

dynamics of von Karman semi-flows with non-linear boundary/interior damping // *J. of Diff. Eq.* – 2007. – № 233. – 42 – 86. **18.** Kapitansky L.V., Kostin I.N. Attractors of nonlinear evolution equations and their approximations // *Leningrad Math. J.* – 1991. – № 2. – 97 – 117. **19.** Raugel G. Global attractors in partial differential equations // *Handbook of Dynamical Systems.* – Amsterdam, B. Fiedler (ed.) Elsevier. – 2002. – Vol. 2 – 885 – 982. **20.** Lions J.-L., Magenes E. *Problemes aux limites non homogenes et applications.* – Paris, Dunod, 1968.

Bibliography (transliterated): **1.** Pikovsky, A., M. Rosenblum and J. Kurths. *Synchronization. A universal concept in nonlinear science.* Cambridge University Press, 2001. Print. **2.** Strogatz, S. *Sync: The emerging science of spontaneous order.* New York: Hyperion Press, 2003. Print. **3.** Afraimovich, V. S., and H. M. Rodrigues. "Uniform dissipativeness and synchronization of nonautonomous equations." *International Conference on Differential Equations (Lisboa 1995).* World Scientific Publishing. River Edge, N. J. 1998. 3–17. Print. **4.** Rodrigues, H. M. "Abstract methods for synchronization and applications." *Appl. Anal.* No.62. 1996. 263–296. Print. **5.** Caraballo, T., and P. E. Kloeden. "The persistence of synchronization under environmental noise." *Proc. Roy. Soc. London A.* No.461. 2005. 2257–2267. Print. **6.** Kloeden, P. E. "Synchronization of nonautonomous dynamical systems." *Elect. J. Diff. Eqns.* 2003. 1–10. Print. **7.** Carvalho, A. N., H. M. Rodrigues and T. Doltko. "Upper semicontinuity of attractors and synchronization." *J. Math. Anal. Appl.* No.220. 1998. 13–41. Print. **8.** Rekaló, A. M., and I. D. Chueshov. "Global attractor of a contact parabolic problem in a thin two-layer domain." *Sb. Math.* No. 195. 2004. 97–119. Print. **9.** Chueshov, I. "Invariant manifolds and non-linear master-slave synchronization in coupled systems" *Applicable Analysis.* Vol.86. No.3. 2007. 269–286. Print. **10.** Naboka, O. "Synchronization of nonlinear oscillations of two coupling Berger plates." *Nonlinear Analysis.* No. 67. 2007. 1015–1026. Print. **11.** Naboka, O. "Synchronization Phenomena in the System Consisting of m Coupled Berger Plates." *J. Math. Anal. Appl.* No.341. 2008. 1107–1124. Print. **12.** Naboka, O. "On synchronization of oscillations of two coupled Berger plates with nonlinear interior damping." *CPAA.* Vol. 8. No. 6. 2009. 1933–1956. Print. **13.** Naboka, O. "On partial synchronization of nonlinear oscillations of two Berger plates coupled by internal subdomains." *Nonlinear Analysis.* No. 71. 2009. 6299–6311. Print. **14.** Berger, M. "A new approach to the large deflection of plate." *J. Appl. Mech.* No. 22. 1955. 465–472. Print. **15.** Showalter, R. E. *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations.* Providence, Rhode Island: AMS, 1997. Print. **16.** Chueshov, I., and I. Lasiecka. *Von Karman Evolution Equations. Well-Posedness and Long-Time Dynamics.* Springer, 2010. **17.** Chueshov, I., and I. Lasiecka. "Long-time dynamics of von Karman semi-flows with non-linear boundary/interior damping." *J. of Diff. Eq.* No. 233. 2007. 42–86. Print. **18.** Kapitansky, L. V., and I. N. Kostin. "Attractors of nonlinear evolution equations and their approximations." *Leningrad Math. J.* No. 2. 1991. 97–117. Print. **19.** Raugel, G. "Global attractors in partial differential equations." *Handbook of Dynamical Systems.* Amsterdam: B. Fiedler (ed.) Elsevier. Vol. 2. 2002. 885–982. Print. **20.** Lions, J.-L., and E. Magenes. *Problemes aux limites non homogenes et applications.* Paris: Dunod, 1968. Print.

