al'noi' diagnostyky vibracijnyh ob''jektiv (teoretychni osnovy ta vprovadzhennja). *Dis*. … *d-ra tehn. nauk*. Kharkiv, 2014. Print. **7.** Kristian, Nejgel. *C# 5.0 i platforma .NET 4.5 dlja professionalov. Professional C# 5.0 and .NET 4.5*. Moscow: «Dialektika», 2013. Print. **8.** Hejlsberg, A., et al. *Jazyk programmirovanija C#. Klassika Computers Science*. 4^{th} *ed. izdanie*. St. Petersburg: «Piter», 2012. Print.

Надійшла (received) 13.05.2015

УДК 517.955.8

Е.А. НАБОКА, канд. физ.-мат. наук, ст. преп., НТУ «ХПИ»

СИНХРОНИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ПЛАСТИН БЕРГЕРА С НЕЛИНЕЙНЫМ ВНУТРЕННИМ И ГРАНИЧНЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ. ЧАСТЬ 1

Рассматривается модель Бергера нелинейных колебаний двух одинаковых упруго связанных пластин с частично защемленной и частично свободной границей. Предполагается, что нелинейные диссипационные силы действуют во внутренней части пластин и на свободной части их границ. Изучена зависимость структуры глобального аттрактора системы от параметра γ, пропорционального интенсивности взаимодействия пластин. Доказано, что верхний предел аттрактора при $\gamma \to \infty$ принадлежит диагонали фазового пространства системы, что означает наличие эффекта синхронизации динамики пластин в пределе, когда интенсивность связи пластин системы и время стремятся к бесконечности.

Ключевые слова: модель Бергера, упруго связанные пластины, асимптотическая синхронизация, нелинейная диссипация, свободная граница.

Введение. Разнообразные явления синхронизации составных систем можно наблюдать в физике, химии, биологии, социальном поведении человека и др. Различные аспекты синхронизации изучались с использованием математических теорий, численных и физических экспериментов, статистических рассчетов и так далее [1, 2]. С математической точки зрения синхронизация связанных диссипативных уравнений изучалась *Арамановичем* и *Родригесом* [3, 4], *Клойденом* и *Карабалло* [5, 6]. Большинство имеющихся результатов относятся к случаю конечномерных диссипативных систем. Для бесконечномерного случая доступны результаты, описывающие явления синхронизации параболических составных систем [7, 8]. Синхронизация составной системы общего вида с *липшицевой нелинейностью* рассмотрена в [9]. Синхронизация связанных *пластин Бергера* изучалась в работах [10, 11] для случая линейного внутреннего демпфирования, в статье [12] для случая двух связанных пластин с нелинейным внутренним демпфированием, в [13] рассмотрена синхронизация двух частично связанных пластин.

Постановка задачи. В данной работе рассматривается система двух связанных пластин с частично защемленной и частично свободной границей (рис. 1). Предполагается, что в состоянии покоя пластины располагаются одна под другой в параллельных плоскостях. Обозначим $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ область, которую занимает пластина в состоянии покоя. Пусть функции $u(x, t), v(x, t)$ –

вертикальные отклонения пластин относительно состояния покоя, зависящие от пространственной переменной $x=(x_1, x_2)\in\mathbb{R}^2$ и переменной времени $t\ge 0$.

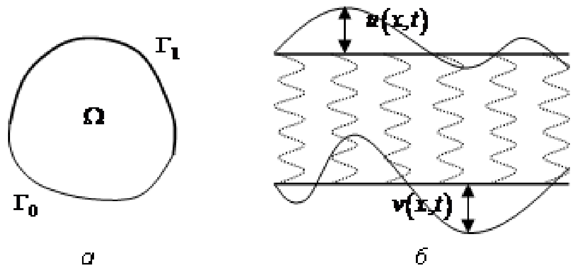

Рис. 1 – Система связанных пластин:
а – Ω – внутренняя область пластины, Γ_0 – защемленная часть границы, Γ_1 – свободная часть границы; *б* – $u(x,t), v(x,t)$ – вертикальные отклонения пластин относительно состояния покоя в точке $x\in\Omega$ в момент времени t.

Соответствующая математическая модель, построенная с использованием *гипотез Бергера* [14], имеет следующий вид:

$$\begin{cases} u_{tt}+B(u_t)+\Delta^2 u+\left(Q-\beta\int\limits_\Omega |\nabla u|^2\, d\Omega\right)\Delta u+\gamma\left(u-v\right)=p, \\ v_{tt}+B(v_t)+\Delta^2 v+\left(Q-\beta\int\limits_\Omega |\nabla v|^2\, d\Omega\right)\Delta v+\gamma\left(v-u\right)=p, \end{cases} \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0}=u^0,\quad v\big|_{t=0}=v^0,\quad u_t\big|_{t=0}=u^1,\quad v_t\big|_{t=0}=v^1. \tag{2}$$

Пусть граница области Ω состоит из двух непересекающихся частей $\partial\Omega=\Gamma_0\bigcup\Gamma_1 : \Gamma_0\bigcap\Gamma_1=\varnothing$. На части границе Γ_0 имеем условия защемления:

$$u=\partial_\nu u=v=\partial_\nu v=0, \tag{3}$$

а на части границы Γ_1 – свободные начальные условия:

$$\Delta u+\left(1-\mu\right)\Sigma_1 u=0,\quad \Delta v+\left(1-\mu\right)\Sigma_1 v=0,$$

$$\partial_n\Delta u+\left(1-\mu\right)\Sigma_2 u=d(x)g(u_t)+\sigma u-\left(Q-\beta\int\limits_\Omega |\nabla u|^2\, d\Omega\right)\partial_n u,$$

$$\partial_n\Delta v+\left(1-\mu\right)\Sigma_2 v=d(x)g(v_t)+\sigma v-\left(Q-\beta\int\limits_\Omega |\nabla v|^2\, d\Omega\right)\partial_n v. \tag{4}$$

