

ской теории накопления повреждений в элементах и узлах клапана в процессе отработки ресурса. На примере клапана с электромагнитным поляризованным двухпозиционным приводом рассмотрено применение разработанных моделей для определения ресурсных возможностей клапана на этапе его проектирования.

Ключевые слова: электромагнитный клапан, стохастическая модель, эксплуатационные изменения, техническое состояние, разрушение, отказ, ресурс, критический элемент.

UDC 621.646.4

Mathematical modeling of operational changes of the technical state of small-size electromagnetic pneumatic valves / G. I. Zaionchkovskiy, Ya. B. Fedorychko // Bulletin of National Technical University «KhPI.» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 67 – 81. Bibliog.: 11 titles. – ISSN 2222-0631.

Mathematical models of small-size electromagnetic pneumatic valve technical state operational changes were developed using the stochastic theory of damage accumulation in the elements and units of a valve in the process of the resource exploitation. A valve with electromagnetic polarized two-position drive was used to demonstrate application of the developed models for definition of the resource possibilities of a valve at the designing phase.

Key words: electromagnetic valve, stochastic model, operational changes operational changing, technical state, destruction, rejection, resource, critical element.

УДК 681.526

Ю.С. КОЗЬМИН, канд. техн. наук, науч. сотр., ИСМА НАНУ, Харьков

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССАМИ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ

Рассматриваются вопросы управления процессами выращивания скнтилляционных кристаллов. Кристаллизатор, как объект управления, представляется системой с распределенными параметрами. В качестве физической модели рассмотрен стержень с одномерным распределением физических свойств и температурных полей. Получена система уравнений в пространстве состояний. Построен алгоритм управления температурным полем объекта при перемещении кристаллизатора внутри установки. Приведены способы стабилизации температуры в заданной точке пространства при перемещении объекта. Полученные методики служат тестовыми для изучения процессов управления объектами на основе более сложных физических моделей.

Ключевые слова: система с распределенными параметрами, управление, стабилизация, температурное поле.

Введение. Скнтилляционные кристаллы получили большое распространение при использовании в качестве детекторов ионизирующего излучения. Для совершенствования и интенсификации технологического процесса выращивания скнтилляционных кристаллов необходимо понимание процессов, происходящих в рабочем объеме. В то же время, физические поля, возникающие в ампуле, можно оценить только косвенно. В этом случае только математическое моделирование позволяет технологам целенаправленно

повышать производительность ростовых установок при сохранении качества полученной продукции и снижении энергетических затрат.

В практических задачах автоматического управления особое место занимает проблема управления ростом кристаллов. В общей постановке объект управления представляет собой многомерный объект, который характеризуется многосвязностью переменных, нелинейностью, нестационарностью и стохастичностью. Все это в условиях недостатка информации о возмущающих воздействиях и ограниченностью контроля основных переменных существенно затрудняет использование подходов классической теории автоматического управления. Широкие возможности в этой области представляют методы современной теории автоматического управления: *адаптивные, с прогнозирующими моделями* (MPC – Model predictive control)[1], а также *интеллектуальные* [2]. Следует подчеркнуть, что, ни один из методов не является универсальным.

Задача стабилизации заранее заданных распределений температур является типичной для термических установок выращивания кристаллов [3 – 5]. В ряде теоретических и экспериментальных работ установлено, что рациональная организация тепловых полей позволяет существенно увеличить отвод тепла от зоны кристаллизации, а соответственно и повысить производительность ростовой установки [6]. Одним из возможных путей решения этой проблемы является управление тепловыми потоками в расплаве на основе изменения формы теплового поля на внешнем контуре контейнера. При этом, в зависимости от градиентов температурного поля и физических свойств материала, расплав может оставаться в равновесии, либо могут возникать естественноконвективные движения расплава, переходящие от ламинарных потоков к турбулентным [7]. В этом случае моделирование осуществляется на основе уравнений механики жидкости. В выращенном кристалле управление тепловым полем позволяет достигать снижения тепловых напряжений, чтобы избежать растрескиваний. Эта задача решается на основании уравнений механики деформированного тела и применения методов механики разрушения.

Целью данной работы является поиск таких управляющих воздействий, которые позволят сформировать и поддерживать заданное распределение температуры объекта с требуемой точностью, на основе математической модели ростовой установки, построенной с использованием физически обоснованных упрощающих гипотез. Необходимо отдельно отметить тот факт, что в роли управляемой величины следует рассматривать все пространственное распределение функции состояния объекта. Подобные системы получили название *систем с распределенными параметрами* [8].

