Marchenko, A. P., et al. *Dvyguny vnutrishn'ogo zgorjannja: serija pidruchnykiv u 6 tomah. Vol. 5. Ekologizacija DVZ*. Ed. A. P. Marchenko, and A. F. Shehovcov. Kharkiv: Prapor, 2004. Print. **7.** Markov, V. A., R. M. Bashirov and I. I. Gambitov. *Toksichnost' otrabotavshih gazov dizelej. 2nd ed. pererab. i dop*. Moscow: Izd-vo MGTU im. M.Je. Baumana, 2002. Print. **8.** Vambol', S. O., O. P. Strokov and O. M. Kondratenko. "Stendovi vyprobuvannja avtotraktornogo dyzelja 2Ch10,5/12 za standartyzovanymy cyklamy dlja vyznachennja efektyvnosti roboty FTCh." *Visnyk Nacional'nogo tehnichnogo universytetu «KhPI». Ser.: Avtomobile- ta traktorobuduvannja*. No. 10 (1053). 2014. 11–18. Print. **9.** Kondratenko, A. N., A. P. Strokov and N. M. Karasichenko. "Eksperimental'noe issledovanie dejstvujuschego maketa fil'trujuschego elementa fil'tra tverdyh chastic dizelja s nasypkoj iz prirodnogo ceolita. Chast' 1." *Dviguny vnutrishn'ogo zgorjannja*. No. 1. 2013. 88–92. Print. **10.** Kondratenko, A. N., A. P. Strokov S. P. Hozhainov. "Eksperimental'noe issledovanie dejstvujushhego maketa fil'trujushhego elementa fil'tra tverdyh chastic dizelja s nasypkoj iz prirodnogo ceolita. Chast' 2." *Dviguny vnutrishn'ogo zgorjannja*. No. 2. 2013. 92–97. Print. **11.** Kondratenko, A. N., A. P. Strokov and S.A. Vambol'. "Regeneracija fil'tra tverdyh chastic dizelja s nasypkoj iz prirodnogo ceolita." *Dvigateli vnutrennego sgoranija*. No. 2. 2014. 76–81. Print.

Поступила (received) 02.03.2015

УДК 517.984.4

А.В. КОРОБСКАЯ, канд. пед. наук, доц., ХНУ им. В. Н. Каразина, Харьков

ОПЕРАТОР ДВОЙНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ И ЕГО СВОЙСТВА

Изучен оператор двойного интегрирования в пространстве $L^2(D)$, где D – прямоугольник. Осуществлено включение данного оператора в узел. Показано, что вычисление характеристической функции узла связано с решением краевой задачи Дарбу-Гурса с данными на характеристиках. Рассмотрено сужение данного оператора на подпространство функций $f(x;y) \in L^2(D)$ вида $f(x;y) = f(xy)$. Оператор сужения включен в узел, вычислена характеристическая функция этого узла. Оказалось, что она является интегральным оператором, который действует в этом же пространстве функций ($f(x;y) = f(xy)$).

Ключевые слова: оператор двойного интегрирования, узел, гильбертово пространство, ортопроектор, характеристическая функция.

Введение. Теория модельных представлений несамосопряженных операторов является развивающимся направлением функционального анализа. Первые фундаментальные исследования в этом направлении были получены в работах *М. С. Лившица* [1; 2] по теории характеристических функций, которые впоследствии стали основным инструментом спектрального анализа несамосопряженных операторов. Предложенный М. С. Лившицом подход дал предпосылки к изучению различных типов операторов и их характеристических функций. Так, в контексте нашего исследования заслуживают внимания работы по теории спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов [3], треугольных и жордановых представлений линейных операторов [4], операторов в гильбертовом пространстве [5].

Анализ исследования. Для несамосопряженных операторов аналогом спектральных разложений являются *треугольные модели*. Основным аналитическим инструментом, при помощи которого строятся треугольные модели, является *характеристическая оператор-функция М. С. Лившица*. В работах М. С. Лившица [1; 2] рассмотрены несамосопряженные операторы в случае конечномерности пространства неэрмитовости, в том числе оператор интегрирования со спектром в нуле, обладающий одноклеточностью. Отметим, что оператор двойного интегрирования, представленный в работе, в данном аспекте не изучался. При этом оператор двойного интегрирования не является диссипативным и имеет бесконечномерную мнимую компоненту, а отвечающая ему характеристическая функция обладает свойством монодромности.

Постановка задачи. Изучить оператор двойного интегрирования вида

$$(Af)(x,y)=\int_0^x\int_0^y f(t,s)dtds\ ,$$

который действует в пространстве $L^2(D)$, где D – прямоугольник, и сужение оператора двойного интегрирования вида

$$(Af)\Big|_{L_0}(t)=\int_0^t f(\xi)d\xi\ln\frac{t}{\xi}$$

на подпространство

$$L_0=\left\{f(x,y)\in L^2(D):\ f(x,y)=f(xy)\right\}.$$

Осуществить включение данных операторов в *узел*, описать параметры узла, вычислить характеристические функции узлов.

Метод вычисления. Рассмотрим оператор $A:\ L^2(D)\to L^2(D)$, где

$$D=[0,a]\times[0,b],\ 0<a,b<\infty,$$

$$L^2\left(D\right)=\left\{f:D\to R^2:\iint\limits_D\left|f\left(x,y\right)\right|^2dxdy<\infty\right\},$$

$$\left(Af\right)\left(x,y\right)=\int_0^x\int_0^y f\left(t,s\right)dtds\ . \qquad (1)$$

Найдем к оператору (1) сопряженный оператор A^*, то есть $\left\langle Af,\ g\right\rangle=$ $=\left\langle f,\ A^*g\right\rangle$. Представим оператор A в виде произведения двух операторов: $A=A_1A_2$, где

$$(A_1f)(x)=\int_0^x f(t)dt\ ,\ (A_2f)(y)=\int_0^y f(s)ds\ .$$

Действительно, по *теореме Фубини* получаем

$$(A_1(A_2f)(y))(x)=\int_0^x\int_0^y f(t,s)dtds=(Af)(x,y)\ .$$

Вычислим сопряженный оператор для A_1:

$$\left\langle A_1 f, g\right\rangle = \int_0^a\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)\overline{g(x)}dx = \int_0^a f(t)\overline{\int_t^a g(x)\,dx}\,dt = \left\langle f, A_1^* g\right\rangle.$$