Граничные операторы Σ_i определены равенствами:

$\Sigma_1 z=2n_1 n_2 z_{x_1x_2}-n_1^2 z_{x_2x_2}-n_2^2 z_{x_1x_1}$, $\Sigma_2 z=\partial_\tau((n_1^2-n_2^2)z_{x_1x_2}+n_1n_2(z_{x_2x_2}-z_{x_1x_1}))$,

где $n=(n_1,n_2)$ – единичный вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega$, а τ –

единичный касательный вектор. Предположим, что константы β, μ, σ положительные, а константа Q принимает произвольное вещественное значение. Операторы $B(z)=\tilde{d}(x)b(z)$ и $d(x)g(z)$ отвечают за механизм диссипации во внутренней части пластины и на ее границе. Функция $p=p(x)\in L_2(\Omega)$ описывает поперечные нагрузки, приложенные к пластине. Слагаемое $\gamma(u-v)$ учитывает связь пластин системы, причем коэффициент $\gamma\geq 0$ пропорционален интенсивности связи.

Рассматриваем задачу (1) – (4) при следующих условиях на операторы внутреннего и внешнего демпфирования:

1. *(внутреннее демпфирование)*

$$B(z)=\tilde{d}(x)b(z):\quad \tilde{d}(x)\in L_\infty(\Omega);\quad \tilde{d}(x)>0,\, x\in\Omega;$$

$$b(z)\in C^1(\mathbb{R});\quad b(0)=0;\quad b'(z)>0,\, \forall z\in\mathbb{R};$$

$$\exists\, m_1, M_1>0: m_1\leq b'(z)\leq M_1\left(1+zb(z)\right),\, |z|\geq 1;$$

2. *(граничное демпфирование)*

$$d(x)\in L_\infty(\Gamma_1),\quad d(x)>0,\, x\in\Gamma_1;$$

$$g(z)\in C^1(\mathbb{R});\quad g(0)=0;\quad g'(z)\geq m_2>0,\, \forall z\in\mathbb{R};$$

$$\exists M_2>0: g'(z)\leq M_2(1+zg(z)),\, |z|\geq 1.$$

Динамическая система и существование компактного глобального аттрактора. Напомним некоторые определения [15]:

Определение 1. Пара функций $(u(x,t),v(x,t))$, принадлежащих классу $C([0,T];H^2_{\Gamma_0}(\Omega))\bigcap C^1([0,T];\mathrm{L}_2(\Omega))$, называется *сильным решением* задачи (1) – (4) на интервале $[0,T]$, если одновременно выполняются следующие условия:

- $u,v\in H^4(\Omega)$ для почти всех $t\in[0,T]$, функции u,v абсолютно непрерывны со значениями в $H^2_{\Gamma_0}(\Omega)$ и $u_t, v_t\in L_1(a,b;H^2_{\Gamma_0}(\Omega))$ для всех $0<a<b<T$;
- u_t, v_t – абсолютно непрерывные функции со значениями в $L_2(\Omega)$, а производные $u_{tt}, v_{tt}\in L_1(a,b;L_2(\Omega))$ для всех $0<a<b<T$;
- функции u,v удовлетворяют начальным условиям (2);
- функции u,v удовлетворяют уравнениям (1) и граничным условиям (3) – (4) для почти всех $t\in(0,T)$.

Определение 2. Пара функций $(u(x,t),v(x,t))$, принадлежащих классу $C([0,T];H^2_{\Gamma_0}(\Omega))\bigcap C^1([0,T];\mathrm{L}_2(\Omega))$ и удовлетворяющих начальным условиям (2), называется *слабым решением* задачи (1) – (4) на интервале $[0,T]$, если существует последовательность $\{(u_n(x,t),v_n(x,t))\}$ сильных решений задачи (1) – (4), сходящихся к $(u(x,t),v(x,t))$ в следующем смысле:

$$\lim_{n\to\infty}\max_{t\in[0,T]}\Big(\|u_t(t)-u_{nt}(t)\|_{L_2(\Omega)}+\|v_t(t)-v_{nt}(t)\|_{L_2(\Omega)}+$$
$$+\|u(t)-u_n(t)\|_{H_2(\Omega)}+\|v(t)-v_n(t)\|_{H_2(\Omega)}\Big)=0.$$

Теорема 1. *Задача (1) – (4) корректно разрешима в пространстве* $H=[H^2_{\Gamma_0}(\Omega)]^2\times[L_2(\Omega)]^2$, *то есть для любых начальных условий* $(u^0,v^0,u^1,v^1)\in H$ *существует единственное слабое решение* $(u(x,t),v(x,t))$ *задачи (1) – (4). Решение удовлетворяет следующему энергетическому неравенству:*

$$\mathfrak{E}(t)+\int_0^t\int_\Omega B(u_t)u_t d\Omega d\tau+\int_0^t\int_\Omega B(v_t)v_t d\Omega d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_{\Gamma_1} d(x)j_g(u_t)d\Gamma d\tau+\int_0^t\int_{\Gamma_1} d(x)j_g(v_t)d\Gamma d\tau\le\mathfrak{E}(0), \qquad (5)$$

