

*В.Л. ХАВІН*, канд. техн. наук, зав. каф., НТУ «ХПІ»;

*Л.В. АВТОНОМОВА*, канд. техн. наук, провід. наук. співр., НТУ «ХПІ»;

*С.І. МАРУСЕНО*, наук. співр., НТУ «ХПІ»

## МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ВИСОКОШВИДКІСНОГО РІЗАННЯ НА БАЗІ НЕЗАЛЕЖНОГО ПІДХОДУ ЛАГРАНЖА-ЕЙЛЕРА

Розглянуто рішення зв'язаної динамічної термопружнопластичної контактної задачі взаємодії ріжучого інструменту і матеріалу, що обробляється, на основі методу скінчених елементів у формулюванні незалежного підходу Лагранжа-Ейлера (ALE). Чисельну реалізацію проведено методом скінчених елементів за допомогою пакету ABAQUS/Explicit.

**Ключові слова:** математичне моделювання, термопружнопластична контактна задача, процес різання, незалежний підхід Лагранжа-Ейлера, скінчений елемент.

**Опис проблеми.** Процес різання – комплексний процес, що полягає в утворенні зони великих пластичних деформацій і тепловиділення у зоні первинного здвигу та подальшого інтенсивного пластичного деформування у вторинних зонах, які примикають в області контакту клина з матеріалом, що обробляється. У цій області за рахунок руху матеріалу уздовж інструменту спостерігається значне тертя. На думку *T.H. Childs* [1] труднощі математичного моделювання процесів відділення матеріалу ріжучим клином пов'язані із трьома основними причинами: значна свобода у формуванні стружки, що впливає на складність моделювання процесу, який представляється у вигляді крайової задачі зі змінними границями; високі рівні та градієнти полів пластичних деформацій, швидкостей деформацій і температур, які впливають на стан матеріалу в зоні обробки ріжучим клином та викликають значні труднощі при описі цього стану; складний характер тертя на поверхні контакту між інструментом та матеріалом. Для теоретичного аналізу процесів деформування тіл різної форми найчастіше використовується *метод скінчених елементів* (МСЕ). Імітаційне моделювання за допомогою МСЕ дозволяє розрахувати всі необхідні фізичні змінні процесу, які дуже складно одержати експериментально.

**Постановка задачі.** Ціль даної роботи – математичне моделювання процесів відділення матеріалу ріжучим клином за допомогою МСЕ в формулюванні незалежного підходу *Лагранжа-Ейлера* (ALE).

Розглядається зв'язана термопружнопластична контактна задача, яка описує взаємодію ріжучого клина та матеріалу, що зрізується.

Використання формулювання Лагранжа-Ейлера має на меті адаптацію сітки в процесі чисельного моделювання та може використовуватися у формулюванні Ейлера для розв'язку проблеми вільних поверхонь, а також у формулюванні Лагранжа, щоб уникнути значних викривлень сітки [2].

Математична модель для описання процесу відділення стружки в ALE включає рівняння законів збереження маси, моменту та енергії в відліковій системі координат і має наступний вигляд (штрихом позначено похідні по часу в відліковій системі координат):

$$\rho' + (v_i - v_i^g) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = -\rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i}; \quad (1)$$

$$\rho v_i' + \rho(v_i - v_i^g) \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i^B; \quad (2)$$

$$\rho e' + \rho(v_j - v_j^g) \frac{\partial e}{\partial x_j} = \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho r - \frac{\partial q_i}{\partial x_j}, \quad (3)$$

де  $\rho, \rho'$  – густина і швидкість її зміни;  $v_i, v_i'$  – швидкості й прискорення матеріальної точки;  $v_i^g, v_j^g$  – швидкості руху відрхункової системи координат;  $x_i(x_j)$  – декартова координата ( $i, j = x, y, z$ );  $e = e(\rho, T)$  – питома внутрішня енергія;  $\sigma_{ij}$  – компоненти *тензора напруг* Гука,  $r$  – щільність внутрішніх розподілених джерел тепла;  $q_i$  – компоненти вектора напруження теплового потоку;  $f_i^B$  – компоненти вектора об'ємних сил;  $T$  – температура.

