

А.А. ТРОПИНА, д-р техн. наук, проф. ХНАДУ, Харьков

## ЧИСЛЕННАЯ ОЦЕНКА ПЛАЗМЕННЫХ МЕТОДОВ ИЗМЕРЕНИЯ СКОРОСТИ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

Предложена математическая модель фемтосекундного лазерного разряда, действующего на турбулентный поток сверхзвуковой вертикальной струи воздуха. На основе численных расчетов проведена оценка влияния тепловых возмущений, вызванных действием коротко-импульсного разряда, на профили скорости при различных числах Маха. Путем сравнения с экспериментальными данными отмечается, что данный способ измерения скоростей имеет наибольшую погрешность, вызванную влиянием тепловых возмущений, в сдвиговом слое на границе струи с окружающим воздухом.

**Ключевые слова:** лазерный разряд, математическая модель, численное моделирование, сверхзвуковой поток, профили скорости.

**Введение.** Развитие и совершенствование современных методов вычислительной газодинамики невозможно без совершенствования современных экспериментальных методов измерений скорости, особенно в турбулентных сверхзвуковых потоках. Однако при этом актуальным остается вопрос о точности проводимых экспериментов.

**Анализ последних исследований.** К самым известным методам измерения скорости в потоках можно отнести *бесконтактный метод цифровой трассерной визуализации* (метод PIV – Particle Image Velocimetry). Измерение мгновенного поля скорости потока основано на измерении с помощью рассеянного лазерного излучения перемещения специальных частиц (трассеров), которые добавляются в исследуемый поток газа или жидкости. Основным преимуществом метода является возможность регистрации мгновенных значений скорости в пространстве, что является особенно важным при изучении потоков, содержащих крупномасштабные вихревые структуры [1 – 2]. В то же время этот метод обеспечивает существенное разрешение только для достаточно больших изменений скорости. Для измерений значений или изменений скорости потока на очень малых расстояниях порядка *колмогоровского масштаба турбулентности* применяются методы, основанные на использовании электронной *рамановской флуоресценции*, вызванной лазерным разрядом [3]. Среди последних активно развивающихся методов можно отметить, так называемый, *FLEET* (Femtosecond Laser Electronic Excitation Tagging) *метод* [4], основанный на возбуждении молекул азота фемтосекундным лазерным импульсом и последующим слежением за этими молекулами с помощью камеры. При этом экспериментально отмечается увеличение температуры газа в фокальной области лазера порядка 30 мкм, что может повлиять на точность измерений скорости. Таким образом, основная цель

данной работы – оценка влияния быстрого нагрева газа при действии фемто-секундного лазерного разряда на профили скорости в сверхзвуковом потоке, является достаточно актуальной.

**Постановка задачи.** Основная система уравнений, описывающая нестационарное турбулентное движение газа в рамках  $k-\varepsilon$  модели турбулентности имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) &= 0, \\ \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j u_i + p \delta_{ij} - \tau_{ij}) &= 0, \\ \frac{\partial (\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j k) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \tau_{ij} S_{ij} - \rho \varepsilon (1 + 2M_t^2), \\ \frac{\partial (\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j \varepsilon) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \tau_{ij} S_{ij} - c_{\varepsilon 2} \frac{\rho \varepsilon^2}{k}, \\ \tau_{ij} &= \overline{\rho u_i u_j}, \tau_{ij} = \tau_{lij} + \tau_{tij}, \tau_{lij} = 2\mu \left( S_{ij} - \frac{S_{mn} \delta_{ij}}{3} \right), \end{aligned}$$

где  $u_j$  ( $j = \overline{1,3}$ ) – компоненты вектора скорости;  $\tau_{lij}$  ( $\tau_{tij}$ ) – тензор молекулярных (турбулентных) напряжений;  $\mu_t$  – турбулентная вязкость;  $k$  – кинетическая энергия турбулентности;  $\varepsilon$  – скорость диссипации турбулентной кинетической энергии;  $S_{ij}$  – тензор скоростей деформаций. Остальные обозначения являются общепринятыми.