где выпуклая функция $j_g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ определяется интегралом

$$j_g(z)=\int_0^z g(\xi)d\xi,\ z\in\mathbb{R},$$

полная энергия системы $E(t)$ имеет вид

$$\mathfrak{E}(t)=E(t)-\frac{Q}{2}\left(\int_\Omega|\nabla u|^2 d\Omega+\int_\Omega|\nabla v|^2 d\Omega\right)-\int_\Omega p(u+v)d\Omega, \qquad (6)$$

а ее положительная часть $E(t)$ находится по формуле

$$E(t)=\frac{1}{2}\Big(\|u_t\|^2_{L_2(\Omega)}+\|v_t\|^2_{L_2(\Omega)}+a(u,u)+a(v,v)+\gamma\|u-v\|^2_{L_2(\Omega)}\Big)+$$
$$+\frac{\sigma}{2}\Big(\|u\|^2_{L_2(\Gamma_1)}+\|v\|^2_{L_2(\Gamma_1)}\Big)+\frac{\beta}{2}\left(\left(\int_\Omega|\nabla u|^2 d\Omega\right)^2+\left(\int_\Omega|\nabla v|^2 d\Omega\right)^2\right),$$

где $a(y,z)=\int_\Omega\Big(\mu\Delta y\Delta z+(1-\mu)\big(y_{x_1x_1}z_{x_1x_1}+y_{x_2x_2}z_{x_2x_2}\big)+2(1-\mu)y_{x_1x_2}z_{x_1x_2}\Big)d\Omega$.

Замечание 1. Для начальных данных

$$(u^0,v^0,u^1,v^1)\in[H^4(\Omega)]^2\times[H^2(\Omega)]^2$$

пара функций $(u(x,t),v(x,t))$, определенных в теореме 1, является сильным решением задачи (1) – (4).

Замечание 2. Энергия системы $\mathfrak{E}(t)$ является ее *функцией Ляпунова*. Более того, функция $\mathfrak{E}(t)$ допускает следующие оценки:

$$C_1E(t)-C\le\mathfrak{E}(t)\le C_2E(t)+C, \qquad (7)$$

где C_1,C_2,C – положительные константы, зависящие от различных параметров задачи (1) – (4), но не от параметра γ.

Ввиду теоремы 1 задача (1) – (4) порождает в пространстве

$$H = [H^2_{\Gamma_0}(\Omega)]^2 \times [L_2(\Omega)]^2$$
семейство бесконечномерных динамических систем (H, S_t^γ). Эволюционный оператор S_t^γ каждой точке $(u^0, v^0, u^1, \mathrm{v}^1) \in H$ ставит в соответствие элемент $(u(t), v(t), u_t(t), v_t(t)) \in H$, где $(u(t), v(t))$ – слабое решение задачи (1) – (4) для начальных условий $(u^0, v^0, u^1, \mathrm{v}^1)$:
$$S_t^\gamma\left(u^0, v^0, u^1, \mathrm{v}^1\right) = \left(u(t), v(t), u_t(t), v_t(t)\right).$$

Определение 3. Точка $Z = (z_1, z_2, 0, 0) \in H$ называется *стационарной точкой оператора* $S_t^\gamma, \gamma \ge 0$, если он отображает эту точку в себя: $S_t^\gamma Z = Z, \forall t \ge 0$. Множество стационарных точек оператора S_t^γ будем обозначать N^γ.

Значения энергии системы в стационарных точках оператора S_t^γ ограничены равномерно по параметру γ, то есть существует такая положительная константа $R_0 < \infty$, что
$$\mathfrak{E}\left(z_1, z_2, 0, 0\right) \le R_0, \ \forall Z \in N^\gamma, \forall \gamma \ge 0.$$
Это неравенство, используемое вместе с соотношением (7), означает, что множества стационарных точек N^γ ограничены в H равномерно по параметру γ:
$$\bigcup_{\gamma \ge 0} N^\gamma \subset B_H\left(R_0\right), \tag{8}$$
где $B_H(R_0)$ – шар радиуса R_0 в пространстве H.

Теорема 2. *Для любого* $\gamma \ge 0$ *динамическая система* (H, S_t^γ) *обладает компактным глобальным аттрактором* $\mathfrak{A}^\gamma$. *Аттрактор совпадает с неустойчивым многообразием* $M_+(N^\gamma)$, *исходящим из множества стационарных точек системы* N^γ. *Кроме того, семейство аттракторов* $\{\mathfrak{A}^\gamma\}$ *ограничено в пространстве* H *равномерно по параметру* γ, *а энергия системы* $E(t)$ *ограничена на траекториях из аттракторов равномерно по* $\gamma \ge 0$ *и* $t \in \mathbb{R}$.

Замечание 3. Из ограниченности энергии $\mathfrak{E}(t)$ на траекториях из аттракторов, а также неравенства (7), следует, что в случае $\gamma > 0$
$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| u(t) - v(t) \right\| \le C/\gamma, \tag{9}$$
для некоторого $C \in (0; \infty)$ и $(u(t), v(t), u_t(t), v_t(t)) \subset \mathfrak{A}^\gamma, \gamma > 0$.