Поступила (received) 08.06.2015

УДК 519.64, 539.3

О.М. НАЗАРЕНКО, канд. фіз.-мат. наук, доц., СумДУ, Суми

МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОДІЇ ПЛОСКИХ ГАРМОНІЧНИХ ХВИЛЬ З ЦИЛІНДРИЧНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Розглянуто плоскі задачі дифракції гармонічних хвиль на жорстких та пружних включеннях довільного поперечного перерізу. Будуються інтегральні зображення для амплітуд переміщень відбитого хвильового поля і крайові задачі зведені до системи сингулярних інтегральних рівнянь, які реалізовані чисельно. Обґрунтовуються додаткові умови, необхідні для однозначної розв'язності сингулярних інтегральних рівнянь першого роду. Чисельна реалізація побудованих алгоритмів проводиться методом механічних квадратур.

© О. М. Назаренко, 2015

Ключові слова: дифракція, жорстке або пружне включення, сингулярні інтегральні рівняння, додаткові умови, чисельна реалізація.

Вступ. Сучасні конструкції, що використовуються в техніці та будівництві, працюють в умовах динамічних навантажень. Для практики актуальним є дослідження концентрації напружень поблизу різного типу включень, які є складовими елементів конструкцій і перебувають під дією циклічних навантажень.

При розв'язанні динамічних задач у випадку неоднорідностей складної геометричної форми ефективно використовується апарат методу R – функцій [1], променеві методи [2], метод інтегральних рівнянь [3, 4]. У даній роботі розвивається універсальний підхід, згідно з яким будуються загальні інтегральні зображення для переміщень відбитого хвильового поля, що дає змогу одержати систему сингулярних інтегральних рівнянь для кожного типу розсіювачів (порожнин, жорстких чи пружних включень). Моделювання контакту на границі пружного включення базується на умовах типу склейки [5] (неперервність переміщень і напружень на поверхні контакту), а граничні умови на поверхні жорсткого включення моделюються, виходячи з поступального і обертального рухів абсолютно жорсткого тіла [6].

Постановка задачі. Розглянемо в ізотропному середовищі нескінченно довгий вздовж осі Ox_3 циліндр, поперечний переріз якого обмежений замкнутим контуром L типу Ляпунова. Крива L розбиває площину Ox_1x_2 на дві області: зовнішню D_1 і внутрішню D_2 . Будемо вважати, що внутрішність циліндра є пружним або жорстким включенням, і нехай ρ_k і λ_k , μ_k – щільність і коефіцієнти Ламе матриці ($k=1$) та включення ($k=2$). За умови, що зовнішнє поле переміщень діє перпендикулярно осі Ox_3 , будемо розглядати дифракцію на циліндрі гармонічної хвилі розширення-стиску (P - випадок)

$$U_1^{(0)} = 0, U_2^{(0)} = \tau_1 e^{-i\gamma_1^{(1)} x_2}, \gamma_1^{(1)} = \omega/c_1^{(1)}, \tau_1 = const \quad (1)$$

або зсуву (SV – випадок)

$$U_1^{(0)} = \tau_2 e^{-i\gamma_2^{(1)} x_2}, U_2^{(0)} = 0, \gamma_2^{(1)} = \omega/c_2^{(1)}, \tau_2 = const. \quad (2)$$

Тут $c_1^{(1)}$ і $c_2^{(1)}$ – швидкості подовжньої і поперечної хвиль, ω – частота коливань, залежність від часу t виражається множником $e^{-i\omega t}$ ($i^2 = -1$).

Взаємодіючи з включенням, набігаюча хвиля породжує відбиті подовжні та поперечні хвилі. У випадку пружного включення виникають також хвилі, що проникають всередину циліндра. Нехай $U_1^{(k)}$ і $U_2^{(k)}$ амплітуди переміщень відбитого ($k=1$) і проникаючого ($k=2$) полей відповідно. Тоді загальне поле переміщень $\mathbf{U} = (U_1, U_2)$ дорівнює $(U_1^{(1)} + U_1^{(0)}, U_2^{(1)} + U_2^{(0)})$ в матриці і $(U_1^{(2)}, U_2^{(2)})$ всередині пружного включення.

