 5. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, – 1975. – 541 с. 6. Zienkiewicz O.C. The finite element method. Volume 1: The basis / O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. – Great Britain: Butterworth-Heinemann, – 2000. – 689 p.

Bibliography (transliterated): 1. Samarskij, A. A. *Vvedenie v teoriju raznostnyh shem*. Moscow: Nauka, 1971. Print. 2. Tihonov, A. N., and A. A. Samarskij. *Uravnjenja matematicheskoj fiziki*. Moscow: Nauka, 1977. Print. 3. Fletcher, K. *Chislennye metody na osnove metoda Galjorkina*. Moscow: Mir, 1988. Print. 4. Segerlind, L. *Primenenie metoda konechnyh jelementov*. Moscow: Mir, 1979. Print. 5. Zenkevich, O. *Metod konechnyh jelementov v tehnikе*. Moscow: Mir, 1975. Print. 6. Zienkiewicz, O. C., and R. L. Taylor. *The finite element method*. Vol. 1: The basis. Great Britain: Butterworth-Heinemann, 2000. Print.

Поступила (received) 27.10.2014