Доказательство (теоремы 2). Следуя схеме доказательства существования компактного глобального аттрактора в случае одной *пластины фон Кармана* из [16,17], рассмотрим сужение *эволюционного оператора* $S_t^\gamma, \gamma \ge 0$ на ограниченное в H положительно инвариантное множество
$$W_R = \left\{(u^0, v^0, u^1, v^1) \in H : \mathfrak{E}(u^0, v^0, u^1, v^1) \le R\right\}.$$

Из (7) следует, что W_R не пусто для достаточно больших R $(R \ge R_1 > 0)$. Рассуждая как в [16, 17], получим, что динамическая система (W_R, S_t^γ) обладает компактным глобальным аттрактором $\mathfrak{A}_R^\gamma$, $R \ge R_1$. Поскольку система обладает функцией Ляпунова, то аттрактор $\mathfrak{A}_R^\gamma$ совпадает с неустойчивым многообразием, исходящим из множества неподвижных точек

$$M_+(N_R^\gamma),\ N_R^\gamma = N^\gamma \bigcap W_R.$$

Ввиду (8) $N_R^\gamma = N^\gamma$ для достаточно больших $R \ge R_1$ и, следовательно, аттрактор не зависит от R:

$$\mathfrak{A}_R^\gamma = M_+(N_R^\gamma) = M_+(N^\gamma) = \mathfrak{A}^\gamma \text{ для } R \ge R_1.$$

Кроме того, для любых $\gamma \ge 0$ имеем $\mathfrak{A}^\gamma \subset W_R$ для некоторого фиксированного $R \ge R_1$. Из приведенные выше рассуждения и неравенства (7) следует, что аттрактор $\mathfrak{A}^\gamma$ ограничен в H равномерно по параметру γ.

Основной результат. Опишем зависимость структуры глобального аттрактора $\mathfrak{A}^\gamma$ динамической системы (H, S_t^γ) от параметра γ. Особый интерес представляет поведение аттрактора при $\gamma \to \infty$. Данное поведение описано при помощи специальной структуры – *верхнего предела аттрактора*. Это понятие было введено *Капитанским* и *Костиным* в их работе [18]. По определению верхним пределом аттрактора $\mathfrak{A}^\gamma$ при $\gamma \to \infty$ называется множество

$$\mathfrak{A}(\infty) = \bigcap_{N \ge N_0} \left[\bigcup_{\gamma \ge N} \mathfrak{A}^\gamma \right]_H, \quad N_0 \ge 0,$$

где $[\bullet]_H$ означает замыкание множества по норме пространства H.

Теорема 3. *Для аттрактор $\mathfrak{A}^\gamma$ динамической системы (H, S_t^γ), порождаемой задачей (1) – (4), справедливы следующие утверждения:*

- *аттрактор $\mathfrak{A}^\gamma$ полунепрерывен сверху по параметру γ*:

$$\lim_{\gamma \to \gamma_0} \sup \left\{ dist_H(a, \mathfrak{A}^{\gamma_0}),\ a \in \mathfrak{A}^\gamma \right\} = 0, \quad \forall \gamma_0 \ge 0;$$

- *верхний предел аттрактора $\mathfrak{A}(\infty)$ лежит на диагонали фазового пространства H*:

$$\mathfrak{A}(\infty) \subset diagH = \left\{ (z^0, z^0, z^1, z^1): \quad (z^0, z^1) \in H^2_{\Gamma_0}(\Omega) \times L_2(\Omega) \right\}.$$

Замечание 4. Второе утверждение теоремы означает следующее явление асимптотической синхронизации динамики, порождаемой задачей (1) – (4):

$$\lim_{\gamma \to \infty} \lim_{t \to \infty} \left(\left\| u(t,\gamma) - v(t,\gamma) \right\|_{H^2_{\Gamma_0}(\Omega)} + \left\| u_t(t,\gamma) - v_t(t,\gamma) \right\|_{L_2(\Omega)} \right) = 0.$$

Доказательство (теоремы 3).

Рассмотрим последовательно утверждения теоремы.

Утверждение 1: полунепрерывность аттрактора. Чтобы установить полунепрерывность сверху аттрактора $\mathfrak{A}^\gamma$ по параметру γ, достаточно проверить следующие его свойства [19]:

- существуют $\gamma_0 \ge \eta > 0$, $t_0 = t_0(\gamma_0) > 0$ и ограниченное множество $\mathfrak{B}_0 \subset H$, такие что $\bigcup\limits_{\gamma\in[\gamma_0-\eta,\gamma_0+\eta]} \mathfrak{A}^\gamma \subset \mathfrak{B}_0$;
- для любого $\varepsilon > 0$ и $t \ge t_0$ существует такая положительная константа $\theta = \theta(\varepsilon, t) < \eta$, что для любых $a^\gamma \in \mathfrak{A}^\gamma$ и $\gamma \in [\gamma_0 - \eta, \gamma_0 + \eta]$ выполнено неравенство

$$\left\| S_t^\gamma a^\gamma - S_t^{\gamma_0} a^\gamma \right\|_H \le \varepsilon. \tag{10}$$

Первое свойство было установлено в ходе доказательства теоремы 2. Докажем второе свойство.