При застосуванні гіпотези нестискування матеріалу в умовах пластичного деформування (для постійної густини) рівняння (1) виконується тотожно, а динамічне рівняння рівноваги (2) в формулюванні рівняння віртуальної роботи в *інкрементальній формі* і лінеаризованому вигляді в момент часу  $t$  при відсутності об'ємних і поверхніх зусиль (окрім контактних) набуває такого вигляду [3, 4]:

$$\begin{aligned} & \int_V \dot{\sigma}_{ij} \Delta t \delta e_{ij} dV + \int_V \bar{\sigma}_{ij} \delta e_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} dV + \int_V \rho \bar{a}_i \delta u_i dV + \int_V \rho (v_j - v_j^g) \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \delta u_i dV + \\ & + \int_V \rho (\bar{v}_i - \bar{v}_i^g) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta u_i dV + \int_V (\bar{u}_k - \bar{u}_k^g) \sigma_{ij} \frac{\partial \delta e_{ij}}{\partial x_k} dV + \int_V \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_j} \sigma_{ij} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_k} dV = \\ & = - \int_V \sigma_{ij} \delta e_{ij} dV - \int_V \rho (v_j - v_j^g) \delta u_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV - \int_V \rho \bar{a}_i \delta u_i dV - \int_V \rho (v_k - v_k^g) \frac{\partial (a_i \delta u_i)}{\partial x_{kj}} \Delta t dV - \\ & - \int_V \rho (v_k - v_k^g) \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_k} - 2 \frac{\partial v_j^g}{\partial x_k} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta u_i \Delta t dV - \\ & - \int_V \rho (v_k - v_k^g) (v_j - v_j^g) \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta u_i \right) \Delta t dV \Big|_t, \quad (4) \end{aligned}$$

де  $\dot{\sigma}_{ij} = \sigma'_{ij} + (v_k - v_k^g) \partial \sigma_{ij} / \partial x_k$  – компоненти тензору швидкостей напружень в матеріальній системі координат;  $\Delta t$  – інкрементальний крок по часу;

$e_{ij} = 0,5(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$  – тензор деформацій;  $u_i, u_i^*$  – матеріальні і відлікові переміщення відповідно.

В рівнянні (4) введено залежності:

$$a_i|_{t+\Delta t} = a_i|_t + a_i^*, v_i|_{t+\Delta t} = v_i|_t + v_i^*, v_i^g|_{t+\Delta t} = v_i^g|_t + v_i^{*g}, \quad (5)$$

де  $a_i^*, v_i^*, v_i^{*g}$  – інкрементальний приріст прискорень і швидкостей на часовому кроці від  $t$  до  $t + \Delta t$ . Знак  $|_t$  показує належність відповідних співвідношень моменту часу  $t$ ,  $|_{t+\Delta t}$  – моменту часу  $t + \Delta t$ .

Фізичні співвідношення у швидкісній формі представляються у вигляді:

$$\sigma_{ij}^T = C_{ijkl} D_{kl}, \quad (6)$$

де  $\sigma_{ij}^T$  – компоненти *тензора швидкостей напруж за Трусделлом*:

$$\sigma_{ij}^T = \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\lambda v_k}{\partial x_k} \sigma_{ij} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \sigma_{ik} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \sigma_{jk},$$

$C_{ijkl}$  – компоненти пружно-пластичного тензору зв'язку напруги-деформації 4-го порядку,  $D_{kl} = 0,5(\partial v_k / \partial x_l + \partial v_l / \partial x_k)$  ( $k, l = x, y, z$ ) – компоненти тензору швидкостей деформацій;  $\dot{\sigma}_{ij}$  – компоненти тензору швидкостей напружень в матеріальній системі координат.

Пластичне деформування матеріалу підпорядковується асоційованому закону теорії течії в швидкісній формі:

$$D_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (7)$$

де  $D_{ij}^p$  – пластична складова тензору швидкостей деформацій;  $\dot{\lambda}$  – параметр пластичності.  $F$  – пластичний потенціал, який задається у вигляді:

$$F(\sigma_{ij}, \sigma_y) = f(\sigma_{ij}) - \sigma_y \quad (8)$$

і обертається в нуль (тобто  $F(\sigma_{ij}, \sigma_y) = 0$ ) при настанні пластичної течії, де  $f(\sigma_{ij})$  – функція пластичності;  $\sigma_y$  – функціональна залежність для поточної межі текучості (напружень пластичної течії), яка залежить від еквівалентної деформації, еквівалентної швидкості пластичної деформації і температури, що представляють собою визначальне співвідношення (рівняння) для матеріалу:

$$\sigma_y = \sigma_y(\bar{\varepsilon}^p, \dot{\bar{\varepsilon}}^p, T), \quad (9)$$