На нескінченності компоненти $U_1^{(1)}$ і $U_2^{(1)}$ повинні задовольняти умовам випромінювання [7]. В матриці і всередині пружного включення повинні виконуватись рівняння руху Ламе

$$\mu_k \Delta \mathbf{U}^{(k)} + (\lambda_k + \mu_k) \text{grad div } \mathbf{U}^{(k)} + \omega^2 \rho_k \mathbf{U}^{(k)} = 0. \quad (3)$$

На границі розділу двох середовищ (матриця – пружне включення) припускаємо неперервність при переході через L компонентів вектора переміщень $\mathbf{U} = (U_1, U_2)$ і тангенціальної та нормальної складових вектора напружень $\mathbf{S} = (S_1, S_2)$:

$$(U_m^{(1)} + U_m^{(0)}) \Big|_{z \rightarrow \zeta_0} = (U_m^{(2)}) \Big|_{z \rightarrow \zeta_0}, \quad (S_m^{(1)} + S_m^{(0)}) \Big|_{z \rightarrow \zeta_0} = (S_m^{(2)}) \Big|_{z \rightarrow \zeta_0}, \quad m = \overline{1, 2}. \quad (4)$$

Співвідношення (4) необхідно розуміти як рівність граничних значень відповідних величин при наближенні точки спостереження $z = x_1 + iy_1$ до точки $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L$ із областей D_1 і D_2 .

На поверхні жорсткого включення граничні умови мають вигляд:

$$(U_1^{(1)} + U_1^{(0)}) \Big|_{z \rightarrow \zeta_0} = B_1 - \omega_0 \eta_0, \quad (U_2^{(1)} + U_2^{(0)}) \Big|_{z \rightarrow \zeta_0} = B_2 + \omega_0 \xi_0, \quad (5)$$

де B_1, B_2 і ω_0 – амплітуди поступального руху і жорсткого повороту включення.

Враховуючи (5) та використовуючи другий закон Ньютона, отримаємо рівняння, що описують поступальний рух жорсткого включення:

$$\int_L S_m ds_0 = -\omega_0 \rho_2 \sigma B_m, \quad m = 1, 2. \quad (6)$$

Обертальний рух жорсткого включення описується рівнянням:

$$\int_L (S_1 (\eta_0 - x_2) - S_2 (\xi_0 - x_1)) ds_0 = -\omega^2 J_A \omega_0. \quad (7)$$

Тут σ – площа обмежена контуром L , J_A – момент інерції включення відносно довільної точки $A(x, y)$. Величини S_1 і S_2 виражаються через компоненти тензора амплітуд напружень τ_{11}, τ_{22} і τ_{12} за формулами

$$\begin{aligned} 2i(S_1 + iS_2) &= (\tau_{11} + \tau_{22}) e^{i\varphi_0} + (\tau_{22} - \tau_{11} - 2i\tau_{12}) e^{-i\varphi_0}, \\ -2i(S_1 - iS_2) &= (\tau_{11} + \tau_{22}) e^{-i\varphi_0} + (\tau_{22} - \tau_{11} + 2i\tau_{12}) e^{i\varphi_0}, \end{aligned} \quad (8)$$

де φ_0 – кут додатної дотичної s_0 до L у точці $\zeta_0 \in L$ з віссю Ox_1 (n_0 – вектор нормалі до L в точці ζ_0).

На границі циліндрів нас буде цікавити розподіл амплітуд напружень

$$\tau_{n_0} = S_1 \sin \varphi_0 - S_2 \cos \varphi_0, \quad \tau_{n_{s_0}} = S_1 \cos \varphi_0 + S_2 \sin \varphi_0, \quad \tau_{s_0} = \tau_{11} + \tau_{22} - \tau_{n_0}. \quad (9)$$