Пусть $(u^\gamma(t), v^\gamma(t))$ и $(u^{\gamma_0}(t), v^{\gamma_0}(t))$ – два решения задачи (1) – (4) для различных значений параметра связи γ, γ_0 и одних и тех же начальных условий $a^\gamma = (a_1^\gamma, a_2^\gamma, a_3^\gamma, a_4^\gamma) \in \mathfrak{A}^\gamma$. Покажем, что траектории

$$S_t^\gamma a^\gamma = (u^\gamma(t), v^\gamma(t), u_t^\gamma(t), v_t^\gamma(t)) \text{ и } S_t^{\gamma_0} a^\gamma = (u^{\gamma_0}(t), v^{\gamma_0}(t), u_t^{\gamma_0}(t), v_t^{\gamma_0}(t))$$

удовлетворяют неравенству (10). Установим сначала, что неравенство (10) выполнено, если начальные данные

$$a^\gamma \in \mathfrak{A}^\gamma \bigcap [H^4(\Omega)]^2 \times [H^2(\Omega)]^2,$$

то есть пары функций $(u^\gamma(t), v^\gamma(t))$ и $(u^{\gamma_0}(t), v^{\gamma_0}(t))$ являются сильными решениями задачи (1) – (4) для соответствующего значения параметра связи. Далее, совершая предельный переход ввиду определения 2, установим (10) для произвольных начальных данных $a^\gamma \in \mathfrak{A}^\gamma$.

В силу теоремы 2 имеем $\left\| S_t^\gamma a^\gamma \right\|_H, \left\| S_t^{\gamma_0} a^\gamma \right\|_H \le R < \infty$ для некоторого $R > 0$, не зависящего от γ, и всех $t \ge t_0 = t_0(R)$.

Очевидно, что функция $w = (w_1, w_2) = (u^\gamma - u^{\gamma_0}, v^\gamma - v^{\gamma_0})$ является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} w_{1tt} + \left(B\left(u_t^\gamma\right) - B\left(u_t^{\gamma_0}\right)\right) + \Delta^2 w_1 + \left(Q - \beta\int\limits_\Omega \left|\nabla u^\gamma\right|^2 d\Omega\right)\Delta w_1 + \\ \quad + \beta\int\limits_\Omega \left(\left|\nabla u^\gamma\right|^2 - \int\limits_\Omega \left|\nabla u^{\gamma_0}\right|^2 d\Omega\right) d\Omega \Delta u^{\gamma_0} + \\ \quad + \gamma\left(w_1 - w_2\right) + \left(\gamma - \gamma_0\right)\left(u^{\gamma_0} - v^{\gamma_0}\right) = 0, \\ w_{2tt} + \left(B\left(v_t^\gamma\right) - B\left(v_t^{\gamma_0}\right)\right) + \Delta^2 w_2 + \left(Q - \beta\int\limits_\Omega \left|\nabla v^\gamma\right|^2 d\Omega\right)\Delta w_2 + \\ \quad + \beta\int\limits_\Omega \left(\left|\nabla v^\gamma\right|^2 - \int\limits_\Omega \left|\nabla v^{\gamma_0}\right|^2 d\Omega\right) d\Omega \Delta v^{\gamma_0} + \\ \quad + \gamma\left(w_2 - w_1\right) + \left(\gamma - \gamma_0\right)\left(v^{\gamma_0} - u^{\gamma_0}\right) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

с условиями защемления $w_1 = \partial_\nu w_1 = w_2 = \partial_\nu w_2 = 0$ на части границы Γ_0, свободными граничными условиями на Γ_1:

$$\Delta w_1 + (1-\mu)\Sigma_1 w_1 = 0, \quad \Delta w_2 + (1-\mu)\Sigma_2 w_2 = 0,$$

$$\partial_n \Delta w_1 + (1-\mu)\Sigma_2 w_1 = d(x)\left(g\left(u_t^\gamma\right) - g\left(u_t^{\gamma_0}\right)\right) + \sigma w_1 -$$

$$-\left(Q - \beta\int_\Omega \left|\nabla u^\gamma\right|^2 d\Omega\right)\partial_n w_1 - \beta\int_\Omega\left(\left|\nabla u^\gamma\right|^2 - \left|\nabla u^{\gamma_0}\right|^2\right) d\Omega \partial_n u^{\gamma_0},$$

$$\partial_n \Delta w_2 + (1-\mu)\Sigma_2 w_2 = d(x)\left(g\left(v_t^\gamma\right) - g\left(v_t^{\gamma_0}\right)\right) + \sigma w_2 -$$

$$-\left(Q - \beta\int_\Omega \left|\nabla v^\gamma\right|^2 d\Omega\right)\partial_n w_2 - \beta\int_\Omega\left(\left|\nabla v^\gamma\right|^2 - \left|\nabla v^{\gamma_0}\right|^2\right) d\Omega \partial_n v^{\gamma_0},$$

и нулевыми начальными условиями. Умножая уравнения (11) на $w_{it}, i = 1,2$ в $L_2(\Omega)$, получаем

$$\frac{d}{dt}E_w(t) + \left(B\left(u_t^\gamma\right) - B\left(u_t^{\gamma_0}\right), w_{1t}\right)_{L_2(\Omega)} + \left(B\left(v_t^\gamma\right) - B\left(v_t^{\gamma_0}\right), w_{2t}\right)_{L_2(\Omega)} +$$

$$+\left(d(x)\left(g\left(u_t^\gamma\right) - g\left(u_t^{\gamma_0}\right)\right), w_{1t}\right)_{L_2(\Gamma_1)} + \left(d(x)\left(g\left(v_t^\gamma\right) - g\left(v_t^{\gamma_0}\right)\right), w_{1t}\right)_{L_2(\Gamma_1)} +$$