При этом предполагается, что результаты, полученные на простых моделях, могут быть полезны для понимания физических процессов и, в дальнейшем, могут быть обобщены на более сложные случаи.

Моделирование температурного поля в кристаллизаторе. Одним из

широко применяемых методов выращивания кристаллов из расплава является метод Бриджмена-Стокбаргера. Контейнер с расплавом медленно опускается в тепловую камеру, разделенную диафрагмой на две температурные области. В верхней части камеры температура поддерживается выше точки кристаллизации расплава, а в нижней части, соответственно ниже точки кристаллизации (рис. 1). Кристаллизация происходит в зоне диафрагмы, где создается температурный градиент. Для успешного проведения процесса необходимо поддерживать резкий температурный перепад на границе растущего кристалла (*фронт кристаллизации*) и высокую температуру расплава [6].

Общая задача моделирования тепловых процессов в ростовой установке распадается на две составляющие задачи: внешний и внутренний теплообмен.

К внешнему теплообмену в теплотехнике относят процессы переноса тепла, происходящие в рабочем пространстве установки и приводящие к поступлению тепла на внешнюю поверхность тигля или к отводу тепла от этой поверхности в случае охлаждения.

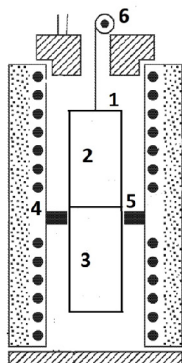


Рис. 1 – Схема установки для выращивания монокристаллов по методу Бриджмена-Стокбаргера.

1 – контейнер; 2 – расплав; 3 – монокристалл; 4 – нагреватель; 5 – тепловая диафрагма; 6 – механизм опускания контейнера с веществом.

Кристаллизатор (контейнер с находящимся внутри расплавленным кристаллизующим материалом) представляет собой сложный объект для физического моделирования.

Вначале, когда колба с материалом находится в верхней зоне, происходит плавление исходного сырья, затем, по мере опускания в холодную зону, в районе диафрагмы происходит кристаллизация с выделением тепла. В нижней, низкотемпературной зоне, происходит охлаждение и последовательное снижение температуры (отжиг). Существенно на процессы кристаллизации влияют теплофизические свойства материала контейнера. При этом карти-

Под внутренним теплообменом обычно понимают процесс распространения тепла в кристаллизаторе. Эта задача формулируется в виде уравнения теплопроводности с соответствующими краевыми (начальными и граничными) условиями [9].

Для управления процессом необходимо получить систему уравнений в канонической форме, именуемой *моделью в пространстве состояний* (приведена ниже). Как правило, для таких сложных объектов модели получают на основе обработки экспериментальных данных, с помощью регрессионных методов [1].

В данной работе рассмотрим подход, основанный на физическом моделировании процесса. Кристалли-

на распределения температур на внутренней поверхности тигля может существенно отличаться от распределения температур на внешней поверхности из-за перетока тепла вдоль контейнера в нижнюю часть кристаллизатора.

В качестве модели объекта управления в данной работе рассматривается стержень длиной L , характеризующийся одномерным распределением теплофизических свойств по независимой пространственной переменной x . Температура $T(x, t)$ поддерживается нагревателями, создающими тепловое поле вокруг стержня.

При моделировании температурного поля стержня конечной длины используется уравнение теплопроводности [10, 11]:

$$c\rho \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\alpha^B(x) \cdot S}{V} [T(x, t) - T^{OC}(x, t)] + F(x, t) \quad (1)$$

с граничными условиями:

$$\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = \alpha^{T(x=0)} \cdot S^T \cdot [T(0, t) - T^{OC}(0, t)], \quad (2)$$

$$\lambda \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = -\alpha^{T(x=L)} \cdot S^T \cdot [T(L, t) - T^{OC}(L, t)] \quad (3)$$

и начальными условиями:

$$T(x, 0) = T^{OC}(x). \quad (4)$$

Здесь λ – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К); c – удельная теплоемкость, Дж/(кг·К); ρ – плотность, кг/м³; α^B и α^T – коэффициенты теплоотдачи боковой и торцевой поверхностей, Вт/(м²·К); S – площадь боковой поверхности стержня, м²; S^T – площадь торцевой поверхности стержня, м²; V – объем стержня, м³; $T^{OC}(x, t)$ – температура окружающей среды, К.