Метод розв'язання задачі. Запропонований в роботі підхід ґрунтується на побудові інтегральних зображень амплітуд компонентів переміщень відбитого і проникаючого всередину пружного включення хвильових полів у такому вигляді, щоб вони автоматично задовольняли рівнянням руху та умовам випромінювання на нескінченності. Слідуючи [5], подамо амплітуди переміщень у вигляді потенціалів типа простого шару ($m = 1, 2$):

$$U_m^{(k)}(x, y) = \int_L (f_1^{(k)}(s) G_{m1}^{(k)}(z, \zeta) + f_2^{(k)}(s) G_{m2}^{(k)}(z, \zeta)) ds. \quad (10)$$

Тут $f_1^{(k)}(s)$ і $f_2^{(k)}(s)$ – невідомі функції ($k = 1, 2$), $G_{1j}^{(k)}$ і $G_{2j}^{(k)}$ – функції Грі-

на ($j=1,2$), що являють собою амплітуди переміщень j -го стану в точці $z = x_1 + ix_2 \in D_k$ при дії гармонічної сили, зосередженої в точці $\zeta = \xi + i\eta \in L$ і направленої вздовж осі Ox_1 (1-й стан) або осі Ox_2 (2-й стан).

Для функцій Гріна отримані наступні вирази:

$$G_{11}^{(k)} + iG_{21}^{(k)} = G_{12}^{(k)} - iG_{22}^{(k)} = d_k \left(\frac{\chi_k}{4} \phi_{20}^{(k)} - e_k \phi_{00}^{(k)} \right), \nu_k = \frac{\lambda_k}{2(\lambda_k + \mu_k)},$$

$$e^{2i\alpha} (G_{11}^{(k)} - iG_{21}^{(k)}) = e^{-2i\alpha} (G_{12}^{(k)} + iG_{22}^{(k)}) = \frac{d_k}{4} \phi_{22}^{(k)}, d_k = \frac{i}{4\mu_k(1-\nu_k)},$$

$$\phi_{ij}^{(k)} = \frac{\gamma_1^{(k)j} H_j^{(1)}(\gamma_1^{(k)} r) - \gamma_2^{(k)j} H_j^{(1)}(\gamma_2^{(k)} r)}{\gamma_1^{(k)2} - \gamma_2^{(k)2}}, z - \zeta = r e^{i\alpha}, e_k = \left(\frac{1}{2} - \nu_k \right) \gamma_2^{(k)2}, \quad (11)$$

де $H_j^{(1)}(x)$ – функція Ханкеля 1-го роду j -го порядку; $\chi_k = 3 - 4\nu_k$.

Для похідних компонентів матриці Гріна маємо

$$e^{i\alpha} \frac{\partial}{\partial z} (G_{11}^{(k)} + iG_{21}^{(k)}) = e^{-i\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (G_{12}^{(k)} - iG_{22}^{(k)}) = -\frac{d_k}{2} \left(\frac{\chi_k}{4} \phi_{31}^{(k)} - e_k \phi_{11}^{(k)} \right),$$

$$e^{i\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (G_{11}^{(k)} - iG_{21}^{(k)}) = e^{-i\alpha} \frac{\partial}{\partial z} (G_{12}^{(k)} + iG_{22}^{(k)}) = \frac{d_k}{8} \phi_{31}^{(k)}, \bar{z} = x_1 - ix_2. \quad (12)$$

Можна показати, що ядро $\phi_{11}^{(k)}$, визначене в (11), є неперервним, а ядра $\phi_{31}^{(k)}$ і $\phi_{33}^{(k)}$ мають особливість типу Коші. Тому з метою отримання сингулярних інтегральних рівнянь граничні умови для переміщень в (4) у випадку пружного включення і (5) у випадку жорсткого включення диференціювались по дуговій координаті s_0 .

Враховуючи компактні вирази для вказаних в (11) комбінацій функцій Гріна і бажані властивості їх похідних в (12), в роботі граничні умови для похідних переміщень задовольнялись не для самих переміщень U_1 і U_2 , а для їх комбінацій $U_1 \pm iU_2$. Аналогічно умови неперервності при переходу через L напружень S_1 і S_2 (4) задовольнялись для комбінацій $S_1 \pm iS_2$.