Значит, по определению сопряженного оператора получим $(A_1^* f)(x) = \int_x^a f(t)dt$. Аналогично, для A_2 имеем $(A_2^* f)(y) = \int_y^b f(s)ds$. Тогда сопряженный к A оператор $A^* = (A_1 A_2)^* = A_2^* A_1^* = A_1^* A_2^*$ имеет вид:

$$\left(A^* f\right)(x, y) = \int_x^a\int_y^b f(t, s)\,dtds\,.$$

Включим оператор A в узел, поскольку A – линейный, ограниченный оператор. В нашем случае $H = L^2(D)$.

Построим гильбертово пространство E. Вычислим $B = -i(A - A^*)$. Обозначим $\overline{BH} = E$. Найдем замыкание образа оператора B:

$$\frac{1}{i}\left(A - A^*\right)f(x, y) = \frac{1}{i}\int_0^x\int_0^y f(t, s)\,dtds - \frac{1}{i}\int_x^a\int_y^b f(t, s)\,dtds := g(x, y).$$

Тогда

$$g''_{xy}(x, y) = \frac{1}{i}f(x, y) - \frac{1}{i}f(x, y) = 0\,. \qquad (2)$$

Из (2) следует, что $g'_y(x, y) = \varphi(y)$. Значит,

$$g(x, y) = \int_0^y \varphi(s)\,ds + C(x) = D(y) + C(x)\,.$$

Итак, пространство E имеет вид:

$$E = \left\{u(x) + c + v(y) \in L^2(D)\right\}. \qquad (3)$$

Пространство E можно представить в виде ортогональной суммы

$E = E_1 \oplus E_0 \oplus E_2$, где $E_0 = \mathbb{C}$,

$$E_1 = \left\{u(x) \in L^2(0, a) : \int_0^a u(x)\,dx = 0\right\},\ E_2 = \left\{v(y) \in L^2(0, b) : \int_0^b v(y)\,dy = 0\right\}.$$

Возьмем $g(x, y) \in E : g(x, y) = u(x) + c + v(y)$, $(u \perp c, u \perp v, v \perp c)$.

Введем в E (3) скалярное произведение для $g \in E$:

$$g(x, y) = u(x) + c + v(y) \text{ и } \tilde{g} \in E : \tilde{g}(x, y) = \tilde{u}(x) + \tilde{c} + \tilde{v}(y):$$

$$\left\langle g, \tilde{g}\right\rangle = \int_0^a u(x)\overline{\tilde{u}(x)}dx + c\bar{\tilde{c}} + \int_0^b v(y)\overline{\tilde{v}(y)}dy\,,$$

$$\|g\|^2 = \int_0^a |u(x)|^2\,dx + |c|^2 + \int_0^b |v(y)|^2\,dy\,.$$

Очевидно, что пространство E является гильбертовым пространством.

Определим оператор $\varphi : L^2(D) \to E$. Сначала зададим ортопроекторы $P_k : L^2(D) \to E_k$, $(k = 0,1,2)$ такие, что:

$$P_1 : L^2\left(D\right) \to E_1 : \left(P_1 f\right)\left(x\right) = \frac{1}{b}\int_0^b f\left(x,y\right)dy - \frac{1}{ab}\iint_D f\left(x,y\right)dxdy\,, \qquad (4)$$

$$P_2 : L^2\left(D\right) \to E_2 : \left(P_2 f\right)\left(y\right) = \frac{1}{a}\int_0^a f\left(x,y\right)dx - \frac{1}{ab}\iint_D f\left(x,y\right)dxdy\,, \qquad (5)$$

$$P_0 : L^2\left(D\right) \to E_0 : \left(P_0 f\right)\left(x\right) = \frac{1}{ab}\iint_D f\left(x,y\right)dxdy\,. \qquad (6)$$

Покажем, что $P_1 f \in E_1$:

$$\int_0^a \left(\left(P_1 f\right)\left(x,y\right)\right)dx = \int_0^a \left(\frac{1}{b}\int_0^b f\left(x,y\right)dy - \frac{1}{ab}\iint_D f\left(x,y\right)dxdy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{b}\iint_D f\left(x,y\right)dxdy - \frac{1}{b}\iint_D f\left(x,y\right)dxdy = 0\,.$$

Аналогично, $P_2 f \in E_2$, $P_0 f \in E_0$.

Несложно проверить, что операторы P_1, P_2, P_0 являются ортогональными проекторами, то есть $P_i^2 = P_i$, $P_i^* = P_i$, $P_i P_j = 0$, $i \neq j$.

Определим ортопроектор

$$\varphi = P_1 + P_0 + P_2\,, \qquad (7)$$

где $\varphi : L^2(D) \to E$, $\varphi = \varphi^*$, а P_1, P_0, P_2 имеют вид (4), (6), (5), соответственно.

Найдем $\sigma : E \to E$ такое, что $\sigma = \sigma^*$.

$$A - A^* = i\varphi^*\sigma\varphi\,;\ \sigma = \left((A - A^*)/i\right)\Big|_E\,.$$

$$\left(A - A^*\right)f\left(x,y\right) = \int_0^x\int_0^y f\left(t,s\right)dtds - \int_x^a\int_y^b f\left(t,s\right)dtds\,.$$

Вычислим, как действует оператор $A - A^*$ на $u(x)$, c, $v(y)$.