Функция $F(x, t)$ характеризует удельную мощность внутренних источников тепла. Для процессов роста кристаллов под внутренними источниками мы понимаем процессы выделения скрытой теплоты кристаллизации на границе раздела фаз, поглощенную энергию инфракрасного излучения нагревателей или энергию дополнительных внутренних нагревателей (например, при ОТФ – методе [32]).

Для данной модели ростовой установки примем:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} - kT(x, t) + kT^{OC}(x, t) + \bar{F}(x, t), \quad (5)$$

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} + k_1 T(0, t) = k_1 T^{OC}(0, t), \quad (6)$$

$$\frac{\partial T(L, t)}{\partial x} + k_2 T(L, t) = k_2 T^{OC}(L, t), \quad (7)$$

где $a = \lambda / (c\rho)$, $k = (\alpha^B S) / (Vc\rho)$, $k_U = P^H / (Vc\rho)$, $\bar{F}(x, t) = F(x, t) / (c\rho)$,

$$\bar{F}(x, t) = F(x, t) / (c\rho), \quad k_2 = \alpha^{T(x=L)} \cdot S^T / \lambda.$$

Решение методом конечных интегральных преобразований. Для решения поставленной задачи применим *метод конечных интегральных преобразований*. С его помощью удается построить физически прозрачные модельные представления, что оказывается полезным для последующего решения задач управления объектами с распределенными параметрами. Однако необходимо отметить, что эффективность метода интегральных преобразований ограничивается классом линейных моделей для простых форм областей изменения пространственных аргументов [8].

Метод применяется для дифференциальных уравнений вида

$$A_1(x,t) \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = C(x,t) \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} + B_1(x,t) \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + C_1(x,t)Q(x,t) + f(x,t,u(x,t)) \quad (8)$$

с краевыми и начальными условиями

$$\alpha(x_0,t)Q(x_0,t) + \beta(x_0,t) \frac{\partial Q(x_0,t)}{\partial x} = g_0(t, u_0(t)), \quad t > 0, \quad (9)$$

$$\alpha(x_1,t)Q(x_1,t) + \beta(x_1,t) \frac{\partial Q(x_1,t)}{\partial x} = g_1(t, u_1(t)), \quad t > 0, \quad (10)$$

$$Q(x,0) = Q_o^{(0)}(x), \quad \frac{\partial Q(x,0)}{\partial t} = Q_o^{(1)}(x), \quad x \in (x_0, x_1). \quad (11)$$

В общем случае конечное интегральное преобразование изначально рассматривается в виде

$$Q(\mu,t) = \int_{x_0}^{x_1} Q(x,t) \cdot \phi(\mu,x) \cdot r(x) dx \quad (12)$$

с ядром преобразования $\phi(\mu,x)$, которое является решением однородного уравнения:

$$C(x,t) \frac{\partial^2 \phi(\mu,x)}{\partial x^2} + B_1(x,t) \frac{\partial \phi(\mu,x)}{\partial x} + C_1(x,t)\phi(\mu,x) = -\mu^2 \phi(\mu,x) \quad (13)$$

параметром μ и весовой функцией $r(x)$:

$$r(x) = \frac{1}{C(x)} \exp \left[\int_{x_0}^{x_1} \frac{B_1(x)}{C(x)} dx \right]. \quad (14)$$

Ядро преобразования $\phi(\mu,x)$ находится из решения соответствующей системе (8) – (11) *краевой задачи Штурма-Лиувилля*. Эта задача, иначе называемая *спектральной задачей*, имеет отличные от нуля решения только при определенных вещественных значениях параметра μ , называемых *собственными значениями*. Собственные значения μ_n ($n = 1, 2, \dots$) образуют возрастающую последовательность (*спектр собственных чисел*). Каждому собственному числу соответствует собственная функция $\phi_n(x)$, определяемая с точностью до постоянного множителя. Система собственных функций

$[\phi_n(x)]$ ортогональна с весом $r(x)$ на промежутке $[x_0, x_1]$ и образует полную систему функций в смысле *среднеквадратичного приближения* [8].

Таким образом, всякая функция состояния рассматриваемого объекта при некоторых допущениях может быть представлена ее разложением в сходящийся в среднем ряд по ортогональной системе собственных функций (*ряд Фурье*):

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) \cdot \phi_n(x). \quad (15)$$

Сходимость в среднем означает, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{x_0}^{x_1} [(Q(x, t) - \sum_{n=1}^N Q_n(t) \cdot \phi_n(x))^2] dx = 0. \quad (16)$$

Это позволяет ограничиться конечным числом гармоник, исходя из удовлетворительной аппроксимации $Q(x, t)$.

