УДК 513.88

С.Д. ДИМИТРОВА-БУРЛАЕНКО, ст. пр., НТУ «ХПІ»

АСИМПТОТИЧЕСКИ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЛЕВИТАНА В ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ

Рассмотрены асимптотически почти периодические функции Левитана. Приведена теорема единственности и некоторые свойства этих функций. Доказано, что квазиравномерная сходимость этих функций (а также асимптотически почти периодических и асимптотически почти автоморфных функций) не выводит из их класса.

Ключевые слова: асимптотически почти периодические функции, асимптотически почти автоморфные функции, асимптотические почти периодические функции Левитана, квазиравномерная сходимость.

Введение. Настоящая работа является продолжением исследований автора в области квазиравномерной сходимости абстрактных функций, начатых в статьях [2 – 5]. В этих статьях было установлено, что квазиравномерная сходимость переводит непрерывные, почти периодические, почти автоморфные и Левитановские почти периодические функции в функции того же класса.

Наряду с указанными выше абстрактными функциями, асимптотически почти периодические (а.п.п.) и их обобщение – асимптотически почти автоморфные (а.п.а.) функции имеют значительный практический интерес. Асимптотически почти периодические функции были введены *Фреше* [10] в 1941 г. Сейчас эти классы абстрактных функций широко используются в теории дифференциальных уравнений. Основные свойства а.п.п. и а.п.а. функций хорошо изучены и могут быть найдены в [13] и [1], соответственно.

Отметим, что как для асимптотически почти периодических, так и для асимптотически почти автоморфных функций до настоящего времени рассматривалась только равномерная сходимость. В данной работе показано, что не только равномерная, но и более слабая, такая как – квазиравномерная сходимость, переводит асимптотические функции в функции того же вида.

Кроме того, автором введен новый более широкий класс асимптотических функций – *асимптотически почти периодические функции Левитана* (а.L-п.п.), обобщающие а.п.п. и а.п.а. функции. При этом а.L-п.п. функции, в отличие от предыдущих двух классов, могут быть неограниченными. Доказано, что квазиравномерная сходимость для таких достаточно общих асимптотических функций, также не выводит из класса а.L-п.п.

Обозначения и определения. Рассматриваются функции, заданные на оси R и на полуоси $\mathrm{R}^+ = [0;\infty)$ со значениями в *пространстве Фреше Y.* Топология пространства Y задается либо счетной системой полунорм $p_\alpha(.)$, $\alpha = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, либо метрикой

$$\rho\left(x;\, y\right) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{2^\alpha} \cdot \frac{p_\alpha\left(x-y\right)}{1+p_\alpha\left(x-y\right)}.$$

Обобщение почти периодических функций впервые рассмотрел *Б. М. Левитан* (см. [7], [8]). В настоящей работе будем опираться на критерий *Б. Я. Левина* [6] с поправкой *А. Райха* [10].

Критерий Левина L-почти периодичности. *Для того чтобы непрерывная функция* $f(t) : R \to Y$ *была Левитановской почти периодической (L-п.п.) функцией необходимо и достаточно*, *чтобы из любой последовательности вещественных чисел* $\{\xi'_n\}_{n=1}^{\infty}$ *можно было извлечь подпоследовательность* $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \{\xi'_n\}_{n=1}^{\infty}$, *для которой*

$$\lim_{\min(m,n)\to\infty} f\left(t+\xi_m - \xi_n\right) = f\left(t\right),\quad \forall t \in \left(-\infty;\infty\right). \tag{1}$$

В работе [2] показано, что Левитановские почти периодические функции являются непрерывными на оси в естественной топологии и в топологии $\Im_N$, порожденной окрестностями

$$B_{N,\varepsilon,f} = \left\{ \tau \in R : \sup_{x\in N} \rho\Big(f\left(x+\tau\right), f\left(x\right)\Big) < \varepsilon \right\},$$

где N – конечное множество чисел, $\varepsilon > 0$. Множества $B_{N,\varepsilon,f}$ являются относительно плотными на интервале $(-\infty;\infty)$. Компактные L-п.п. функции называются почти автоморфными функциями [3], [10], [11].