В результаті задача дифракції гармонічної прокольної (1) або поперечної (2) хвилі на циліндричному пружному включенні зводиться до системи чотирьох сингулярних інтегральних рівнянь (підсумовування по $n = 1, 2$):

$$\int_L (p_n^{(2)}(s) B_{mn}^{(2)}(s_0, s) - p_n^{(1)}(s) B_{mn}^{(1)}(s_0, s)) ds = N_m(s_0), m = 1, 2, \quad (13)$$

$$\frac{1}{2} p_m^{(1)}(s_0) + \frac{1}{2} p_m^{(2)}(s_0) + \int_L (p_n^{(2)}(s) C_{mn}^{(2)}(s_0, s) - p_n^{(1)}(s) C_{mn}^{(1)}(s_0, s)) ds = T_m(s_0),$$

$$B_{11}^{(k)} = B_{22}^{(k)} = -d_k \left(\frac{\chi_k}{4} \Phi_{31}^{(k)} - e_k \Phi_{11}^{(k)} \right) \cos(\varphi_0 - \alpha_0), \zeta_0 - \zeta = r_0 e^{i\alpha_0},$$

$$B_{12}^{(k)} = \frac{d_k}{8} \left(\Phi_{31}^{(k)} e^{i(\varphi_0 + \alpha_0)} - \Phi_{33}^{(k)} e^{i(3\alpha_0 - \varphi_0)} \right), B_{21}^{(k)} = \frac{d_k}{8} \left(\Phi_{31}^{(k)} e^{-i(\varphi_0 + \alpha_0)} - \Phi_{33}^{(k)} e^{-i(3\alpha_0 - \varphi_0)} \right),$$

$$C_{11}^{(k)} = h_k \left(a_k \Phi_{31}^{(k)} - b_k \Phi_{11}^{(k)} \right), C_{12}^{(k)} = h_k \left(\left(\Phi_{31}^{(k)} - \gamma_2^{(k)2} \Phi_{11}^{(k)} \right) e^{i(\varphi_0 + \alpha_0)} - \Phi_{33}^{(k)} e^{i(3\alpha_0 - \varphi_0)} \right),$$

$$C_{22}^{(k)} = h_k \left(\bar{a}_k \Phi_{31}^{(k)} - \bar{b}_k \Phi_{11}^{(k)} \right), C_{21}^{(k)} = h_k \left(\left(\Phi_{31}^{(k)} - \gamma_2^{(k)2} \Phi_{11}^{(k)} \right) e^{-i(\varphi_0 + \alpha_0)} - \Phi_{33}^{(k)} e^{-i(3\alpha_0 - \varphi_0)} \right),$$

$$\alpha_k = e^{i(\varphi_0 - \alpha_0)} - \chi_k e^{-i(\varphi_0 - \alpha_0)}, b_k = \gamma_2^{(k)2} (e^{i(\varphi_0 - \alpha_0)} - 2(1 - \nu_k) e^{-i(\varphi_0 - \alpha_0)}),$$

$$h_k = 1/16(1 - \nu_k), p_n^{(k)}(s) = f_1^{(k)}(s) - (-1)^n i f_2^{(k)}(s), k = 1, 2,$$

$$T_k = \frac{2\mu_1 \gamma_1^{(1)} \tau_1}{1 - 2\nu_1} e^{-i\gamma_1^{(1)} \eta_0} ((-1)^k (1 - \nu_1) \cos \varphi_0 - i\nu_1 \sin \varphi_0)$$

$$N_1 = -N_2 = \gamma_1^{(1)} \tau_1 e^{-i\gamma_1^{(1)} \eta_0} \sin \varphi_0, \text{ у } P - \text{ випадку,}$$

$$T_k = i\mu_1 \gamma_2^{(1)} \tau_2 e^{-i(\gamma_2^{(1)} \eta_0 - (-1)^k \varphi_0)}, N_k = -i\gamma_2^{(1)} \tau_2 e^{-i\gamma_2^{(1)} \eta_0} \sin \varphi_0 \text{ у } SV - \text{ випадку.}$$

Тут ядра B_{mn} і C_{nn} ($n=1,2$) є сингулярними, B_{nn} і C_{nn} ($m \neq n$) – неперервними.