Для данной задачи удастся получить компактную систему разрешающих уравнений относительно невысокого порядка (по сравнению с сеточными методами). Это, в дальнейшем, позволит использовать классические методы теории управлений в пространстве состояний.

Ядро преобразования $\phi(\mu, x)$ находится из решения соответствующей системе (8) – (11) краевой задачи Штурма-Лиувилля вида [5]:

$$\phi''(\mu, x) = -\mu^2 \phi(\mu, x), \quad (17)$$

с граничными условиями:

$$\phi'(\mu, 0) + k_1 \phi(\mu, 0) = 0; \quad \phi'(\mu, L) + k_2 \cdot \phi(\mu, L) = 0. \quad (18)$$

Весовая функция на основании формулы (13) принимает вид:

$$r(x) = 1/a. \quad (19)$$

Решение уравнения (13) имеет вид:

$$\phi(\mu, x) = A \cdot \sin(\mu \cdot x) + B \cdot \cos(\mu \cdot x). \quad (20)$$

Подставляя соотношения (15) – (16) в (14) получим *характеристическое уравнение*:

$$\operatorname{tg}(\mu \cdot L) = \mu \cdot (k_2 - k_1) / (\mu^2 + k_1 \cdot k_2), \quad (21)$$

имеющее бесконечное число собственных значений μ_n ($n = 1, 2, \dots$). Каждому собственному значению соответствует собственная функция $\phi_n(x)$, определяемая решением задачи (17) – (19) с точностью до постоянного множителя. Система собственных функций образует ортогональную систему:

$$\phi_n(x) = \cos(\mu_n \cdot x) - \frac{k_1}{\mu_n} \sin(\mu_n \cdot x), \quad (22)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \phi_m(x) \cdot \phi_n(x) \cdot r(x) dx = \begin{cases} E_n^2, & m = n; \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \quad (23)$$

Здесь E_n^2 – квадрат нормы собственных функций.

В дальнейшем, при редукции системы уравнений будем использовать

нормированную систему собственных функций $\phi_n^*(x) = \phi_n(x) / E_n$.

Применим метод конечных интегральных преобразований к системе (5) – (7). Учитывая, что:

$$T_n(t) = \int_{x_0}^{x_1} T(x,t) \cdot \phi_n^*(x) \cdot 1/a \cdot dx \quad (25)$$

и, применяя интегрирование по частям, перейдем к системе разрешающих уравнений для поставленной задачи о распределении температуры в стержне:

$$\frac{dT_n(t)}{dt} = A_{nn}T_n(t) + kT_n^{OC}(t) + \bar{F}_n(t) + [k_1T^{OC}(L,t) \cdot \phi_n(L) - k_1T^{OC}(0,t) \cdot \phi_n(0)], \quad (26)$$

$$A_{nn} = -(a\mu_n^2 + k),$$

где $n = 1 \dots N$.

Приближенное решение исходной системы (5) – (7) описывается суммой первых N членов разложения $T(x,t)$ по системе собственных функций $\phi_n^*(x)$:

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^N T_n(t) \cdot \phi_n^*(x). \quad (27)$$

В практических задачах количество членов разложения N , а соответственно и порядок разрешающей системы уравнений (26), определяется сравнением приближений $T(x,t)$ с последовательно увеличивающимися значениями N .

Воздействия $\bar{F}_n(t)$ в уравнении объекта (26), реализуемые обычно за счет внутренних источников энергии или вещества, называют *внутренними управлениями* [8].

Управляющие воздействия

$$[k_1T^{OC}(L,t) \cdot \phi_n(L) - k_1T^{OC}(0,t) \cdot \phi_n(0)] \text{ и } kT_n^{OC}(t)$$

в уравнении (26) называют *граничными управлениями* (управлениями по граничным условиям). Они характеризуют целенаправленное воздействие со стороны окружающей среды на границе пространственной области.

Составляющие граничных управлений в квадратных скобках, сконцентрированные в точках x_0 и x_1 на границах отрезка $[x_0, x_1]$, представляют собой сосредоточенные воздействия, которые изменяются во времени.

Результаты расчетов. Рассмотрим распределение температурного поля в стальном стержне с размерами $L = 0,3$ м; $r = 0,03$ м; $L_2 = 0,4$ м; $L_0 = 0,2$ м.