Определение 1. *Непрерывная функция* $f(t) : R^+ \to Y$, *называется асимптотически почти периодической функцией Левитана (a.L-п.п.)*, *если она представима в виде*:

$$f(t) = g(t) + w(t), \tag{2}$$

где $g(t)$ является непрерывной L-п.п. функцией на $(-\infty;\infty)$, а функция $w(t)$ является непрерывной на множестве $[0;\infty)$ со значениями в пространстве Фреше и $\lim\limits_{t\to\infty} w(t) = 0$.

Определение 2. Последовательность непрерывных функций $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n(t) : R \to Y$ *называется квазиравномерно сходящейся к функции* $f(t)$ *по всем подпоследовательностям*, если:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$, $t \in (-\infty;\infty)$;
2. $\forall \varepsilon > 0$, $\forall N > 0$ $\exists$ конечное число индексов $n_1, n_2, \ldots, n_k$ таких, что $\inf\limits_{1\le i\le k} \rho(f_{n_i}(t), f(t)) < \varepsilon$, $t \in (-\infty;\infty)$, $N < n_1 < n_2 < \ldots < n_k$;

3. Условие 2 справедливо и для любой подпоследовательности функций $\{f_{s_n}(t)\}_{n=1}^{\infty}$.

Теорема единственности. Основной вопрос, связанный с представлением (2) – это единственность представления.

Теорема 1. *Представление асимптотически почти периодической функции Левитана* $f(t) = g(t) + w(t)$ *единственно*, $t \in [0;\infty)$.

Доказательство. Допустим, что существуют хотя бы два представления

$$f(t) = g_1(t) + w_1(t) \quad \text{и} \quad f(t) = g_2(t) + w_2(t),$$

где $g_1(t)$ и $g_2(t)$ L-п.п. функции на $(-\infty;\infty)$, а $w_1(t)$ и $w_2(t)$ непрерывные функции,

$$\lim_{t\to\infty} w_1(t) = 0, \ \lim_{t\to\infty} w_2(t) = 0, \ t \in [0;\infty).$$

Тогда

$$g(t) = g_1(t) - g_2(t) = w_2(t) - w_1(t).$$

Рассмотрим последовательность $\{\xi'_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которой

$$\xi'_1 \ge 1, \quad \xi'_{m+1} \ge 2\xi'_m, \quad m = 1, 2, ... \tag{3}$$

и выберем из нее подпоследовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \{\xi'_n\}_{n=1}^{\infty}$ так, чтобы выполнялось равенство (1) одновременно для функций $g_1(t)$ и $g_2(t)$. В силу выбора будем иметь:

$$\lim_{n\to\infty} (\xi_{n+1} - \xi_n) = \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} g(t + \xi_{n+1} - \xi_n) = \lim_{n\to\infty} g_1(t + \xi_{n+1} - \xi_n) - \lim_{n\to\infty} g_2(t + \xi_{n+1} - \xi_n) = g_1(t) - g_2(t) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} w_2(t + \xi_{n+1} - \xi_n) - \lim_{n\to\infty} w_1(t + \xi_{n+1} - \xi_n) = 0, \quad \forall t \in (-\infty;\infty).$$

Предел вычисляется для каждой точки отдельно. Функции $w_1(x)$ и $w_2(x)$ определены для неотрицательных аргументов, и поэтому для каждого t при вычислении предела используются только неотрицательные аргументы $t + \xi_{n+1} - \xi_n$. Это возможно так, как $\lim\limits_{n\to\infty} (\xi_{n+1} - \xi_n) = \infty$, и начиная с некоторого номера n аргументы $t + \xi_{n+1} - \xi_n$ положительны. Тогда

$$g_2(t) = g_1(t), \ \forall t \in (-\infty;\infty) \ \text{и} \ w_2(t) = w_1(t), \ t \in [0;\infty),$$

что доказывает единственность представления.

Замечание. Приведенное доказательство единственности представления справедливо и для асимптотически почти периодических и асимптотически почти автоморфных функций. Все они являются асимптотически L-почти периодическими функциями. Другое доказательство для асимптотически почти периодических функций дано в работе [12], а для асимптотически почти автоморфных функций – в работе [1].