Для любого $c \in \mathbb{C} = E_0$:

$$\left(A - A^*\right)\left(c\right) = \int_0^x\int_0^y cdtds - \int_x^a\int_c^b cdtds = -abc + xbc + yac\,.$$

Подействуем на получившуюся функцию оператором φ:

$$P_0\left(-abc + xbc + yac\right) = \frac{1}{ab}\iint_D \left(-abc + xbc + yac\right)dxdy = 0\,;$$

$$P_1\left(-abc + xbc + yac\right) = \frac{1}{b}\int_0^b \left(-abc + xbc + yac\right)dy -$$

$$-\frac{1}{ab}\iint_D \left(-abc+xbc+yac\right)dxdy = xbc-\frac{abc}{2};$$

$$P_2\left(-abc+xbc+yac\right)=\frac{1}{a}\int_0^a \left(-abc+xbc+yac\right)dx-$$

$$-\frac{1}{ab}\iint_D \left(-abc+xbc+yac\right)dxdy = yac-\frac{abc}{2};$$

$$\varphi(-abc+xbc+yac)=(P_1+P_0+P_2)(-abc+xbc+yac)=xbc+yac-abc\in E.$$

Получили, что:

$$\sigma\begin{pmatrix}0\\c\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{i}\begin{pmatrix}xbc-abc/2\\0\\yac-abc/2\end{pmatrix}\in E_1+E_0+E_2.$$

Для любой функции $u(x)\in E_1$:

$$\left(A-A^*\right)(u)=\int_0^x\int_0^y u(t)\,dtds-\int_x^a\int_y^b u(t)\,dtds=$$

$$=y\int_0^x u(t)\,dt-(b-y)\int_x^a u(t)\,dt=-b\int_x^a u(t)\,dt.$$

Подействуем на полученную функцию оператором φ (7):

$$P_0\left(-b\int_x^a u(t)\,dt\right)=\frac{1}{ab}\iint_D\left(-b\int_x^a u(t)\,dt\right)dxdy=-\frac{b}{a}\int_0^a xu(x)\,dx;$$

$$P_1\left(-b\int_x^a u(t)\,dt\right)=\frac{1}{b}\int_0^b\left(-b\int_x^a u(t)\,dt\right)dy-\frac{1}{ab}\iint_D\left(-b\int_x^a u(t)\,dt\right)dxdy=$$

$$=-b\int_x^a u(t)\,dt+\frac{b}{a}\int_0^a tu(t)\,dt;$$

$$P_2\left(-b\int_x^a u(t)\,dt\right)=\frac{1}{a}\int_0^a\left(-b\int_x^a u(t)\,dt\right)dx-\frac{1}{ab}\iint_D\left(-b\int_x^a u(t)\,dt\right)dxdy=0.$$

Итак, мы имеем, что

$$\sigma\begin{pmatrix}u(x)\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{i}\begin{pmatrix}-b\int_x^a u(t)\,dt+\frac{b}{a}\int_0^a tu(t)\,dt\\-\frac{b}{a}\int_0^a xu(x)\,dx\\0\end{pmatrix}\in E_1+E_0+E_2.$$

Для любой функции $v(y) \in E_2$:

$$\left(A - A^*\right)(v) = \int_0^x \int_0^y v(s)\, dt ds - \int_x^a \int_y^b v(s)\, dt ds =$$

$$= x\int_0^y v(s)\, ds - (a-x)\int_y^b v(s)\, ds = -a\int_y^b v(s)\, ds \,.$$

Применим к данной функции оператор φ (7):

$$P_0\left(-a\int_y^b v(s)\, ds\right) = -\frac{a}{ab}\iint_D\left(\int_y^b v(s)\, ds\right) dxdy = -\frac{a}{b}\int_0^b yv(y)\, dy \,;$$

$$P_1\left(-a\int_y^b v(s)\, ds\right) = \frac{1}{b}\int_0^b\left(-a\int_y^b v(s)\, ds\right) dy - \frac{1}{ab}\iint_D\left(-a\int_y^b v(s)\, ds\right) dxdy = 0\,;$$

$$P_2\left(-a\int_y^b v(s)\, ds\right) = \frac{1}{a}\int_0^a\left(-a\int_y^b v(s)\, ds\right) dx - \frac{1}{ab}\iint_D\left(-a\int_y^b v(s)\, ds\right) dxdy =$$

$$= -a\int_y^b v(s)\, ds + \frac{a}{b}\int_0^b yv(y)\, dy \,.$$

Получили, что:

$$\sigma\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{a}{b}\displaystyle\int_0^b yv(y)\, dy \\ -a\displaystyle\int_y^b v(s)\, ds + \dfrac{a}{b}\displaystyle\int_0^b yv(y)\, dy \end{pmatrix} \in E_1 + E_0 + E_2 \,.$$

Итак, имеет место следующая лемма.

Лемма 1. *Если* σ *в* $E = E_1 \oplus E_0 \oplus E_2$ *имеет вид:*

$$\sigma\begin{pmatrix} u(x) \\ c \\ v(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} -b\displaystyle\int_x^a u(t)\, dt + \dfrac{b}{a}\displaystyle\int_0^a tu(t)\, dt & -\dfrac{b}{a}\displaystyle\int_0^a xu(x)\, dx & 0 \\ xbc - \dfrac{abc}{2} & 0 & yac - \dfrac{abc}{2} \\ 0 & -\dfrac{a}{b}\displaystyle\int_0^b yv(y)\, dy & -a\displaystyle\int_y^b v(s)\, ds + \dfrac{a}{b}\displaystyle\int_0^b yv(y)\, dy \end{pmatrix}, \quad (8)$$

то выполняется узловое соотношение:

$$A - A^* = i\varphi^*\sigma\varphi \,,$$

где оператор A *определен формулой (1), а оператор* φ *равен (7).*

Итак, построили оператор $\sigma : E \to E$.