де  $\bar{\varepsilon}^p$  – еквівалентна (ефективна) пластична деформація;  $\dot{\bar{\varepsilon}}^p$  – швидкість еквівалентної пластичної деформації;  $T$  – температура. Вважається, що пластичний потенціал  $F$  не змінюється за часом (тобто  $\dot{F} = 0$ ). Залежності (5) – (9) створюють разом з (4) систему рівнянь, що дозволяє отримати нелінійне матричне рівняння, в яке лінійно входять інкрементальні переміщення  $u_i^k$  і

$u_i^{*g}$ , інкрементальні швидкості  $v_i^k$  і  $v_i^{*g}$  та прискорення  $a_i^*$ .

Повне динамічне рівняння в матричній формі методу скінченних елементів має вигляд [4]:

$$\begin{aligned} M^L \bar{a} + C^{A1} \bar{v} + C^{A2} (\bar{v} - \bar{v}^g) + K^L \bar{u} + K^A (\bar{u} - \bar{u}^g) = \\ = \bar{f} - (M^L + M^A) a + (C^{A1} + C^{A3} + C^{A4}) v \Big|_t, \end{aligned} \quad (10)$$

де матриці  $M^L, M^A, C^{A1}, C^{A2}, C^{A3}, C^{A4}, K^L, K^A$  отримані в роботах [3, 4];  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{a}$  – збільшення векторів матеріальних вузлових переміщень, швидкостей і прискорень у момент часу від  $t$  до  $t + \Delta t$ ;  $\bar{u}^g, \bar{v}^g$  – збільшення вузлових переміщень, швидкостей для незалежного руху вузлів сітки в момент часу від  $t$  до  $t + \Delta t$ ;  $v, a$  – значення вузлових матеріальних швидкостей і прискорень у момент часу  $t$ ;  $\bar{f}$  – вектор вузлових зусиль.

У процесах різання енергія, яка згенерована дисипацією роботи сил тертя і роботою пластичного деформування, передається у вигляді тепла через матеріал, що обробляється, стружку та інструмент і переходить у навколишнє середовище через випромінювання і конвекцію. Ріст температури впливає на властивості матеріалу та провокує збільшення деформацій.

Закон збереження енергії (3) представляється у вигляді нестационарного рівняння конвективно-кондуктивної теплопровідності, яке в рамках ALE має наступний вигляд [5]:

$$\rho c \dot{T} + \rho c (v_i - v_i^g) \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{\partial (\lambda^* \frac{\partial T}{\partial x_i})}{\partial x_i} = \dot{q}_v, \quad (11)$$

де  $c$  – теплоємність;  $\lambda^*$  – коефіцієнт теплопровідності;  $\dot{q}_v$  – швидкість тепловиділення об'ємних джерел тепла.

Рівняння (11) в дискретизованій формі метода скінчених елементів представлено у вигляді [6]

$$C_T \dot{T}_n + K_T T_n = \dot{Q}(t_n), \quad (12)$$

де  $C_T$  – матриця теплоємності;  $K_T$  – матриця теплопровідності;  $\dot{Q}$  – вектор інтенсивностей вузлових «впливів», які викликані роботою пластичного деформування і сил тертя;  $T, \dot{T}$  – вектора вузлових температур і швидкостей зміни температури відповідно.

Швидкість виділення тепла внаслідок пластичного деформування визначається залежністю

$$\dot{q}_v = \eta^* \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cong \eta^* \sigma_{ij} D_{ij}^p, \quad (13)$$

де  $\eta^*$  – механічний еквівалент тепла ( $\eta^* \approx 0,9$ ).

Тепловиділення внаслідок тертя в контактi задається так:

$$\dot{q}_s = \eta^* |\tau_f v_f|, \quad (14)$$

де  $\tau_f, v_f$  – дотичні (фрикційні) зусилля і швидкість проковзування в області контакту зі проковзуванням. Розподіл тепла між інструментом і матеріалом, що обробляється, задається у відповідності з теплофізичними властивостями контактуючих тіл [7].