Свойства асимптотически почти периодических функций Левитана. Легко видеть, что выполняются следующие свойства этих функций.

1. *Сумма и разность двух a.L-п.п. функций является a.L-п.п. функцией.*

Если заданы a.L-п.п. функции $f_1(t) = g_1(t) + w_1(t)$ и $f_2(t) = g_2(t) + + w_2(t)$, то

$$f(t) = f_1(t) \pm f_2(t) = \left[g_1(t) \pm g_2(t)\right] + \left[w_1(t) \pm w_2(t)\right].$$

Алгебраическая сумма двух L-п.п. функций $g_1(t) \pm g_2(t)$ является L-п.п. функцией. Из свойств предела следует, что $\lim\limits_{t\to\infty}\left[w_1(t) \pm w_2(t)\right] = 0$. Следовательно, $f(t)$ также является a.L-п.п. функцией.

2. *Произведение ограниченной числовой a.L-п.п. функции $k(t)$ и ограниченной абстрактной a.L-п.п. функции $f(t)$ является a.L-п.п. функцией.*

$$k(t)f(t) = \left[k_g(t) + k_w(t)\right]\left[g(t) + w(t)\right] = \left[k_g(t)g(t)\right] +$$
$$\left[k_g(t)w(t) + g(t)k_w(t) + k_w(t)w(t)\right].$$

Произведение $k_g(t)g(t)$ двух L-п.п. функций является L-п.п. функцией. Каждое слагаемое суммы $k_g(t)w(t) + g(t)k_w(t)$ $+k_w(t)w(t)$ является произведением двух функций, первая из которых ограничена, а вторая имеет предел 0. Следовательно, предел этой суммы равен нулю. Таким образом, произведение $k(t)f(t)$ является a.L-п.п. функцией.

Теорема 2. *Квазиравномерный предел асимптотически почти периодических функций Левитана также является асимптотически почти периодической функцией Левитана.*

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть последовательность функций $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n(t): R^+ \to Y$ квазиравномерно сходится к функции $f(t)$ по всем подпоследовательностям. Тогда, если для последовательности чисел $\{h_\beta\}_{\beta=1}^{\infty} \in [0;\infty)$ и для $\forall t \in (-\infty;\infty)$ выполняются условия:* 1) $\lim\limits_{\beta\to\infty} h_\beta = +\infty$; 2) $\lim\limits_{\beta\to\infty} f_n(t + h_\beta) = = \varphi_n(t),\ n \in N$; 3) $\lim\limits_{\beta\to\infty} f(t + h_\beta) = \varphi(t)$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$, $t \in (-\infty;\infty)$, *причем последовательность $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ квазиравномерно сходится по всем подпоследовательностям к функции $\varphi(t)$ и возможна, перестановка пределов*

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{\beta\to\infty} f_n(t + h_\beta) = \lim_{\beta\to\infty}\lim_{n\to\infty} f_n(t + h_\beta). \qquad (4)$$

Доказательство. Допустим, что хотя бы для одной точки t_0 предел

$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t_0)$ не существует или не равен $\varphi(t_0)$. Тогда $\exists\varepsilon_0>0$ и для $\forall N$ найдется бесконечное множество номеров $n>N$, что

$$\rho(\varphi_n(t_0),\varphi(t_0))\geq\varepsilon_0 .$$

Рассмотрим подпоследовательность функций $\{f_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ с этими номерами. Она сходится квазиравномерно, так как есть квазиравномерная сходимость по всем подпоследовательностям. Не ограничивая общности, будем считать, что это первоначальная последовательность с номерами 1, 2, 3, ...