Примем, что температура в камере распределена по закону (см. на рис. 3 сплошную линию):

$$T^{OC}(x,t) = \begin{cases} T_1, & L_2 + L_0 < x < L; \\ T_2 + (x - L_2) \cdot (T_1 - T_2) / L_0, & L_2 < x < L_2 + L_0; \\ T_2, & 0 < x < L_2. \end{cases} \quad (28)$$

Где $T_1 = 150^\circ\text{C}$ и $T_2 = 50^\circ\text{C}$ – температуры в высоко- и низкотемпературной зоне. Для углеродистой стали $\lambda = 50\text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$; $c = 460\text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$; $\alpha^T = 27\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$ (воздух). В этом случае решение трансцендентного уравнения (15) при $n = 8$ дает следующий спектр:

$$\mu_m = 0,10089; 10,472; 20,944; 31,416; 41,888; 52,360; 62,832; 73,4.$$

Первые четыре ортонормированные базисных функции представлены на рис. 2. Аппроксимация заданного распределения температуры в камере при различных значениях n представлена на рис. 3.

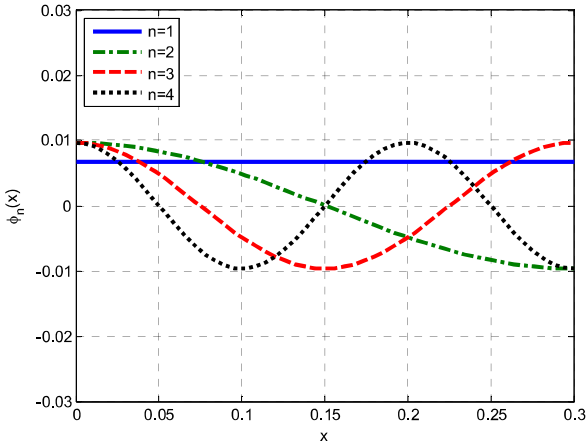


Рис. 2 – Базисные функции ($n = 1, 2, 3, 4$).

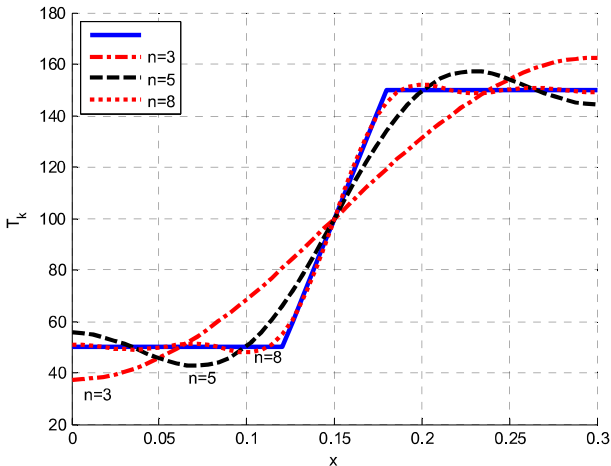


Рис. 3 – Аппроксимация заданного распределения температуры в камере с помощью конечного разложения по базисным функциям ($n = 3, 5, 8$).

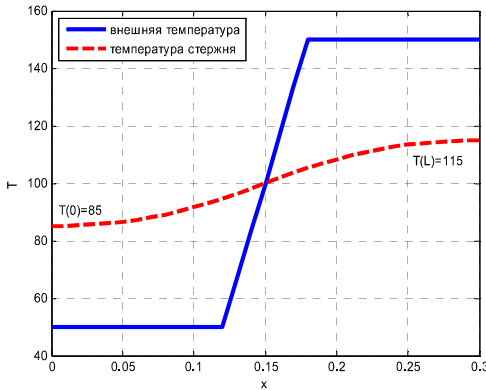


Рис. 4 – Распределение температуры в стержне (пунктир) при заданном распределении внешней температуры (сплошная линия).

Решение задачи о распределении температуры в стержне в квазистационарной постановке ($dT_n(t)/dt = 0$) проиллюстрировано пунктирной линией на рис. 4.

Модель системы управления в пространстве состояний. Математическая модель объекта управления представлена системой уравнений(26). Обычно в теории управления уравнения, описывающие поведение управляемого объекта, записываются в следующей канонической форме (уравнения в пространстве состояний):

$$\frac{d\vec{T}(t)}{dt} = A \cdot \vec{T}(t) + B \cdot \vec{u}(t), \quad \vec{T}(0) = \vec{T}_0, \quad (29)$$

где $\vec{T}(t) \in R^n$ – N -мерный вектор состояния системы с составляющими $T_i(t)$, $i = 1 \dots N$, \vec{T}_0 – его начальное состояние; $\vec{u}(t) \in R^P$ – P -мерный вектор управления.