Крайова контактна механічна задача розв’язується в інкрементальній формі для прирощення вузлових прискорень, швидкостей і переміщень з кроком по часу  $\Delta t$ . По закінченню інкрементального кроку в механічній задачі розв’язується задача нестационарної теплопровідності для системи ріжучий клин – матеріал, що обробляється, і формується температурне поле, яке використовується як початковий стан для наступного шагу в задачі механіки.

Для розв’язання контактної задачі застосовується кінематичний метод, нелінійна пружно-пластична задача розв’язується *методом Ньютона-Рафсона*, інтегрування за часом здійснюється на основі чисельних залежностей для центрального диференціювання.

**Чисельна реалізація.** Розглянуто задачу ортогонального різання у вигляді двовимірної зв’язаної термомеханічної задачі плоскої деформації для термопружного ріжучого клину і пружно-пластичного матеріалу, що обробляється. Розрахункова схема надана на рис. 1, крайові умови представлені вільними лагранжевими границями (робочі поверхні інструменту, стружки і верхня частина області, яка зайнята матеріалом, що обробляється), ейлеровими границями – вхід і вихід матеріалу, що обробляється, зі швидкістю різання  $v_c$ , а також границею проковзування і границею контакту. На віддалених границях ріжучого клину реалізовані вимоги жорсткого закріплення.

Задача теплопровідності розв’язується при фіксованій температурі, яка дорівнюється початковій ( $T_0$ ) на бічних і нижніх границях області, яка зайнята матеріалом, а також на віддалених границях ріжучого клину. На вільних границях враховується вільний конвективний теплообмін з навколишнім середовищем.

Як зазначено раніше, було розглянуто двовимірну термомеханічну зв’язану контактну задачу плоскої деформації для термопружного ріжучого клину і термопластичного матеріалу, в якому виникають великі пластичні деформації. Задача розв’язується в формі незалежного підходу Лагранжа-Ейлера.

Визначальні співвідношення обрано в формі *моделі Джонсона-Кука*:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_y(\bar{\varepsilon}_p, \dot{\bar{\varepsilon}}_p, T), \\ \sigma_y &= (A + B\bar{\varepsilon}_p^n)(1 + C \ln \dot{\bar{\varepsilon}}_p) \left[ 1 - (T^*)^m \right], \quad \varepsilon_p^* = \dot{\bar{\varepsilon}}_p / \dot{\varepsilon}_{p0}, \\ T^* &= (T - T_0) / (T_m - T_0), \end{aligned} \quad (15)$$

де  $\bar{\varepsilon}_p, \dot{\bar{\varepsilon}}_p$  – еквівалентні пластичні деформації і швидкості;  $T_m$  – температура плавлення матеріалу;  $T_0$  – початкова температура,  $A, B, C, n, m$  – константи;  $\dot{\varepsilon}_{p0}$  – відлікова швидкість деформацій.

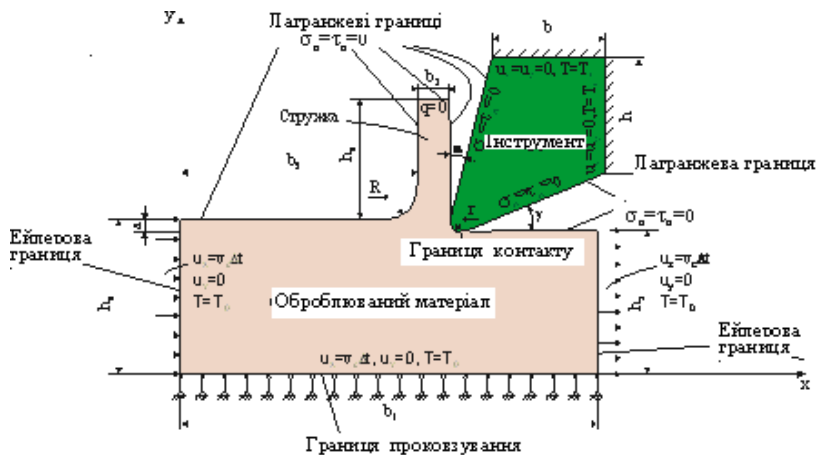


Рис. 1 – Розрахункова схема.

Модель тертя на контактній поверхні задавалася у вигляді:

$$\tau_n = \min(\mu\sigma_n, \tau_y), \quad (16)$$

де  $\tau_n$ ,  $\sigma_n$  – контактні зсувні зусилля дотичної (напруження) і тиск (нормальні напруження в контакті);  $\mu$  – коефіцієнт тертя ( $\mu = 0,5$ ).