Сначала заметим, что из квазиравномерной сходимости последовательности непрерывных функций $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ по всем подпоследовательностям следует, что для любого $\varepsilon>0$ и для любой бесконечной последовательности чисел $\{z'_n\}_{n=1}^{\infty}$, $z'_n\geq 0$ существует номер n_0 и бесконечная подпоследовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\{z'_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которых

$$\rho(f_{n_0}(z_n),f(z_n))<\varepsilon,\quad n=1,\ 2,\ 3,\dots . \tag{5}$$

Это легко показать по определению 2, заметив, что номеров $\{n_i\}_{i=1}^{i=k}$ конечное число, а последовательность $\{z'_n\}_{n=1}^{\infty}$ содержит бесконечное число элементов. Тогда, для одного из номеров n_0 найдется бесконечное число элементов $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которых выполняется неравенство (5).

Согласно этому замечанию по числу $\varepsilon_0/3$ и последовательности чисел $\{t_0+h_\beta\}_{\beta=1}^{\infty}$ выбираем индекс n_0 и подпоследовательность $\{t_0+h'_\beta\}_{\beta=1}^{\infty}$ так, чтобы

$$t_0+h'_\beta\geq 0\,,\quad \rho\Big(f_{n_0}(t_0+h'_\beta),f(t_0+h'_\beta)\Big)<\frac{\varepsilon_0}{3},\quad \beta=1,\ 2,\ 3,\dots .$$

Используя поточечную сходимость последовательности $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, по числу $\varepsilon_0/3$ выбираем M_1 так, чтобы

$$t_0+h'_\beta\geq 0\,,\quad \rho\Big(f(t_0+h'_\beta),\ \varphi(t_0)\Big)<\frac{\varepsilon_0}{3}\ \text{ для }\ \beta>M_1 .$$

Также для функции $f_{n_0}(t)$ находим M_2, чтобы

$$t_0+h'_\beta\geq 0\,,\quad \rho\Big(f_{n_0}(t_0+h'_\beta),\varphi_{n_0}(t_0)\Big)<\frac{\varepsilon_0}{3}\ \text{ для всех }\ \beta>M_2 .$$

Тогда для всех $\beta>\max\{M_1,M_2\}$ имеем:

$$\varepsilon_0\leq\rho\Big(\varphi(t_0),\ \varphi_{n_0}(t_0)\Big)\leq\rho\Big(\varphi(t_0),\ f(t_0+h'_\beta)\Big)+$$

$$+\rho\Big(f(t_0+h'_\beta),\ f_{n_0}(t_0+h'_\beta)\Big)+\rho\Big(f_{n_0}(t_0+h'_\beta),\ \varphi_{n_0}(t_0)\Big)<\varepsilon_0 .$$

Полученное противоречие показывает, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)=\varphi(t) \text{ для любого } t\in(-\infty;\,\infty).$$

Из квазиравномерной сходимости последовательности $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ к функции $f(t)$ следует, что если задано $\varepsilon>0$, то для любого ε_1, $0<\varepsilon_1<\varepsilon$ и индекса N существуют индексы $n_1, n_2, ..., n_k$ $(n_i>N, i=1, 2, ..., k)$ такие, что

$$\inf_{1\le i\le k}\rho\left(f_{n_i}(t'),\, f(t')\right)<\varepsilon_1,\ \forall t'\in[0;\,\infty).$$

Неравенство верно и для любого $t'=t+h'_\beta$, $t+h'_\beta\ge 0$, $t\in(-\infty;\,\infty)$,

$$\inf_{1\le i\le k}\rho\left(f_{n_i}(t+h'_\beta),\, f(t+h'_\beta)\right)<\varepsilon_1.$$

Из этого неравенства вытекает, что при любом фиксированном $t\in(-\infty;\infty)$ из конечности чисел $n_1, n_2, ..., n_k$ следует, что для бесконечной подпоследовательности $\{h''_\beta\}_{\beta=1}^{\infty}\subset\{h'_\beta\}_{\beta=1}^{\infty}$ существует индекс $n_j(t)\in\{n_j\}_{j=1}^{k}$, и выполняются неравенства:

$$\rho\left(\varphi_{n_j(t)}(t),\varphi(t)\right)=\lim_{\beta}\rho\left(f_{n_j(t)}(t+h''_\beta), f(t+h''_\beta)\right)=$$

$$=\lim_{\beta}\inf_{1\le j\le k}\rho\left(f_{n_j}(t+h''_\beta), f(t+h''_\beta)\right)\le\varepsilon_1<\varepsilon,$$

$$\inf_{1\le j\le k}\rho\left(\varphi_{n_j}(t),\varphi(t)\right)\le\rho\left(\varphi_{n_j(t)}(t),\varphi(t)\right)<\varepsilon,\ \ \forall t\in(-\infty;\infty).$$

Последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ квазиравномерно сходится к функции $\varphi(t)$ выполняя условия 1 и 2 определения 2. Так как последовательность $\{f_n(t)\}$ сходится квазиравномерно по всем подпоследовательностям, то и последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится также квазиравномерно по всем подпоследовательностям к функции $\varphi(t)$, то есть выполняется и условие 3 определения 2.

Справедливость равенств (4) следует из цепочки равенств

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{\beta\to\infty}f_n(t+h_\beta)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)=\varphi(t)=\lim_{\beta\to\infty}f(t+h_\beta)=\lim_{\beta\to\infty}\lim_{n\to\infty}f_n(t+h_\beta),$$

$$t\in(-\infty;\,\infty),\ t+h_\beta\ge 0.$$

Это завершает доказательство леммы.

Доказательство теоремы. Пусть последовательность $f_n(x)$ сходится квазиравномерно к функции $f_0(x)$, и $\{\xi'_m\}_{m=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность, которая имеет бесконечный предел. Из нее выбираем подпоследовательность $\{\xi_m\}_{m=1}^{\infty}$ так, чтобы:

а) $\tau_m=\xi_{m+1}-\xi_m>0,\ \lim_{m}\tau_m=+\infty$;

б) существовали все пределы $\lim_m g_n(t+\tau_m) = g_n(t)$, $\lim_m w_n(t+\tau_m) = 0$, $\lim_m f_n(t+\tau_m) = g_n(t)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$; в) $g_0(t) = \lim_m f_0(t+\tau_m)$.

Для обеспечения условия а) можно взять последовательность $\{\xi_m\}_{m=1}^{\infty}$ из теоремы 1. Для обеспечения условия б) надо воспользоваться *критерием Левина* и применить его последовательно ко всем функциям $g_n(t)$, а потом использовать *канторовский диагональный процесс*. Для диагональной последовательности будет выполняться условие а), $\lim_m g_n(t+\tau_m) = g_n(t)$ для любого n. Так как каждая из функций $f_n(t)$ является a.L-п.п., то

$$\lim_m w_n(t+\tau_m) = 0,\ \lim_m f_n(t+\tau_m) = g_n(t),\quad n = 1,2,3,\ldots$$

Для обеспечения условия в) используем то, что последовательность функций $f_n(x)$ сходится квазиравномерно к функции $f_0(x)$, а также лемму, где $\varphi_n(t) = g_n(t)$, $h_\beta = \tau_m$. Тогда для любого t

$$g_0(t) = \lim_m f_0(t+\tau_m) = \lim_m \lim_n f_n(t+\tau_m) = \lim_n \lim_m f_n(t+\tau_m) = \lim_n g_n(t).$$

Используя лемму, получаем, что последовательность $g_n(t)$ сходится квазиравномерно к $g_0(t)$.

Согласно [5] квазиравномерный по всем подпоследовательностям предел L-п.п. функций является L-п.п. функцией. Пусть $w_0(t) = f_0(t) - g_0(t)$. Тогда последовательность $w_n = f_n - g_n$, сходится квазиравномерно к $f_0 - {}$ ${}-g_0 = w_0$ и

$$\lim_{t\to\infty} w_0(t) = \lim_{t\to\infty}\left[f_0(t) - g_0(t)\right] = \lim_{t\to\infty}\lim_n\left[f_n(t) - g_n(t)\right] =$$
$$= \lim_n \lim_{t\to\infty}\left[f_n(t) - g_n(t)\right] = \lim_n \lim_{t\to\infty} w_n(t) = 0,\quad t \ge 0.$$

Таким образом, предельная функция $f_0(x)$ является a.L-п.п. функцией.

Замечание. Теорема 2 справедлива и для асимптотически почти периодических функций и для асимптотически почти автоморфных функций. В этих случаях используются теоремы из [4] и [5].