Нами доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Совокупность*

$$\Delta = (A, L^2(D), \varphi, E, \sigma) \tag{9}$$

образует узел, где A *определяется условием (1),* φ *– условием (7),* E *– условием (3),* σ *– условием (8).*

Характеристическая функция. Вычислим характеристическую функцию узла (9):

$$S_\Delta(\lambda) = I - i\varphi(A - \lambda I)^{-1}\varphi^* \sigma .$$

Обозначим $(A - \lambda I)^{-1} \varphi^* \sigma g := f(x, y)$, тогда $\varphi^* \sigma g = (A - \lambda I) f$.

$$\left(A - \lambda I\right) f = Af - \lambda f = \int_0^x \int_0^y f\left(t, s\right) dt ds - \lambda f\left(x, y\right) = \varphi^* \sigma\left(u\left(x\right) + c + v\left(y\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{i}\left(-b\int_x^a u\left(t\right)dt - a\int_y^b v\left(s\right)ds + xbc + yac - abc \right).$$

Получим, что:

$$\int_0^x \int_0^y f\left(t, s\right) dt ds - \lambda f\left(x, y\right) = \frac{1}{i}\left(-b\int_x^a u\left(t\right)dt - a\int_y^b v\left(s\right)ds + xbc + yac - abc \right). \tag{10}$$

Подставим в равенство (10) $x = y = 0$:

$$-\lambda f\left(0,0\right) = -abc / i .$$

Продифференцируем равенство (10) по x:

$$\int_0^y f\left(x, s\right) ds - \lambda f'_x\left(x, y\right) = \frac{1}{i}\left(bu\left(x\right) + bc\right)$$

и положим $y = 0$, тогда $-\lambda f'_x(x, 0) = (b / i)(u(x) + c)$.

Продифференцируем (10) по y:

$$\int_0^x f\left(t, y\right) dt - \lambda f'_y\left(x, y\right) = \frac{1}{i}\left(av\left(y\right) + ac\right)$$

и положим $x = 0$, тогда $-\lambda f'_y(0, y) = (a / i)(v(y) + c)$.

Продифференцируем (10) по x и y, тогда

$$f(x, y) - \lambda f''_{xy}(x, y) = 0,$$

и получаем *краевую задачу Дарбу-Гурса* вида:

$$\begin{cases} f\left(x, y\right) - \lambda f''_{xy}\left(x, y\right) = 0, \ \lambda f\left(0,0\right) = abc / i, \\ -\lambda f'_x\left(x, 0\right) = \dfrac{b}{i}\left(u\left(x\right) + c\right), \ -\lambda f'_y\left(0, y\right) = \dfrac{a}{i}\left(v\left(y\right) + c\right). \end{cases} \tag{11}$$

Зная решение задачи (11) построим $\tilde{u}(x) \in E_1$, $\tilde{v}(y) \in E_2$, $\tilde{c} \in E_0$:

$$\begin{cases} -\lambda f(a,b) = \dfrac{ab\tilde{c}}{i},\ -\lambda f_x'(x,b) = \dfrac{b}{i}\left(\tilde{u}(x) + \tilde{c}\right),\ -\lambda f_y'(a,y) = \dfrac{a}{i}\left(\tilde{v}(y) + \tilde{c}\right). \end{cases} \quad (12)$$

Константа $\tilde{c}$ корректно определена, то есть одинаковая для всех этих равенств, что нетрудно проверить, интегрируя соответствующие уравнения систем (11) и (12).

Преобразовав начально-краевые условия (11) и (12), получим:

$$\begin{cases} -\lambda f(a,0) + \lambda f(0,0) = \dfrac{1}{i}abc,\ -\lambda f(0,b) + \lambda f(0,0) = \dfrac{1}{i}abc, \\ -\lambda f(a,b) + \lambda f(0,b) = \dfrac{1}{i}ab\tilde{c},\ -\lambda f(a,b) + \lambda f(a,0) = \dfrac{1}{i}ab\tilde{c}. \end{cases} \quad (13)$$

Учитывая равенство $f(x,y) = \lambda f_{xy}''(x,y)$ и условия из (11), (12), (13), подействуем на $f(x,y)$ оператором φ вида (7):

$$P_1 f = \frac{1}{b}\int_0^b \lambda f_{xy}''(x,y)\,dy - \frac{1}{ab}\iint_D \lambda f_{xy}''(x,y)\,dxdy = \frac{1}{i}\left(u(x) - \tilde{u}(x)\right).$$

$$P_2 f = \frac{1}{a}\int_0^a \lambda f_{xy}''(x,y)\,dx - \frac{1}{ab}\iint_D \lambda f_{xy}''(x,y)\,dxdy = \frac{1}{i}\left(v(y) - \tilde{v}(y)\right),$$

$$P_0 f = \frac{1}{i}\left(c - \tilde{c}\right).$$

Таким образом, получим следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть дан узел (9), тогда характеристическая функция данного узла $S_\Delta(\lambda)$ определяется отображением:*

$$S_\Delta(\lambda)\begin{pmatrix} u(x) \\ c \\ v(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u}(x) \\ \tilde{c} \\ \tilde{v}(y) \end{pmatrix},$$

где $\begin{pmatrix} u(x) \\ c \\ v(y) \end{pmatrix} \in E_1 \oplus E_0 \oplus E_2$, *при этом компоненты вектора* $\begin{pmatrix} \tilde{u}(x) \\ \tilde{c} \\ \tilde{v}(y) \end{pmatrix}$ *задаются формулами (12) через решение $f(x,y)$ задачи Дарбу-Гурса (11), причем граничные условия системы (11) задаются компонентами вектора* $\begin{pmatrix} u(x) \\ c \\ v(y) \end{pmatrix}$.

Сужение оператора. Рассмотрим сужение оператора двойного интегрирования (1) на подпространство L_0, которое содержится в пространстве $L^2(D)$:

$$L_0 = \{f(x,y) \in L^2(\mathrm{D}) \mid f(x,y) = f(xy)\};$$

$L_0 \subset L^2(D)$, поскольку функция, зависящая от произведения аргументов, является интегрируемой.