Таблиця 1 – Фізико-механічні характеристики

Характеристика	Матеріал сплав (20NiCrMo5)	Інструмент (карбід вольфраму)
Густина, кг/см <sup>3</sup>	7.8	15
Коеф. Пуассона	0.3	0.3
Модуль пружності, ГПа	210	800
Коеф. Теплопровідності, Вт/м °С	47.7	46
Теплоємність, Дж/кг °С	556	203
Коеф. лінійного розширення, 1/°С	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$4.7 \cdot 10^{-5}$

В табл. 1 наведено фізико-механічні характеристики матеріалу, що обробляється, і ріжучого клину, в табл. 2 – вхідні геометричні параметри ріжучого клину і технологічні процесу різання, в табл. 3 – константи рівняння Джонсона – Кука [8].

Таблиця 2 – Геометрія ріжучого клину і технологічні параметри процесу різання

Параметр	Значення
Передній кут $\alpha$	$6^\circ$
Задній кут $\gamma$	$6^\circ$
Швидкість різання $v_0$ , мм/с	5000
Товщина зрізу $a$ , мм	0.1
Початковий радіус закруглення вістря $r$ , мм	0.1

Таблиця 3 – Константи рівняння Джонсона-Кука

Матеріал	Сплав 20NiCrMo5
$A$ , МПа	490
$B$ , МПа	600
$n$	0.21
$C$	0.015
$m$	0.6
$T_m$ , °К	1900
$T_0$ , °К	293

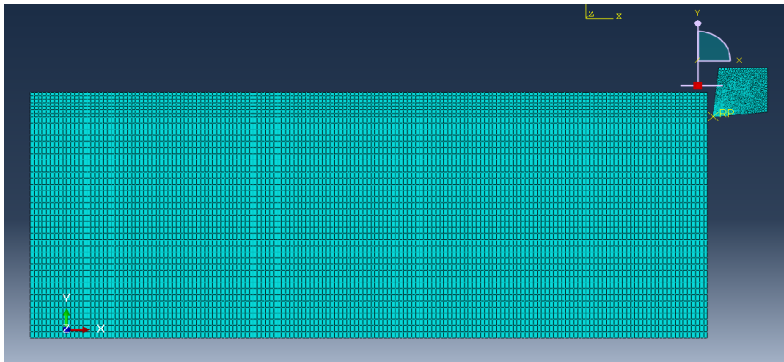


Рис. 2 – Сітка скінчених елементів.

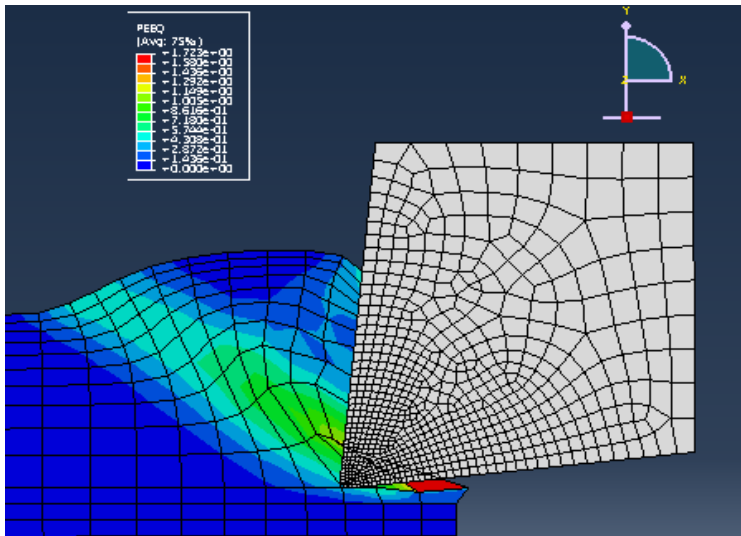


Рис. 3 – Еквівалентні пластичні деформації в початковій фазі процесу різання ( $t \approx 2 \cdot 10^{-5}$  с).

Чисельні розрахунки проводилися за допомогою пакету ABAQUS/Explicit з використанням зв'язаного термомеханічного білінійного кінцевого елемента CPE4RT; кількість елементів для матеріалу, що обробляється, становила 3005, для клина – 280 елементів.

На рис. 2 представлено розрахункову схему розбиття сіткою скінчених елементів.