**Результаты расчетов.** Расчеты проводились для случая вертикальной сверхзвуковой струи воздуха (диаметр сопла  $d_0 = 30$  мкм, давление на выходе  $p_0 = 2$  атм). Во всей области число Маха варьировалось в диапазоне  $M = 0,02 \rightarrow 1,9$ . Геометрия задачи соответствовала геометрии экспериментальной установки для измерения значений скорости с помощью метода FLEET, изложенного в деталях в работе [4]. Задача решалась в осесимметричной постановке. Размер расчетной области составил  $1,5 \text{ см} \times 2,0 \text{ см}$ , количество ячеек сетки  $4,7 \times 10^5$  при минимальном размере ячейки  $1,5$  мкм. В расчетах использовался метод переменных направлений. Дискретизация исходных уравнений осуществлялась с использованием разностей второго порядка, ориентированных против потока, для конвективных слагаемых, и с использованием центральных разностей второго порядка для диффузионных слагаемых. Для удовлетворения уравнению неразрывности выполнялась процедура коррекции потока массы. Детали численного метода приведены в работе [5]. Учет влияния сжимаемости газа проводился в рамках модели каскадного процесса, основанного на Фурье-анализе поля скоростей.

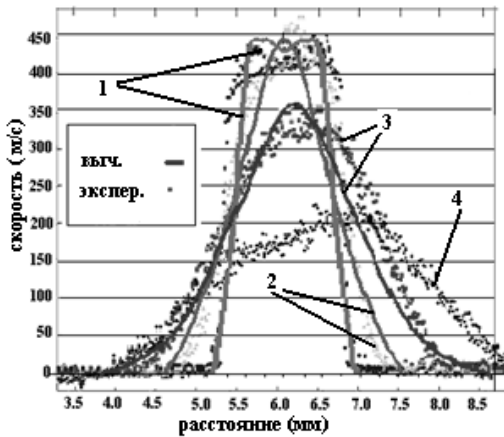


Рис. 1 – Средняя скорость потока на разных расстояниях от входного сечения при  $t = 0,5$  мкс. (1 –  $y/d=1$ , 2 –  $y/d=5$ , 3 –  $y/d=10$ , 4 –  $y/d=15$ ).

Экспериментальные данные взяты из работы [4]. Лазерный импульс был промоделирован как нестационарный источник в цилиндрической области высотой  $h=1$  см и радиусом  $R_c = 30$  мкм. Для оценки максимальной интенсивности источника тепла использовалось аналитическое решение уравнения теплопроводности при малых числах Фурье  $Fo = \chi\tau / R^2$  вида

$$T - T_0 = 2r^2 Fo \cdot Po / R_c^2, \text{ где } Po = QR_c^2 / (\lambda \cdot \delta T),$$

$R_c$  – радиус цилиндрической области с источником тепла;  $Q$  – максимальная интенсивность источника;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $\chi$  – коэффициент температуропроводности.

В работе [4] отмечается, что в результате действия лазерного импульса шириной  $t_p = 120$  фс наблюдается повышение температуры воздуха в зоне разряда на величину  $\delta T = 200^\circ \text{K}$ . Эти данные позволили оценить максимальную мощность источника  $Q$ . С учетом динамики фемтосекундного лазерного разряда временная зависимость теплового источника была смоделирована в виде линейной зависимости от времени до момента  $t = t_p / 3$ , когда достигалась максимальная интенсивность источника  $Q$ . После этого временная зависимость источника тепла предполагалась экспоненциально спадающей до  $t = t_p$ . Для проверки правильности вычислений было проведено сравнение полученных расчетных данных с экспериментальными данными о замерах скоростей на разных расстояниях от входного сечения  $y/d_0 = 1, 5, 10$ , соответствующих расстояниям 1, 5, 10 мм от входного сечения [4]. Результаты сравнения представлены на рис. 1 и демонстрируют хорошее соответствие

Вычисления проводились в два этапа. На первом шаге решалась стационарная задача расчета поля скоростей вертикальной турбулентной струи без внешнего источника тепла. На следующем шаге рассматривалась нестационарная задача, начальным условием для которой было решение стационарной задачи, а действие фемтосекундного лазерного разряда моделировалось источником тепла в уравнении теплопроводности следующим образом. С учетом размеров фокальной области лазера

между расчетными и экспериментальными данными во всей области за исключением точек в сдвиговых слоях.