$$+\left(Q - \beta\int_\Omega \left|\nabla u^\gamma\right|^2 d\Omega\right)\left(\left(\Delta w_1, w_{1t}\right)_{L_2(\Omega)} - \left(\partial_n w_{1,}, w_{1t}\right)_{L_2(\Gamma_1)}\right) +$$

$$+\beta\int_\Omega\left(\left|\nabla u^\gamma\right|^2 - \left|\nabla u^{\gamma_0}\right|^2\right) d\Omega\left(\left(\Delta u^{\gamma_0}, w_{1t}\right)_{L_2(\Omega)} - \left(\partial_n u^{\gamma_0}, w_{1t}\right)_{L_2(\Gamma_1)}\right) +$$

$$+\left(Q - \beta\int_\Omega \left|\nabla v^\gamma\right|^2 d\Omega\right)\left(\left(\Delta w_2, w_{2t}\right)_{L_2(\Omega)} - \left(\partial_n w_{2,}, w_{2t}\right)_{L_2(\Gamma_1)}\right) +$$

$$+\beta\int_\Omega\left(\left|\nabla v^\gamma\right|^2 - \left|\nabla v^{\gamma_0}\right|^2\right) d\Omega\left(\left(\Delta v^{\gamma_0}, w_{2t}\right)_{L_2(\Omega)} - \left(\partial_n v^{\gamma_0}, w_{2t}\right)_{L_2(\Gamma_1)}\right) +$$

$$+(\gamma - \gamma_0)\left(u^{\gamma_0} - v^{\gamma_0}, w_{1t} - w_{2t}\right)_{L_2(\Omega)} = 0,$$

где $E_w(t)$ – это положительная энергия (11):

$$E_w(t) = \frac{1}{2}\left(\left\|w_{1t}\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\|w_{2t}\right\|^2_{L_2(\Omega)} + a(w_1, w_1) + a(w_2, w_2) +\right.$$

$$\left. +\sigma\left(\left\|w_1\right\|^2_{L_2(\Gamma_1)} + \left\|w_2\right\|^2_{L_2(\Gamma_1)}\right) + \gamma\left\|w_1 - w_2\right\|^2_{L_2(\Omega)}\right).$$

Ввиду условий, наложенных на функции демпфирования, слагаемые, содержащие эти функции, неотрицательны. Оценим слагаемые, содержащие нелокальную нелинейность $\int_\Omega |\nabla z|^2 d\Omega$, используя ограниченность траекторий $S_t^\gamma a^\gamma, S_t^{\gamma_0} a^\gamma$ при $t \ge t_0$:

$$\left|\left(Q-\beta\int_{\Omega}\left|\nabla u^{\gamma}\right|d\Omega\right)\left(\Delta w_1, \mathrm{w}_{1t}\right)_{L_2(\Omega)}\right| \le C(R)E_w(t);$$

$$\left|\left(Q-\beta\int_{\Omega}\left|\nabla u^{\gamma}\right|d\Omega\right)\left(\partial_n w_1, w_{1t}\right)_{L_2(\Gamma_1)}\right| \le$$

$$\le C(R)E_w(t)+0{,}1\left(d(x)\left(g\left(u_t^{\gamma}\right)-g\left(u_t^{\gamma_0}\right)\right), w_{1t}\right)_{L_2(\Gamma_1)}.$$

Остальные слагаемые оцениваются аналогично. Следовательно, имеем

$$\frac{d}{dt}E_w(t) \le C_1(R)E_w(t)+C_2(R)(\gamma-\gamma_0), \quad t \ge t_0,$$

откуда, используя *лемму Гронуолла*, получаем

$$E_w(t) \le E_w(0)e^{C_1(R)t}+C(R)e^{C(R)t}\left|\gamma-\gamma_0\right|, \quad t \ge t_0. \qquad (12)$$

Поскольку мы рассматриваем решения задачи (11) для нулевых начальных условий, то $E_w(0)=0$, и из (12) следует (10).

Утверждение 2: структура верхнего предела аттрактора. Докажем теперь, что верхний предел аттрактора $\mathfrak{A}(\infty)$ принадлежит диагонали фазового пространства $diagH$. Рассуждение основано на следующем утверждении.

Утверждение 1. Пусть $(u(t), v(t), u_t(t), v_t(t))$ – это траектория динамической системы (H, S_t^{γ}), такая, что энергия системы (6) ограничена на этой траектории, то есть $\mathfrak{E}(u(t), v(t), u_t(t), v_t(t)) \le R$ для некоторого $R \in (0;\infty)$ и всех $t \in [0,T]$. Тогда для функции $w(t)=u(t)-v(t)$ выполняется следующее *стабилизационное неравенство*:

$$E_w(\mathrm{T}) \le \varepsilon+\frac{C(R,\varepsilon)}{T}+C(R,T,\varepsilon)\sup_{t\in[0,T]}\left\|w(t)\right\|_{H^{1+\delta}(\Omega)}, \qquad (13)$$

с не зависящими от параметра γ константами

$$\varepsilon>0,\ 0<\delta<1,\ \ C(R,\varepsilon), C(R,T,\varepsilon)>0,$$

и функционалом $E_w(t)$ вида

$$E_w(t)=\frac{1}{2}\left(\left\|w_t\right\|_{L_2(\Omega)}^2+a(w,w)+\sigma\left\|w\right\|_{L_2(\Gamma_1)}^2+2\gamma\left\|w\right\|_{L_2(\Omega)}^2\right).$$