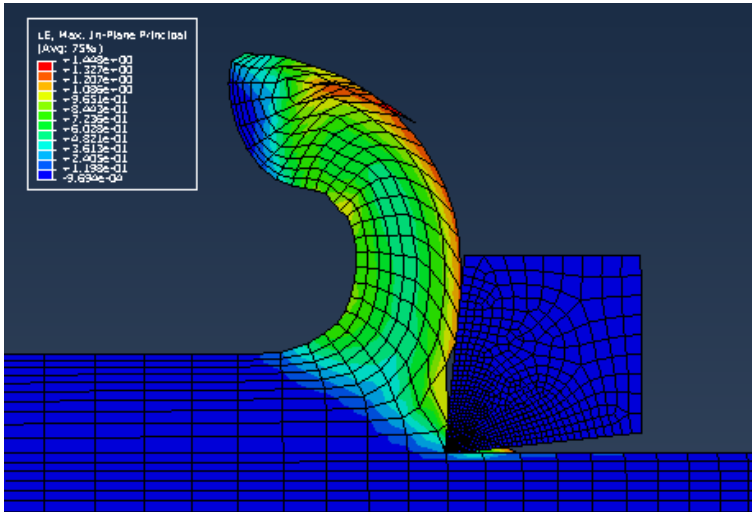


Рис. 4 – Еквівалентні пластичні деформації для сталого процесу різання ( $t \approx 1 \cdot 10^{-4}$  с).

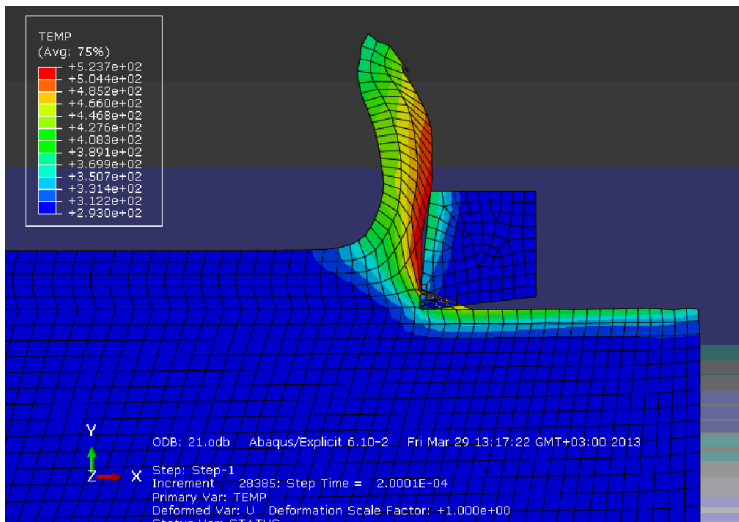


Рис. 5 – Температурні поля в контакті.



На рис. 3, 4 надано розподіл еквівалентних логарифмічних пластичних деформацій в початковій фазі процесу різання ( $t \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ c}$ ) і в момент квазі-сталого процесу різання  $t \approx 1 \cdot 10^{-4} \text{ c}$ . На рис. 5 показано температурне поле в момент часу  $t \approx 1,5 \cdot 10^{-1} \text{ c}$ . Слід відзначити, що температурне поле ще є нестационарним і практично формується до моменту часу  $t \approx (2,5 - 3) \cdot 10^{-4} \text{ c}$ .

**Висновки.** В роботі розглянуто розв'язання зв'язаної динамічної термопружнопластичної контактної задачі застосовано до процесу взаємодії ріжучого клину з матеріалом, що обробляється. Задача розв'язана за допомогою пакета ABAQUS/Explicit методом скінчених елементів в формулюванні незалежного підходу Лагранжа-Ейлера. Отримані результати показали реальну практичну можливість моделювання процесу утворення стружки на персональних комп'ютерах.

Застосування незалежного підходу Лагранжа-Ейлера дозволяє більш ефективно (з точки зору часу роботи процесора) розв'язувати істотно нелінійно зв'язану термомеханічну задачу моделювання процесу різання матеріалів з утворенням зливної (неперервної) стружки. Так, для розв'язання розглянутої задачі з достатньою точністю до моменту формування квазістационарного різання необхідно порядком 15 годин роботи процесора, для чисельного рішення розглянутої задачі на основі підходу Лагранжа необхідно декілька днів.