Вычислим норму в этом пространстве:

$$\left\| f\left(xy\right)\right\|_{L_0}^2 = \int_0^a \int_0^b \left| f\left(xy\right)\right|^2 dxdy = \int_0^a \frac{dx}{x} \int_0^{bx} \left| f\left(t\right)\right|^2 dt .$$

Зададим скалярное произведение в L_0 :

$$\left\langle f,g\right\rangle_{L_0} = \int_0^a \frac{d\left(bx\right)}{bx} \int_0^{bx} f\left(t\right)\overline{g\left(t\right)}dt = \int_0^l f\left(t\right)\overline{g\left(t\right)}dt \int_t^l \frac{ds}{s} = \int_0^l f\left(t\right)\overline{g\left(t\right)}dt \ln\frac{l}{t} .$$

Вычислим, как действует оператор (1) на подпространстве L_0 . Легко видеть, что:

$$\left(Af\right)\Big|_{L_0}\left(t\right) = \int_0^x \frac{dty}{ty} \int_0^{ty} f\left(t\right)dt = \int_0^t f\left(\xi\right)d\xi \ln\frac{t}{\xi} .$$

Таким образом,

$$\left(Af\right)\Big|_{L_0}\left(t\right) = \int_0^t f\left(\xi\right)d\xi \ln\frac{t}{\xi} . \tag{14}$$

Найдем сопряженный оператор к (14) из соотношения

$$\left\langle Af,g\right\rangle = \left\langle f,A^* g\right\rangle :$$

$$\left\langle Af,g\right\rangle = \int_0^l \left(Af\right)\left(t\right)\overline{g\left(t\right)}\ln\frac{l}{t}dt = \int_0^l f\left(\xi\right)d\xi \frac{\ln\frac{l}{\xi}}{\ln\frac{l}{\xi}} \int_\xi^l \overline{g\left(t\right)}\ln\frac{t}{\xi}\ln\frac{l}{t}dt = \left\langle f,A^* g\right\rangle .$$

Итак, $\left(A^* f\right)\left(t\right) = \dfrac{1}{\ln\frac{l}{t}} \displaystyle\int_t^l f\left(\xi\right)\ln\frac{\xi}{t}\ln\frac{l}{\xi}d\xi$.

Включим оператор (14) в узел.

Пусть $H = L_0$. Построим гильбертово пространство E. Вычислим $B = (A - A^*)/i$. Обозначим $\overline{BH} = E$. Найдем замыкание образа оператора B . Обозначим $\psi(t) = -i(A - A^*)f$, тогда

$$\psi\left(t\right) = \frac{1}{i}\left(\int_0^t f\left(\xi\right)d\xi \ \ln\frac{t}{\xi} - \frac{1}{\ln\frac{l}{t}} \int_t^l f\left(\xi\right)\ln\frac{\xi}{t}\ln\frac{l}{\xi}d\xi \right).$$

Покажем, что функции $\psi(t)$ заполняют все пространство L_0 . Для этого продифференцируем $\psi(t)$ по t :

$$\psi'(t)=\frac{1}{i}\left(\int_0^t \frac{f(\xi)}{t}d\xi-\int_t^l \frac{f(\xi)}{t}\frac{\ln\frac{l}{\xi}}{\ln\frac{l}{t}}\left(\frac{\ln\frac{\xi}{t}}{\ln\frac{l}{t}}-1\right)d\xi\right).$$

Подставляя в это выражение $f(\xi)=\xi^n$, получим степенную функцию. Значит, в качестве E можно взять все пространство L_0;

$$\varphi: L_0 \to E = L_0,$$

а в качестве φ можно взять единичный оператор $\varphi = I$;

$$\sigma: E \to E, \sigma=\sigma^*, A-A^*=i\varphi^*\sigma\varphi,\ \sigma=((A-A^*)/i)\big|_E .$$

$$\sigma f=\frac{1}{i}\int_0^t f(\xi)\frac{\ln\frac{t}{\xi}}{\ln\frac{l}{t}}d\xi\ln\frac{l}{t}+\frac{1}{i}\int_t^l f(\xi)\frac{\ln\frac{t}{\xi}}{\ln\frac{l}{t}}\ln\frac{l}{\xi}d\xi . \tag{15}$$

Таким образом, оператор $A: L_0 \to L_0$ включили в узел:

$$\Delta=(A, L_0, I, L_0, \sigma) . \tag{16}$$

где оператор A имеет вид (14), а σ определяется формулой (15).

Вычислим характеристическую функцию узла (16):

$$S_\Delta(\lambda)=I-i\varphi(A-\lambda I)^{-1}\varphi^*\sigma .$$

Обозначим $(A-\lambda I)^{-1}\varphi^*\sigma g := f$, тогда

$$\varphi^*\sigma=(A-\lambda I)f \quad \text{или} \quad \sigma g=(A-\lambda I)f .$$

Итак, $Af-\lambda f=\sigma g$. С учетом (14) и (15) получим:

$$\int_0^t f(\xi)\ln\frac{t}{\xi}d\xi-\lambda f(t)=\frac{1}{i}\int_0^t g(\xi)\frac{\ln\frac{t}{\xi}}{\ln\frac{l}{t}}\cdot\ln\frac{l}{t}d\xi+\frac{1}{i}\int_t^l g(\xi)\frac{\ln\frac{t}{\xi}}{\ln\frac{l}{t}}\ln\frac{l}{\xi}d\xi ,$$

а, умножив обе части равенства на $\ln\frac{t}{l}$, приходим к уравнению вида:

$$-\int_0^t f(\xi)\ln\frac{t}{\xi}d\xi\cdot\ln\frac{t}{l}+\lambda f(t)\ln\frac{t}{l}=\frac{1}{i}\left[-\int_0^t g(\xi)\ln\frac{t}{\xi}d\xi\cdot\ln\frac{t}{l}+\int_t^l g(\xi)\ln\frac{t}{\xi}\ln\frac{l}{\xi}d\xi\right] \tag{17}$$

Продифференцируем (17) по t и преобразуем:

$$-\int_0^t\big(f(\xi)+ig(\xi)\big)d\xi\cdot\ln\frac{t}{l}+\lambda t f_t'(t)\cdot\ln\frac{t}{l}+\lambda f(t)-$$

$$-\int_0^t\big[f(\xi)+ig(\xi)\big]\cdot\ln\frac{t}{\xi}d\xi+i\int_t^l g(\xi)\ln\frac{l}{\xi}d\xi=0 . \tag{18}$$

Обозначим

$$\psi(t)=\int_0^t\left(f(\xi)+ig(\xi)\right)\ln\frac{t}{\xi}d\xi\ , \qquad (19)$$