Выводы. Любую асимптотически почти периодическую функцию Левитана единственным образом можно представить как сумму почти периодической функции Левитана и непрерывной функции с пределом, равным нулю на бесконечности. Квазиравномерный предел асимптотически почти периодической функции Левитана (асимптотически почти периодической, асимптотически почти автоморфной функций) является асимптотически почти периодической функцией Левитана (асимптотически почти периодической, асимптотически почти автоморфной) функцией.

Список литературы: **1.** *Bugajewski D., N'Guérékata G. M.*, Almost periodicity in Fréchet spaces, J. Math. Anal. Appl. 299 (2004) 534 – 549 **2.** *Димитрова-Бурлаенко С. Д.* Представление $L-$почти периодических функций как непрерывные функции на топологической группе // Вісник національного технічного університету «ХПІ». – 68'2010, Харків, – С. 65 – 75. **3**. *Димитрова-Бурлаенко С. Д.* Почти автоморфные функции как компактные непрерывные функции на группе. // Вісник національного технічного університету «ХПІ». – 27'2012, Харків, – С. 82 – 85. **4**. *Димитрова-Бурлаенко С. Д.* Необходимые и достаточные условия сходимости почти периодических функций. Сборник статей по результатам международной конференции Тараповские чтения 2012: «Современные проблемы математики, механики и информатики». – ХНУ имени В. Н. Каразина. Механико-математический факультет: Изд-во „Апостроф", – 2012, – С. 332 – 338. **5** *Димитрова-Бурлаенко С. Д.* Квазиравномерный предел левитановских почти периодических функции. // Вісник національного технічного університету «ХПІ». – 54'2013, Харків, – С. 111 – 117.**6.** *Левин Б.Я.* О почти периодических функциях Левитана // УМЖ. – Т.1, № 1. – 1949, – С. 49 – 101. **7.** *Левитан Б. М***.** Новое обобщение почти периодических функций H. Bohr'a // Зап. Харьк. ин-та матем. и матем. о-ва, XV, №2, 1938. **8.** *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения,Московский университет – 1978. – С. 204**.** **9.** *Frechet M.* Fonctions Asymptotiquement Presque-Periodiques, Revue Scietifique (Revue Rose Illustree)vol. 79, 341 – 354, (1941).**10**. *Reich A*. Präkompakte Gruppen and Fastperiodizität // Math. Z. – 116, – P. 216 – 234. **11.** *Veech W. A*. Almost automorphic functions on groups // Amer. J. Math., 87. – №3. – 1965. – P. 719 – 751. **12**. *Zaidman S.* Almost-periodic functions in abstract spaces. // Pitman Advanced Publishing Program, Boston, London, Melbourne, 1985.

Поступила в редколлегию 20.02.2014

УДК 513.88

Асимптотически почти периодические функции Левитана в пространствах Фреше / С. Д. Димитрова-Бурлаенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 6 (1049). – С. 59 – 66. Бібліогр.: 12 назв. – ISSN 2222-0631.

Розглянуто асимптотично майже періодичні функції Левітана. Наведено теорема про єдине рішення і деякі властивості цих функцій. Доказано, що квазірівномірна збіжність цих функцій (а також асимптотично майже періодичних функцій та асимптотично майже автоморфних функцій) не виводить з цього класу.

Ключові слова: асимптотично майже періодичні функції, асимптотично майже автоморфні функції, асимптотично майже періодичні функції Левітана, квазірівномірна збіжність.

UDC 513.88

Asymptotically almost periodic Levitan's functions in the Freshet space / S. D. Dimitrova-Burlayenko // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 59 – 66. Bibliog.: 12 titles. – ISSN 2222-0631.

Asymptotically almost periodic Levitan's functions are considered. The uniqueness theorem and some properties of these functions are shown. It was proven that the quasi-uniform limit of these functions (as well as asymptotically almost periodic and asymptotically almost automorphic functions) belongs to the same functional class.

Key words: asymptotically almost periodic Levitan's functions, asymptotically almost periodic functions, asymptotically almost automorphic functions, quasi-uniform convergence.