Дальнейшее доказательство проведем методом от противного. Предположим, что верхний предел аттрактора $\mathfrak{A}(\infty)$ не лежит на диагонали фазового пространства $diagH$. Тогда существует точка $a \in \mathfrak{A}(\infty)$, такая, что

$$dist_H(a, diagH)=\eta>0. \qquad (14)$$

Пусть $\{a^{\gamma}\}_{\gamma\ge N_0}$ – это последовательность точек из аттракторов $a^{\gamma} \in \mathfrak{A}^{\gamma}$, сходящаяся к a при $\gamma \to \infty$. Рассмотрим последовательность полных ограниченных траекторий $(u^{\gamma}(t), v^{\gamma}(t), u_t^{\gamma}(t), v_t^{\gamma}(t)) \subset \mathfrak{A}^{\gamma}$ таких, что $(u^{\gamma}(T_0), v^{\gamma}(T_0),$ $u_t^{\gamma}(T_0), v_t^{\gamma}(T_0))=a$ для некоторого $T_0>0$, которое мы выберем далее удобным для нас образом. В силу теоремы 2 энергия системы $E(t)$, определенная соотношением (6), ограничена на рассматриваемых траекториях равномерно по параметру γ и переменной t. Следовательно, мы можем записать для последовательности функции $w(t)=u^{\gamma}(t)-v^{\gamma}(t)$ неравенство (13) с константами, не зависящими от параметра γ. Положим в (13) $\varepsilon=\eta/8$ и выберем значение T_0 так, чтобы второе слагаемое $C(R,\varepsilon)/T_0$ в (13) не превосходило $\eta/8$. Используя *интерполяционные неравенства* [20], получаем:

$$\sup_{t\in[0,T_0]}\|w\|_{H^{1+\delta}(\Omega)}\le C_1\sup_{t\in[0,T_0]}\|w\|_{H^2(\Omega)}^{(1+\delta)/2}\cdot\|w\|_{L_2(\Omega)}^{(1-\delta)/2}\le C(R)\sup_{t\in[0,T_0]}\|w\|_{L_2(\Omega)}^{(1-\delta)/2},$$

откуда, ввиду (9), следует, что $\sup\limits_{t\in[0,T_0]}\|w\|_{H^{1+\delta}(\Omega)}\le\eta/8$ при достаточно больших значениях параметра γ. Тогда из (13) следует, что $dist_H(a^{\gamma},diagH)\le$ $\le\eta/2$ для больших γ, что противоречит (14). Следовательно, выдвинутое предположение неверно и $\mathfrak{A}(\infty)\subset diagH$.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Рассмотрена система связанных пластин Бергера с нелинейным внутренним и граничным демпфированием. Установлено явление асимптотической синхронизации динамики системы в терминах ее глобального аттрактора в пределе, когда интенсивность связи γ и время t стремятся к бесконечности.

Во второй части исследования мы планируем более подробно описать структуру верхнего предела аттрактора $\mathfrak{A}(\infty)$, а также доказать наличие синхронизации системы для конечных значений параметра связи γ при дополнительных условиях на параметры и функции задачи (1) – (4).

Список литературы: **1.** *Pikovsky A.*, *Rosenblum M.*, *Kurths J.* Synchronization. A universal concept in nonlinear science. – Cambridge, Cambridge University Press, 2001. **2.** *Strogatz S.* Sync: The emerging science of spontaneous order. – New York: Hyperion Press, 2003. **3.** *Afraimovich V.S.*, *Rodrigues H.M.* Uniform dissipativeness and synchronization of nonautonomous equations // International Conference on Differential Equations (Lisboa 1995). – N.J.World Scintific Publishing, River Edge, 1998. – 3 – 17. **4.** *Rodrigues H.M.* Abstract methods for synchronization and applications // Appl. Anal. –1996. – № 62. – 263 – 296. **5.** *Caraballo T.*, *Kloeden P.E.* The persistence of synchronization under environmental noise // Proc. Roy. Soc. London A. – 2005. – № 461. – 2257 – 2267. **6.** *Kloeden P.E.* Synchronization of nonautonomous dynamical systems // Elect. J. Diff. Eqns. – 2003. – 1 – 10. **7.** *Carvalho A.N., Rodrigues H.M., Doltko T.* Upper semicontinuity of attractors and synchronization // J. Math. Anal. Appl. – 1998. – № 220. – 13 – 41. **8.** *Rekalo A.M.*, *Chueshov I.D.* Global attractor of a contact parabolic problem in a thin two-layer domain // Sb. Math. – 2004. – № 195 – 97 – 119. **9.** *Chueshov I.* Invariant manifolds and non-linear master-slave synchronization in coupled systems // Applicable Analysis. – 2007. – V. 86, № 3. – 269 – 286. **10.** *Naboka O.* Synchronization of nonlinear oscillations of two coupling Berger plates // Nonlinear Analysis – 2007. – № 67. – 1015 – 1026. **11.** *Naboka O.* Synchronization Phenomena in the System Consisting of m Coupled Berger Plates // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – № 341. – 1107 – 1124. **12.** *Naboka O.* On synchronization of oscillations of two coupled Berger plates with nonlinear interior damping // CPAA – 2009. –Vol. 8, № 6 – 1933 – 1956. **13.** *Naboka O.* On partial synchronization of nonlinear oscillations of two Berger plates coupled by internal subdomains // Nonlinear Analysis. – 2009. – № 71. – 6299 – 6311. **14.** *Berger M.* A new approach to the large deflection of plate // J. Appl. Mech. – 1955. – № 22. – 465 – 472. **15.** *Showalter R.E.* Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations. – Providence, Rhode Island, AMS, 1997. **16.** *Chueshov I., Lasiecka I.* Von Karman Evolution Equations. Well-Posedness and Long-Time Dynamics. – Springer, 2010. **17.** *Chueshov I., Lasiecka I.* Long-time dynamics of von Karman semi-flows with non-linear boundary/interior damping // J. of Diff. Eq. – 2007. – № 233. – 42 – 86. **18.** *Kapitansky L.V., Kostin I.N.* Attractors of nonlinear evolution equations and their approximations // Leningrad Math. J. – 1991. – № 2. – 97 – 117. **19.** *Raugel G.* Global attractors in partial differential equations // Handbook of Dynamical Systems. – Amsterdam, B. Fiedler (ed.) Elsevier. – 2002. – Vol. 2 – 885 – 982. **20.** *Lions J.-L., Magenes E.* Problemes aux limites non homogenes et applications. – Paris, Dunod, 1968.