Одной из причин таких отклонений является возможное влияние коротко-импульсного ввода энергии при действии фемтосекундного лазерного разряда (который использовался при проведении измерений скорости) на профили скорости при различных числах Маха. В качестве основного параметра, характеризующего такое влияние, был выбран безразмерный параметр  $\beta$ , представляющий собой относительное изменение осевой скорости  $v_y$ :

$$\beta = \text{abs}(v_y - v_y^{\text{stat}}) / v_y^{\text{stat}},$$

где  $v_y^{\text{stat}}$  – значение осевой скорости, полученное при решении стационарной задачи.

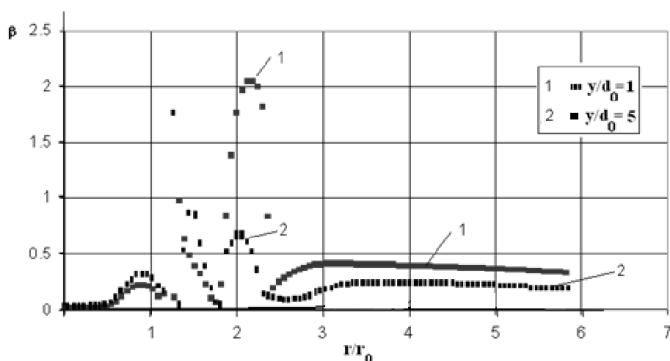


Рис. 2. – Относительные отклонения осевой скорости на разных расстояниях от входного сечения при  $t = 0.5$  мкс.

Сравнивая результаты расчетов параметра  $\beta$  в различных сечениях (кривые 1, 2 на рис. 2) в момент времени  $t = 0.5$  мкс, можно отметить, что основные отклонения в значениях скорости наблюдаются как раз в зоне разряда, моделируемого источником вдоль линии  $y/D = 1$ . При этом максимальные значения параметра  $\beta$ , а соответственно, и максимальные значения отклонений скорости вследствие этого локализованного ввода энергии находятся в сдвиговом слое, в области на границе между сверхзвуковой струей и окружающим воздухом. Возникновение подобных искажений профиля скорости при действии фемтосекундного лазерного разряда, вызывающего быстрый нагрев газа, можно объяснить тем фактом, что увеличение температуры вызывает появление градиента плотности. Этот процесс, в свою очередь, приводит к различным значениям ускорения газа в различных точках и, как следствие вызывает увеличение средней скорости сдвига, приводящее к увеличению кинетической энергии турбулентности, что следует из анализа уравнения баланса кинетической энергии турбулентности. Полученный результат также хорошо коррелирует с известным соотношением о пропорцио-

нальности временной зависимости радиуса разряда от среднеквадратичной скорости турбулентных пульсаций вида  $dr/dt \cong \sqrt{u^2(t)}$  [6].

Следует отметить, что вводимые разрядом возмущения медленно уменьшаются с течением времени, и становятся в два раза меньше при  $t = 1$  мкс, но по-прежнему велики в районе сдвигового слоя, что необходимо учитывать при обработке данных эксперимента. В тоже время количественный анализ возможного влияния импульсного ввода энергии фемтосекундного разряда на мелкомасштабную турбулентность еще находится в стадии рассмотрения, так как этот вопрос не может быть разрешен в рамках модельных RANS уравнений из-за ограничений замыкания для турбулентных напряжений и неразрешенных масштабов.

**Выводы.** Представлена тепловая модель фемтосекундного лазерного разряда в сверхзвуковом потоке газа. Проведенное сравнение экспериментальных и расчетных значений скорости подтверждает адекватность предложенной модели. Получено, что максимальные отклонения в значениях скорости наблюдаются в сдвиговом слое и являются результатом быстрого нагрева газа при действии разряда.