Внаслідок інерційності процесів теплообміну час розрахунків до формування квазістационарного температурного поля в 2–3 рази більший, ніж час формування сталого стружкоутворення.

Надалі для отримання більш точних кількісних результатів моделювання процесу стружкоутворення слід проводити за наступними напрямками:

- удосконалення моделі стану матеріалу, що обробляється, для високих рівнів швидкостей деформацій і температур;
- розробка нових моделей локального тертя, які враховують залежність від температури, тиску і швидкості проковзування;
- більш точний опис граничного теплообміну з навколишнім середовищем і в контакті ріжучого клину з матеріалом, що обробляється.

**Список літератури:** 1. Childs T.H.C. Material property needs in modeling metal machining / T.H.C. Childs // *Machining science and Technology*. – 1998. – V. 2, №2. – P. 303 – 316. 2. Movahhedy M.R. FE modeling of chip formation in orthogonal metal cutting process: An ALE approach. / *Machining Science and technology* / M.R. Movahhedy, M.G.Gadata, Y. Altintas //, – 2000. – V.4. – PP. 15 – 47. 3. Movahhedy M.R. ALE simulation of chip formation in orthogonal metal cutting process / M.R. Movahhedy. – PhD Dissertation. The University of British Columbia. – 2000. 4. Bayoumi H.N. Arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation for quasi-static and dynamic metal forming simulation / H.N.Bayoumi // University of British Columbia, PhD. Dissertation. – 2001. 5. Hsu T.R. The finite element method in thermomechanics / T.R. Hsu // Prentice-Hall Inc., New Jersey, USA. – 1986. 6. Huener K.H. The finite element method for engineers / K.H. Huener, E.A. Thornton, T.G. Byrom // John Wiley and Sons Inc., New York, USA. – 1995. – 656 P. 7. Secto G.S. Numerical simulation of continuous chip formation during non-steady orthogonal cutting / G.S. Secto, J.L. Shenot // *Engineering computations*. – 1993. – Vol. 10. – P. 31 – 48. 8. Хавин В.Л. Моделирование накопления износа при высокоскоростном резании на основе МКЭ / В.Л. Хавин, А.М. Гриненко, Л.В. Автономова, А.В. Степук

---

УДК 539

**Моделювання процесу високошвидкісного різання на базі незалежного підходу Лагранжа-Ейлера / В. Л. Хавін, Л. В. Автономова, С. І. Марусенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 6 (1049). – С. 214 – 223. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.**

Рассмотрено решение связанной динамической термоупругопластической контактной задачи взаимодействия режущего инструмента и обрабатываемого материала на основе метода конечных элементов в формулировке независимого подхода Лагранжа-Эйлера (ALE). Численная реализация проведена методом конечных элементов с помощью пакета ABAQUS/Explicit.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, термоупругопластическая контактная задача, процесси різання, незалежний підход Лагранжа-Эйлера, конечный элемент.

UDC 539

**Modelling the high-speed cutting process on the basis of the Lagrange-Euler arbitrary approach / V. L. Navin, L. V. Avtonomova, S. I. Marusenko // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 214 – 223. Bibliog.: 8 titles. – ISSN 2222-0631.**

The coupled dynamic thermal elastoplastic contact problem of cutting tool - processed material interaction is solved by the finite element method (FEM). The Lagrange-Euler (ALE) arbitrary approach is utilized. The numerical implementation is carried out by the FEM using the ABAQUS / Explicit software.

**Key words:** mathematical modeling, thermal elastoplastic contact problem, the cutting process, the Euler-Lagrange approach, final element modelling.

УДК 539.3

**В.И. ЩЕГЛОВ**, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., НТУ «ХПІ»

## **ОБ ОДНОМ ЭФФЕКТЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ УПРУГОГО ПОЛОГО ШАРА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НА НЕГО СФЕРИЧЕСКОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА**

Установлен эффект уменьшения диаметра внутренней граничной сферы упругого полого шара и граничной сферы упругого пространства с шаровой полостью в результате их нагрева, вызванного действием на них сферических температурных полей специального вида, при положительности коэффициента линейного расширения и определенном характере зависимости от температуры модуля Юнга и коэффициента Пуассона их материала.

**Ключевые слова:** полый шар, граничная сфера, нагрев, модуль Юнга, коэффициент Пуассона, коэффициент линейного расширения.