Предполагается, что распределение температуры в стержне реализуется с помощью заданного распределения температур в камере:

$$T(x) = \begin{cases} T^{1K}, & L_2 + L_0 < x < L; \\ T^{2K} + (x - L_2) \cdot (T^{1K} - T^{2K}) / L_0, & L_2 < x < L_2 + L_0; \\ T^{2K}, & 0 < x < L_2. \end{cases} \quad (30)$$

Здесь T^{1K} и T^{2K} температуры в верхней и нижней зонах камеры соответственно. В этом случае под компонентами вектора управления мы понимаем температуры в зонах:

$$u_1(t) = T^{1K}(t) \text{ и } u_2(t) = T^{2K}(t). \quad (31)$$

Матрица системы A диагональная и ее элементы можно представить в виде:

$$A_{ij} = \begin{cases} -(k + a \cdot \mu_i^2), & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (32)$$

Далее рассмотрим несколько простейших случаев нахождения управлений температурным полем для квазистационарного случая.

Для рассматриваемой системы, при $N = 5$, матрицы системы (29) имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} -2,97 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,83 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6,41 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1,41 \cdot 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2,4710 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 4.0905 \cdot 10^{-2} & 4.0905 \cdot 10^{-2} \\ -3.6231 \cdot 10^{-2} & 3.6231 \cdot 10^{-2} \\ 1.7834 \cdot 10^{-5} & 1.7834 \cdot 10^{-5} \\ 1.0517 \cdot 10^{-2} & -1.0517 \cdot 10^{-2} \\ 1.6737 \cdot 10^{-5} & 1.6737 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}.$$

Нахождение температур зон для заданного распределения температур. Полученная система уравнений (19) позволяет решать обратную задачу: о нахождении значений температур зон тепловой камеры для заданного распределения температур стержня $T^*(x)$. В квазистационарном случае система уравнений (19) принимает вид;

$$B \cdot \vec{u} + A \cdot \vec{T}^* = 0. \quad (33)$$

Данная задача относится к *переобусловленным системам* [12], то есть к таким системам, в которых число уравнений больше числа неизвестных. Решение подобной задачи называют *квазирешением* и получают из условия минимума невязки при условии близости к некоторому заданному решению \vec{u}_0 :

$$(B \cdot \vec{u} + A \cdot \vec{T}^*, B \cdot \vec{u} + A \cdot \vec{T}^*) + \alpha(\vec{u} - \vec{u}_0, \vec{u} - \vec{u}_0) \Rightarrow \min. \quad (34)$$

Пусть, например, заранее заданное распределение температуры по длине стержня имеет кусочно-линейный вид (рис. 5), причём $T_1^* = 105^\circ \text{C}$, а $T_2^* = 95^\circ \text{C}$:

$$T^*(x) = \begin{cases} T_1^*, & L_2 + L_0 < x < L; \\ T_2^* + (x - L_2) \cdot (T_1^* - T_2^*) / L_0, & L_2 < x < L_2 + L_0; \\ T_2^*, & 0 < x < L_2. \end{cases}$$

Коэффициенты разложения $T^*(x)$ по базисным функциям вычислены по формуле (25):

$$T_m^* = 1.4672 \cdot 10^4; -6.4968 \cdot 10^2; 5.3217 \cdot 10^{-1}; 1.8897 \cdot 10^2; 1.3829 \cdot 10^{-1}.$$

В результате решения задачи минимизации (34) получаем искомые температуры зон: $T^1 = 127,2^\circ \text{C}$; $T^2 = 72,8^\circ \text{C}$.

Управление расположением фронта кристаллизации. Одна из важных проблем управления температурным полем при росте кристаллов

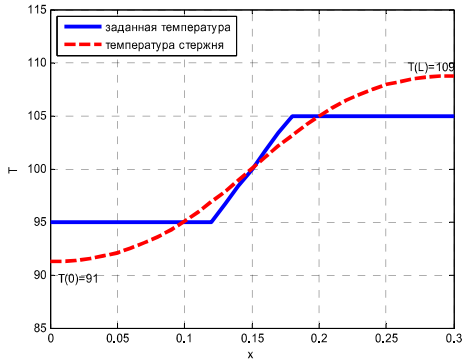


Рис. 5 – Нахождение распределения внешней температуры (сплошная) по заданному распределению температуры в стержне (пунктир).