тогда

$$\psi_t'(t)=\int_0^t\left(f(\xi)+ig(\xi)\right)\cdot\frac{1}{t}d\xi\ . \qquad (20)$$

Применяя *теорему о среднем* к равенству (19)

$$\psi(t)=[f(c)+ig(c)]\cdot\ln\frac{t}{c}\cdot t\ ,$$

где $c\in(0;t)$, и переходя к пределу при $t\to 0$ легко видеть, что $\lim\limits_{t\to 0}\psi(t)=0$, то есть имеет место начальное условие вида:

$$\psi(0)=0\ . \qquad (21)$$

При этом равенство (18) примет вид:

$$t\ln\frac{t}{l}\cdot\left(\lambda f_t'(t)-\psi'(t)_t\right)+\lambda f(t)-\psi(t)+i\int_t^l g(\xi)\ln\frac{l}{\xi}d\xi=0\ . \qquad (22)$$

Пусть

$$\lambda f(t)-\psi(t)=\Phi(t)\ , \qquad (23)$$

тогда из (22) получим:

$$t\ln\frac{t}{l}\Phi_t'(t)+\Phi(t)+i\int_t^l g(\xi)\ln\frac{l}{\xi}d\xi=0\ . \qquad (24)$$

Продифференцируем (24) по t и преобразуем:

$$t\ln\frac{t}{l}\Phi_{tt}''(t)+\left(\ln\frac{t}{l}+2\right)\Phi_t'(t)+ig(t)\ln\frac{t}{l}=0\ . \qquad (25)$$

Сделаем в уравнении (25) замену

$$\Phi_t'(t)=Y(t) \qquad (26)$$

и преобразуем его, тогда получим линейное уравнение вида:

$$Y'(t)+\frac{\ln\frac{t}{l}+2}{t\ln\frac{t}{l}}Y(t)+i\frac{g(t)}{t}=0\ . \qquad (27)$$

Решая уравнение (27), получим:

$$Y(t)=-\frac{i}{t\ln^2\frac{t}{l}}\int_0^t g(\xi)\ln^2\frac{\xi}{l}d\xi+\frac{lC}{t\ln^2\frac{t}{l}}\ . \qquad (28)$$

Из (20), (23), (26) вытекает начальное условие

$$Y(0)=\lambda f'(0)-f(0)-ig(0)\ .$$

Причем, применяя теорему о среднем к уравнению (28), получаем решение уравнения (27) в виде:

$$Y(t) = -\frac{i}{t\ln^2\frac{t}{l}}\int_0^t g(\xi)\ln^2\frac{\xi}{l}\,d\xi\,. \tag{29}$$

Отсюда, учитывая замену (26) приходим к уравнению

$$\Phi(x) = -i\int_0^x \frac{1}{t\ln^2\frac{t}{l}}\left(\int_0^t g(\xi)\ln^2\frac{\xi}{l}\,d\xi\right)dt\,. \tag{30}$$

Поменяв порядок интегрирования в (30), получим:

$$\Phi(x) = -i\int_0^x g(\xi)\ln^2\frac{\xi}{l}\,d\xi\int_\xi^x \frac{dt}{t\ln^2\frac{t}{l}} + C_2\,,$$

то есть

$$\Phi(t) = -i\int_0^t g(\xi)\frac{\ln\frac{\xi}{l}\cdot\ln\frac{t}{\xi}}{\ln\frac{t}{l}}\,d\xi + C_2\,. \tag{31}$$

Поскольку $\Phi(t) = \lambda f(t) - \psi(t)$ и действует условие (21), то имеем следующее начальное условие: $\Phi(0) = \lambda f(0)$. Тогда с учетом теоремы о среднем из (31) получим

$$\Phi(t) = -i\int_0^t g(\xi)\frac{\ln\frac{\xi}{l}\cdot\ln\frac{t}{\xi}}{\ln\frac{t}{l}}\,d\xi + \lambda f(0)\,. \tag{32}$$

Из (19), (23) и (32) следует, что

$$\lambda f(t) - \int_0^t \left[f(\xi) + ig(\xi)\right]\cdot\ln\frac{t}{\xi}\,d\xi = -i\int_0^t g(\xi)\cdot\frac{\ln\frac{\xi}{l}\cdot\ln\frac{t}{\xi}}{\ln\frac{t}{l}}\,d\xi + \lambda f(0)\,. \tag{33}$$

Прибавив к обеим частям равенства (33) $i\lambda g(t)$, получим:

$$\lambda\left[f(t) + ig(t)\right] - \int_0^t \left[f(\xi) + ig(\xi)\right]\cdot\ln\frac{t}{\xi}\,d\xi =$$

$$= -i\int_0^t g(\xi)\cdot\frac{\ln\frac{\xi}{l}\cdot\ln\frac{t}{\xi}}{\ln\frac{t}{l}}\,d\xi + \lambda f(0) + i\lambda g(t). \tag{34}$$

В равенстве (34) сделаем замену

$$X(t) = f(t) + ig(t)\,, \tag{35}$$

тогда

$$\lambda X(t)-\int_0^t X(\xi)\ln\frac{t}{\xi}d\xi=-i\int_0^t g(\xi)\cdot\frac{\ln\frac{\xi}{l}\cdot\ln\frac{t}{\xi}}{\ln\frac{t}{l}}d\xi+\lambda f(0)+i\lambda g(t). \qquad (36)$$

Продифференцируем равенство (36) по t :

$$\lambda X'(t)-\int_0^t X(\xi)\frac{1}{t}d\xi=-i\int_0^t g(\xi)\cdot\frac{\ln^2\frac{\xi}{l}}{\ln^2\frac{t}{l}}\cdot\frac{1}{t}d\xi+i\lambda g_t'. \qquad (37)$$

Умножим обе части равенства (37) на t :

$$\lambda tX'(t)-\int_0^t X(\xi)d\xi=-i\int_0^t g(\xi)\cdot\frac{\ln^2\frac{\xi}{l}}{\ln^2\frac{t}{l}}d\xi+i\lambda tg_t'. \qquad (38)$$