Bibliography (transliterated): 1. Pikovsky, A., M. Rosenblum and J. Kurths. *Synchronization. A universal concept in nonlinear science*. Cambridge University Press, 2001. Print. **2.** Strogatz, S. *Sync: The emerging science of spontaneous order*. New York: Hyperion Press, 2003. Print. **3.** Afraimovich, V. S., and H. M. Rodrigues. "Uniform dissipativeness and synchronization of nonautonomous equations." *International Conference on Differential Equations (Lisboa 1995)*. World Scientific Publishing. River Edge, N. J. 1998. 3–17. Print. **4.** Rodrigues, H. M. "Abstract methods for synchronization and applications." *Appl. Anal.* No.62. 1996. 263–296. Print. **5.** Caraballo, T., and P. E. Kloeden. "The persistence of synchronization under environmental noise." *Proc. Roy. Soc. London A*. No.461. 2005. 2257–2267. Print. **6.** Kloeden, P. E. "Synchronization of nonautonomous dynamical systems." *Elect. J. Diff. Eqns.* 2003. 1–10. Print. **7.** Carvalho, A. N., H. M. Rodrigues and T. Doltko. "Upper semicontinuity of attractors and synchronization." *J. Math. Anal. Appl.* No.220. 1998. 13–41. Print. **8.** Rekalo, A. M., and I. D. Chueshov. "Global attractor of a contact parabolic problem in a thin two-layer domain." *Sb. Math.* No. 195. 2004. 97–119. Print. **9.** Chueshov, I. "Invariant manifolds and non-linear master-slave synchronization in coupled systems" *Applicable Analysis*. Vol.86. No.3. 2007. 269–286. Print. **10.** Naboka, O. "Synchronization of nonlinear oscillations of two coupling Berger plates." *Nonlinear Analysis*. No. 67. 2007. 1015–1026. Print. **11.** Naboka, O. "Synchronization Phenomena in the System Consisting of m Coupled Berger Plates." *J. Math. Anal. Appl.* No. 341. 2008. 1107–1124. Print. **12.** Naboka, O. "On synchronization of oscillations of two coupled Berger plates with nonlinear interior damping." *CPAA*. Vol. 8. No. 6. 2009. 1933–1956. Print. **13.** Naboka, O. "On partial synchronization of nonlinear oscillations of two Berger plates coupled by internal subdomains." *Nonlinear Analysis*. No. 71. 2009. 6299–6311. Print. **14.** Berger, M. "A new approach to the large deflection of plate." *J. Appl. Mech*. No. 22. 1955. 465–472. Print. **15.** Showalter, R. E. *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations*. Providence, Rhode Island: AMS, 1997. Print. **16.** Chueshov, I., and I. Lasiecka. *Von Karman Evolution Equations. Well-Posedness and Long-Time Dynamics*. Springer, 2010. **17.** Chueshov, I., and I. Lasiecka. "Long-time dynamics of von Karman semi-flows with non-linear boundary/interior damping." *J. of Diff. Eq*. No. 233. 2007. 42–86. Print. **18.** Kapitansky, L. V., and I. N. Kostin. "Attractors of nonlinear evolution equations and their approximations." *Leningrad Math. J.* No. 2. 1991. 97–117. Print. **19.** Raugel, G. "Global attractors in partial di®erential equations." *Handbook of Dynamical Systems*. Amsterdam: B. Fiedler (ed.) Elsevier. Vol. 2. 2002. 885–982. Print. **20.** Lions, J.-L., and E. Magenes. *Problemes aux limites non homogenes et applications*. Paris: Dunod, 1968. Print.

Поступила (received) 08.06.2015

УДК 519.64, 539.3

О.М. НАЗАРЕНКО, канд. фіз.-мат. наук, доц., СумДУ, Суми

МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОДІЇ ПЛОСКИХ ГАРМОНІЧНИХ ХВИЛЬ З ЦИЛІНДРИЧНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Розглянуто плоскі задачі дифракції гармонічних хвиль на жорстких та пружних включеннях довільного поперечного перерізу. Будуються інтегральні зображення для амплітуд переміщень відбитого хвильового поля і крайові задачі зведені до системи сингулярних інтегральних рівнянь, які реалізовані чисельно. Обґрунтовуються додаткові умови, необхідні для однозначної розв'язності сингулярних інтегральних рівнянь першого роду. Чисельна реалізація побудованих алгоритмів проводиться методом механічних квадратур.