относительно центральной диафрагмы. Другие графики демонстрируют изменение температурного поля при опускании стержня на величины $H = 0,02$ м и $H = 0,04$ м соответственно.

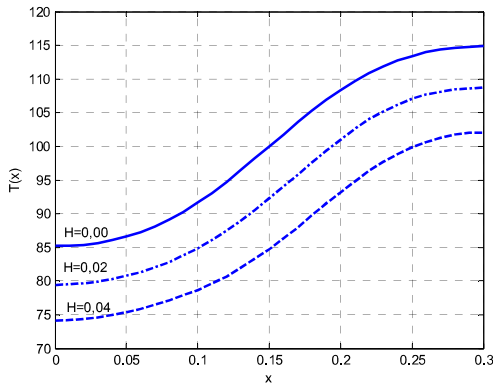


Рис. 6 – Изменение распределения температуры в стержне при опускании стержня.

штрихпунктирная линия показывает результат управляющего воздействия.

Рассмотрим изменение температуры в точке стержня на уровне, соответствующей верхнему краю диафрагмы.

В первоначальный момент (точка A на графике) значение температуры стержня в заданной точке равно $T_A = 94,7^\circ \text{C}$. После того, как стержень опущен на $H = 0,04$ м, температура в этой точке повышается (точка B на графике) и становится равной $T_B = 101,8^\circ \text{C}$. Далее, в результате теплообмена, температура стержня снижается, что соответствует пунктирной кривой на графике, а температура стержня в данной точке пространства (точка B на

графике) остается неизменной. Другая кривая (штрихпунктирная) показывает, что при опускании стержня на $H = 0,02$ м температура в данной точке пространства повышается до $T = 101,8^\circ \text{C}$.

Рассмотрим изменение температурного поля при опускании ампулы с кристаллизующимся веществом (рис. 6). Первоначальное распределение температуры, показанное на рис. 6 сплошной линией, соответствует положению стержня, симметричному относи-

На модельном примере стержня попробуем стабилизировать это положение, управляя температурой верхней зоны. На рис. 7 приведено 3 линии распределения температур. Сплошная линия соответствует исходному, симметричному относительно диафрагмы расположению стержня, пунктирной линией показано распределение температур для опущенного стержня без изменения температурных условий. Штрих-

рисунке) становится равной $T_C = 86,4^\circ \text{C}$.

Поскольку управление осуществляется одним параметром – температурой верхней зоны, решение проблемы можем осуществить с помощью *метода дихотомии* [12]. При невысокой скорости сходимости, дихотомия проста в реализации, устойчива к ошибкам округления и сходится для любых непрерывных функций.

Для представленного примера, расчетным путем установлено, что для стабилизации температуры в данной точке пространства $T_D = 94,7^\circ \text{C}$ необходимо поднять температуру в верхней зоне до $T_1^* = 173^\circ \text{C}$.

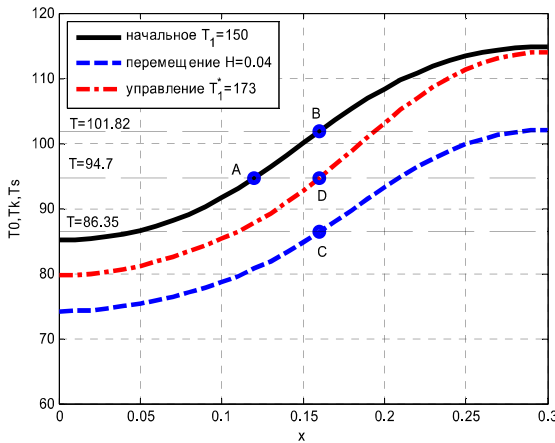


Рис. 7 – Стабилизация температуры в заданной точке стержня (над диафрагмой) при опускании стержня на заданное значение $H = 0,04$ м.

состояний, позволяющая в дальнейшем синтезировать регуляторы для процессов стабилизации температурного поля с использованием стандартных процедур теории автоматического управления.

Построен алгоритм управления температурным полем объекта при перемещении внутри установки. Приведены способы стабилизации температурного поля в заданной точке пространства при перемещении всего объекта.

Полученные методики служат модельными для управления усложненными моделями объектов.