**Список литературы:** 1. Kang S., Patil B., Roy R.P. Effects of coincidence window and measuring volume size on laser Doppler velocimetry measurement of turbulence // *Experiments in Fluids*. – 2001. – Vol. 30. – P. 365 – 370. 2. Nakagawa S., Hanratty T.J. Particle image velocimetry measurements of flow over a wavy wall // *Physics of Fluids*. – 2001. – Vol. 13, №11. – P. 3504 – 3507. 3. Noullez G., Wallace W., Lempert W., Miles R.B., Frisch U. Transverse velocity increments in turbulent flow using the RELIFF technique // *J. Fluid Mech.* – 1997. – Vol.33. – P. 287 – 307. 4. Michael J.B., Edwards M.R., Dogariu A., Miles R.B. Femtosecond laser electronic excitation tagging for quantitative velocity imaging in air // *Applied Optics*. – 2011. – Vol.50, №20. – P.5158 – 5162. 5. Тропина А. А. / Теоретические основы процессов горения, стимулированных равновесной и неравновесной плазмой электрического разряда. Дисс. докт.техн.наук. – Киев: НАУ. – 2011 г. – 368с. 6. Shneider M.N. Turbulent decay of after-spark channel // *Phys. Plasmas*. – 2006. – Vol.13. – P. 07351(11).

Поступила в редколлегию 27.02.2014

---

УДК 537.523:538.4

**Численная оценка плазменных методов измерения скорости в сверхзвуковом потоке газа / А. А. Тропина // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіяx. – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 6 (1049). – С. 199 – 204. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.**

Запропоновано математичну модель фемтосекундного лазерного розряду, який діє на турбулентний потік надзвукового вертикального струменя повітря. На основі чисельних розрахунків проведена оцінка впливу теплових збурювань, викликаних дією коротко-імпульсного розряду, на профілі швидкості при різних числах Маху. Шляхом порівняння з експериментальними даними відзначається, що даний спосіб виміру швидкостей має найбільшу погрішність, викликану впливом теплових збурювань, у зсунутому шарі на границі струменя з навколишнім повітрям.

**Ключові слова:** лазерний розряд, математична модель, чисельне моделювання, надзвуковий потік, профілі швидкості.

**Numerical evaluation of plasma methods for measuring velocity of a supersonic gas flow / A. A. Tropina** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 199 – 204. Bibliog.: 6 titles. – ISSN 2222-0631.

A mathematical model of the femtosecond laser discharge, acting on a supersonic turbulent flow of a vertical air jet has been proposed. On the basis of numerical calculations the influence of thermal perturbations, caused by the short- pulse discharge, on the velocity profiles was evaluated for different Mach numbers. Comparison with the experimental data indicates that this method of velocity measurements has the biggest error, caused by the influence of thermal disturbances in the shear layer, at the boundary of the jet with the surrounding air.

**Key words:** laser discharge, mathematical model, numerical simulation, supersonic flow, velocity profiles.

УДК 669.189:621.746.62.001.57

*А.В. ФЕДОСОВ*, канд. техн. наук, доц., ПГТУ, Мариуполь

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОФИЛЯ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ СЛЯБА В КРИСТАЛЛИЗАТОРЕ МАШИНЫ НЕПРЕРЫВНОГО ЛИТЬЯ ЗАГОТОВОК**

Разработана математическая модель процессов кристаллизации и усадки слэбов в кристаллизаторе машины непрерывного литья заготовок. В основу численного решения уравнений модели положен метод конечных разностей, позволяющий производить неравномерную дискретизацию расчетной области. На базе этой модели проведены исследования по искажению профиля поперечного сечения слэба под воздействием рабочих стенок кристаллизатора.

**Ключевые слова:** метод конечных разностей, дифференциальное уравнение, дискретный аналог, непрерывнолитой слиток, кристаллизатор, машина непрерывного литья заготовок.

**Введение.** Машина непрерывного литья заготовок является ключевым агрегатом современного металлургического производства. Более 90 % жидкой стали, выплавляемой в развитых странах, разливается в непрерывнолитые заготовки различного типа. Кристаллизатор машины непрерывной разливки является ее важной составляющей, от работы которой во многом зависит процесс непрерывной разливки в целом. Кристаллизатор представляет собой медную водоохлаждаемую форму-металлоприемник, в которой начинает формироваться твердая оболочка (корочка) непрерывнолитой заготовки (НЛЗ). В этот период на неё воздействует комплекс теплофизических, гидродинамических и механических процессов, которые оказывают существенное влияние на зарождение и развитие большинства дефектов непрерывнолитой заготовки [1]. В связи с этим, совершенствованию методов исследования процессов, протекающих в кристаллизаторах машин непрерывного литья заготовок, уделяется много внимания.