Продифференцируем равенство (38) по t, а затем обе части равенства умножим на t/λ, тогда получим уравнение вида:

$$t^2X_{tt}''(t)+tX_t'(t)-\frac{1}{\lambda}tX(t)=-itg(t)+2i\int_0^t g(\xi)\cdot\frac{\ln^2\frac{\xi}{l}}{\ln^3\frac{t}{l}}d\xi+i\lambda tg_t'(t)+i\lambda t^2\,g_{tt}''(t). \quad (39)$$

Обозначим

$$\tilde f(t)=-itg(t)+2i\int_0^t g(\xi)\cdot\frac{\ln^2\frac{\xi}{l}}{\ln^3\frac{t}{l}}d\xi+i\lambda tg_t'(t)+i\lambda t^2\,g_{tt}''(t), \qquad (40)$$

тогда уравнение (39) примет вид:

$$t^2X_{tt}''(t)+tX_t'(t)-\frac{1}{\lambda}tX(t)=\tilde f(t). \qquad (41)$$

Соответствующее однородное уравнение для (41) представляет собой *модифицированное уравнение Бесселя* вида:

$$t^2X_{tt}''(t)+tX_t'(t)-\frac{1}{\lambda}tX(t)=0. \qquad (42)$$

Из [6] следует, что решение уравнения (42) представимо в виде:

$$X_{одн.}(t)=Z_0(2\sqrt{-t/\lambda})=C_1J_0(t)+C_2Y_0(t), \qquad (43)$$

где

$$J_0(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t/\lambda)^k}{k!\,\Gamma(k+1)}, \qquad (44)$$

$$Y_0(t)=\frac{1}{\pi}\ln(-t/\lambda)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t/\lambda)^k}{k!\,\Gamma(k+1)}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t/\lambda)^k\,\Gamma'(k+1)}{(k!)^3} \qquad (45)$$

являются *бесселевыми функциями* первого и второго рода, соответственно.

Применяя метод вариации произвольных постоянных к уравнению (41), получаем соответствующее частное решение уравнения (41):

$$X_{частн.}(t)=\left(-\int_0^t \frac{\tilde f(\xi)Y_0(\xi)}{\xi^2 W\left(Y_0(\xi);J_0(\xi)\right)}d\xi\right)\cdot J_0(t)+$$

$$+\left(\int_0^t \frac{\tilde f(\xi)J_0(\xi)}{\xi^2 W\left(Y_0(\xi);J_0(\xi)\right)}d\xi\right)\cdot Y_0(t). \tag{46}$$

где $W(Y_0(\xi);J_0(\xi))=J_0(\xi)Y_0{}'(\xi)-Y_0(\xi)J_0{}'(\xi)$ – *определитель Вронского*.

Таким образом, общее решение уравнения (41) представляет собой следующую сумму решения однородного уравнения (43) и соответствующего частного решения (46):

$$X(t)=C_1J_0(t)+C_2Y_0(t)-J_0(t)\cdot\int_0^t \frac{\tilde f(\xi)Y_0(\xi)}{\xi^2 W\left(Y_0(\xi);J_0(\xi)\right)}d\xi+$$

$$+Y_0(t)\cdot\int_0^t \frac{\tilde f(\xi)J_0(\xi)}{\xi^2 W\left(Y_0(\xi);J_0(\xi)\right)}d\xi. \tag{47}$$

Найдем начальные условия дифференциального уравнения (41).

Применяя в уравнении (38) теорему о среднем и переходя к пределу при $t\to 0$, получим первое начальное условие:

$$(tX'(t))_t\big|_{t=0}=i\tilde g_0, \tag{48}$$

где $\tilde g_0=(tg'(t))_t\big|_{t=0}$.

Тогда с учетом (48) из равенства (47), умноженного на t, получим:

$$(tX_t'(t))\big|_{t=0}=C_1(tJ_0'(t))\big|_{t=0}+C_2(tY_0'(t))\big|_{t=0},$$

поскольку $(tJ_0(t))\big|_{t=0}=0$ и $\lim\limits_{t\to 0}(tY_0(t))=0$.

С учетом того, что

$\lim\limits_{t\to 0}(tJ_0'(t))=0$ и $\lim\limits_{t\to 0}(tY_0'(t))=1/\pi$, имеем $(tX_t'(t))\big|_{t=0}=1/\pi\cdot C_2$,

то есть

$$C_2=i\pi\tilde g_0. \tag{49}$$

Подставив равенство (49) в (47), получим:

$$X(t)=C_1J_0(t)-J_0(t)\cdot\int_0^t \frac{\tilde f(\xi)Y_0(\xi)}{\xi^2 W(Y_0(\xi);J_0(\xi))}d\xi+$$

$$+\left(i\pi\tilde g_0+\int_0^t \frac{\tilde f(\xi)J_0(\xi)}{\xi^2 W(Y_0(\xi);J_0(\xi))}d\xi\right)\cdot Y_0(t). \tag{50}$$

Поскольку $J_0(0)=1$, а $\left(i\pi\tilde g_0+\int_0^t \frac{\tilde f(\xi)J_0(\xi)}{\xi^2 W(Y_0(\xi);J_0(\xi))}d\xi\right)\cdot Y_0(t)\underset{t\to 0}{\to}0$, в силу того, что

$$i\pi\tilde{g}_0+\int_0^t \frac{\tilde{f}(\xi)J_0(\xi)}{\xi^2 W(Y_0(\xi);J_0(\xi))}d\xi \underset{t\to 0}{\to} 0$$ быстрее, чем $Y_0(t)\approx(1/\pi)\ln\left(-t/\lambda\right)$ при $t\to 0$. Тогда

$$(X(t))\big|_{t=0}=0\,, \tag{51}$$

Из (50) следует, что общее решение уравнения (41) с учетом граничных условий (48) и (51) имеет вид:

$$X(t)=-J_0(t)\cdot\int_0^t \frac{\tilde{f}(\xi)Y_0(\xi)}{\xi^2 W\left(Y_0(\xi);J_0(\xi)\right)}d\xi+$$
$$+\left(i\pi\tilde{g}_0+\int_0^t \frac{\tilde{f}(\xi)J_0(\xi)}{\xi^2 W\left(Y_0(\xi);J_0(\xi)\right)}d\xi\right)\cdot Y_0(t). \tag{52}$$