Список литературы: 1. *Тевяшев А. Д., Щелкалин В. Н., Епифанов Ю. М., Козьмин Ю. С.* Об одном методе синтеза многосвязных регуляторов // Восточноевропейский журнал передовых технологий. – 2009. – № 5/3(20). – С.56 – 64. 2. *Довбиш А.С., Козьмин Ю.С., Берест О.Б.* Информационно-экстремальный алгоритм навчання системи керування вирощуванням скінтіляційних монокристалів / Сборник научных трудов "Вестник НТУ "ХПИ", Тематичний випуск «Системний аналіз, управління та інформаційні технології», – №30, – 2012, – С.54 – 60. 3. *Горилецкий В.И., Гринев Б.В., Заславский Б.Г., Смирнов Н.Н., Суздаль В.С.* Рост кристаллов. Галогениды щелочных металлов – Харьков. Акта, 2002. – 536с. 4. *Филиппов М.М., Бабушкин Ю.В., Грибенюков*

Выводы. В статье построена модель температурного поля кристаллизатора, как объекта с распределенными параметрами в пространстве состояний. В качестве упрощенной физической модели рассмотрен стержень с одномерным распределением физических свойств и температурных полей.

Получена каноническая система уравнений распределенного объекта в пространстве

А.И., Гинсар В.Е. Система управления многозонной термической установкой для выращивания кристаллов по методу Бриджмена // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т. 316. – №5. – С. 146 – 151. **5. Филиппов М.М., Грибенюков А.И., Бабушкин Ю.В., Кочегуров В.А.** Оптимальная стабилизация температурного поля распределенного объекта // Известия Томского политехнического университета. – 2011. – Т. 319. – № 4. – С. 21 – 26. **6. Багдасаров Х.С.** Высокотемпературная кристаллизация из расплава. – М.: ФИЗ-МАТЛИТ, 2004. – 160 с. **7. Полежаев В.И., Никитин С.А., Мяскина М.Н.** Теплообмен и температурное расслоение при свободноконвективных взаимодействиях в замкнутых объемах. Труды пятой Российской национальной конференции по теплообмену. – Т.1. – М.: Издат. дом МЭИ, 2010. – С.55 – 63. **8. Ранопорт Э.Я.** Оптимальное управление системами с распределенными пара-метрами. – М.: Высшая школа, 2009. – 677 с. **9. Арутюнов В.А., Бухмиров В.В., Крупеников С.А.** Математическое моделирование тепловой работы промышленных печей: Учебник для вузов. – М. Металлургия, 1990, – 239 с. **10. Фарлоу С.** Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 384 с. **11. Цветков Ф.Ф., Григорьев Б.А.** Тепломассообмен. Изд-во: МЭИ, 2005, – 550 с. **12. Гоник М.М., Боевкин В.И.** Повышение точности управления температурным режимом в установках выращивания кристаллов // Управление большими системами. – 2010. – № 1. – С.211 – 229.

Поступила в редколлегию 23.01.2014

УДК 681.526

Математическое моделирование объектов с распределёнными параметрами для управления процессами кристаллизации / Ю. С. Козьмин // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 6 (1049). – С. 81 – 93. Бібліогр.: 12 назв. – ISSN 2222-0631.

Розглядаються питання управління процесами вирощування скінтіляційних кристалів. Кристалізатор, як об'єкт управління, представляється системою з розподіленими параметрами. У якості фізичної моделі розглянуто стрижень з однимірним розподілом фізичних властивостей і температурних полів. Отримано систему рівнянь у просторі станів. Побудовано алгоритм управління температурним полем об'єкта при переміщенні кристалізатора всередині установки. Наведено способи стабілізації температури в заданій точці простору при переміщенні об'єкта. Отримані методики служать тестовими для вивчення процесів управління об'єктами на основі більш складних фізичних моделей.

Ключові слова: система з розподіленими параметрами, управління, стабілізація, температурне поле.

UDC 681.526

Mathematical modeling of objects with distributed parameters for crystallization process control / Yu. S. Kozmin // Bulletin of National Technical University NTU «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 81 – 93. Bibliog.: 12 titles. – ISSN 2222-0631.

This article addresses the process of scintillation crystal growth. A crystallizer, known as an object of control, is considered to be a distributed parameters system. We used a rod (as a physical model) with one-dimensional distribution of physical properties and thermal fields. We obtained a system of equations in the state space. An algorithm of temperature control, when moving a crystallizer inside the unit, was developed. The ways to stabilize the temperature at a given point in space as the object moves were shown. The obtained methodologies were used as tests in order to study objects (based on more complex physical models).

Key words: distributed parameters system, control, stabilization, thermal field.