Из замены (35), следует, что

$$f(t)+ig(t)=-J_0(t)\cdot\int_0^t \frac{\tilde{f}(\xi)Y_0(\xi)}{\xi^2 W\left(Y_0(\xi);J_0(\xi)\right)}d\xi+$$
$$+\left(i\pi\tilde{g}_0+\int_0^t \frac{\tilde{f}(\xi)J_0(\xi)}{\xi^2 W\left(Y_0(\xi);J_0(\xi)\right)}d\xi\right)\cdot Y_0(t).$$

Таким образом, решение уравнения (17) имеет вид:

$$f(t)=-ig(t)-J_0(t)\cdot\int_0^t \frac{\tilde{f}(\xi)Y_0(\xi)}{\xi^2 W\left(Y_0(\xi);J_0(\xi)\right)}d\xi+$$
$$+\left(i\pi\tilde{g}_0+\int_0^t \frac{\tilde{f}(\xi)J_0(\xi)}{\xi^2 W\left(Y_0(\xi);J_0(\xi)\right)}d\xi\right)\cdot Y_0(t), \tag{53}$$

где $J_0(t)$ – из (44), $Y_0(t)$ – из (45), $\tilde{f}(t)$ – из (40).

Вернемся к характеристической функции узла (16):

$$S_\Delta(\lambda)=I-i\varphi(A-\lambda I)^{-1}\varphi^*\sigma\,,$$

где $(A-\lambda I)^{-1}\varphi^*\sigma g := f$, а f из (53).

Таким образом, получили следующую теорему.

Теорема 3. *Характеристическая функция узла (16) равна* $(S(\lambda)g)(t)=$ $=g(t)-if(t)$, *где* $f(t)$ *имеет вид (53), а* $g(t)\in L_0$ *– подпространство функций* $f(x;y)=f(xy)$ *из* $L^2(D)$.

Выводы. Таким образом, в данной работе изучен оператор двойного интегрирования вида $(Af)(x,y)=\int_0^x\int_0^y f(t,s)dtds$, который действует в пространстве $L^2(D)$, где $D=[0,a]\times[0,b]$. Установлено, что харктеристическая функция этого оператора является функцией монодромии для задачи Дарбу-

Гурса с данными на характеристиках. В работе также рассмотрено сужение оператора двойного интегрирования вида

$$(Af)\Big|_{L_0}(t)=\int_0^t f(\xi)d\xi\ln\frac{t}{\xi}$$

на подпространство

$$L_0=\{f(x,y)\in L^2(\mathrm{D})\ \big|f(x,y)=f(xy)\}.$$

Осуществлено включение данных операторов в узел, описаны параметры узла, вычислены характеристические функции узлов.

Результаты статьи могут служить основой для получения новых модельных представлений операторов, а также для моделирования случайных процессов в рамках корреляционной теории.

Список литературы: **1.** *Лившиц М.С.*, *Янцевич А.А.* Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. – Х.: Изд-во Харьк. ун-та, 1971. – 160 с. **2.** *Лившиц М.С.* О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов // Математический сборник. – 1954. – Т. 34 (76). – №1. – С. 145 – 198. **3.** *Золотарев В.А.* Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов. – Х.: ХНУ, 2003. – 342 с. **4.** *Бродский М.С.* Треугольные и жордановы представления линейных операторов. – М.: Наука, 1969. – 287 с. **5.** *Надь Б. С.*, *Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, 1970. – 431 с. **6.** *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / *Э. Камке*; перевод с нем. С. В. Фомина. – Изд. четв., испр. – М.: Наука, 1971. – 576 с.

Bibliography (transliterated): **1.** Livshic, M. S. *Teorija operatornyh uzlov v gil'bertovyh prostranstvah*. Kharkiv: Izd-vo Khark. un-ta, 1971. Print. **2.** Livshic, M. S. "O spektral'nom razlozhenii linejnyh nesamosoprjazhennyh operatorov." *Matematicheskij sbornik*. Vol. 34 (76). No. 1. 1954. 145–198. Print. **3.** Zolotarev, V. A. *Analiticheskie metody spektral'nyh predstavlenij nesamosoprjazhennyh i neunitarnyh operatorov*. Kharkiv: KhNU, 2003. Print. **4.** Brodskij, M. S. *Treugol'nye i zhordanovy predstavlenija linejnyh operatorov*. Moscow: Nauka, 1969. Print. **5.** Nad', B. S., and Ch. Fojash. *Garmonicheskij analiz operatorov v gil'bertovom prostranstve*. Moscow: Mir, 1970. Print. **6.** Kamke, Je. *Spravochnik po obyknovennym differencial'nym uravnenijam*. *Transl. from german*. *S. V. Fomin*. *4th ed*., *ispr*. Moscow: Nauka, 1971. Print.

Поступила(received) 15.04.2015

УДК 621.43

А.М. ЛЕВТЕРОВ, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., ИПМаш НАНУ, Харьков;
Л.И. ЛЕВТЕРОВА, вед. инженер, ИПМаш НАНУ, Харьков;
В.Д. САВИЦКИЙ, инженер, ИПМаш НАНУ, Харьков

ОСОБЕННОСТИ ЭМИССИИ ОКСИДОВ АЗОТА ПРИ РАБОТЕ ДИЗЕЛЯ НА БИОДИЗЕЛЬНОМ ТОПЛИВЕ И ВОЗМОЖНЫЕ МЕТОДЫ ЕЕ СНИЖЕНИЯ

Представлен анализ и попытки объяснения в научных публикациях особенностей образования оксидов азота при работе двигателя с воспламенением от сжатия на метиловых и этиловых эфирах жирных кислот (биодизельные топлива) и обозначены методы снижения содержания NO_x в отработавших газах. Исследование сгорания биодизельных топлив осложняется их многообрази-