Отже, перші два рівняння в (13) є сингулярними інтегральними рівняннями 1-го роду, останні два – сингулярними інтегральними рівняннями 2-го роду. Необхідні для однозначної розв'язності сингулярних інтегральних рівнянь 1-го роду дві додаткові умови впливають із рівності переміщень на L (4) в одній фіксованій точці $s_* \in L$ або із рівності середніх переміщень на L .

Виконання модифікованих граничних умов для переміщень (диференціювання по дуговій координаті s_0) на контурі L жорсткого включення зводить крайову задачу до системи двох сингулярних інтегральних рівнянь 1-го роду (підсумовування по $n=1,2$):

$$\int_L p_n^{(1)}(s) B_{mn}^{(1)}(s_0, s) ds - \omega_0 M_m(s_0) = -N_m(s_0), m = 1, 2, \quad (14)$$

$$M_1 = i\omega_0 e^{i\varphi_0}, M_2 = -i\omega_0 e^{-i\varphi_0}.$$

Необхідні для замикання алгоритму три додаткових умови впливають із законів поступального (6) і обертального (7) рухів абсолютно жорсткого тіла.

Результати числових досліджень та їх аналіз. При чисельній реалізації побудованих алгоритмів у даній роботі використано метод механічних квадратур [8]. У якості прикладу розглядалося середовище, що містить включення еліптичного поперечного перерізу

$$\xi = a \sin \beta, \eta = -b \cos \beta, 0 \leq \beta \leq 2\pi. \quad (15)$$

На границі L включення проводилось обчислення безрозмірених напружень

$$\sigma_n = |\tau_n|/P, \sigma_s = |\tau_s|/P, \sigma_{ns} = |\tau_{ns}|/P, \quad (16)$$

де τ_n і τ_{ns} – амплітуди нормального і тангенціального напружень на L (9), τ_s визначається зі співвідношення $\tau_s + \tau_n = \tau_{11} + \tau_{22}$; P – максимальне напруження у падаючій хвилі, що дорівнює $\gamma_1^{(1)} \tau_1 (\lambda_1 + 2\mu_1)$ у P -випадку (1) і $\gamma_2^{(1)} \tau_2 \mu_1$ – у SV -випадку (2).

На рис. 1 наведені залежності максимальних значень напружень (16) на контурі еліптичного пружного включення (15) від відношення модулів зсуву волокна і матриці μ_2/μ_1 при набіганні на циліндр поперечної хвилі (2) ($a/b=2$, $\nu_1=\nu_2=0,3$, $\rho_2/\rho_1=2$). Криві 1, 2, 3 і 4 відповідають значенням параметра $\gamma_2^{(1)}a$, рівним 0,4; 0,7; 1,0 і 1,3.

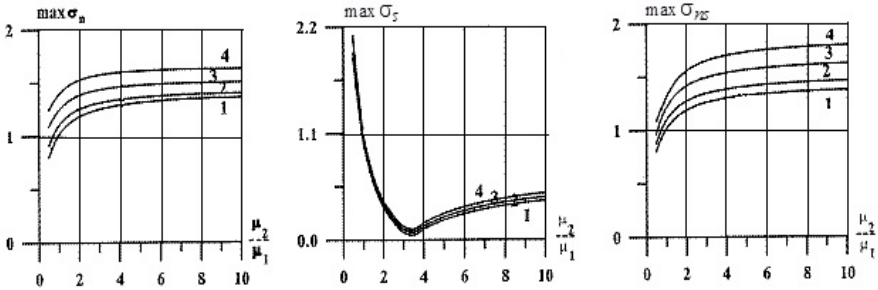


Рис. 1 – Максимальні напруження на контурі пружного включення.

Розрахунки показують, що при $\mu_2/\mu_1=3,3$ максимальні значення напружень σ_s досягають мінімуму, а $\max \sigma_n$ і $\max \sigma_{ns}$ зростають на всьому діапазоні зміни параметра μ_2/μ_1 . При $\mu_2/\mu_1 < 1$ на границі матриця-волоконно переважним може бути напруження σ_s . Якщо $\mu_2/\mu_1 > 1$, то вплив σ_s знижується і зростають значення σ_n і σ_{ns} .

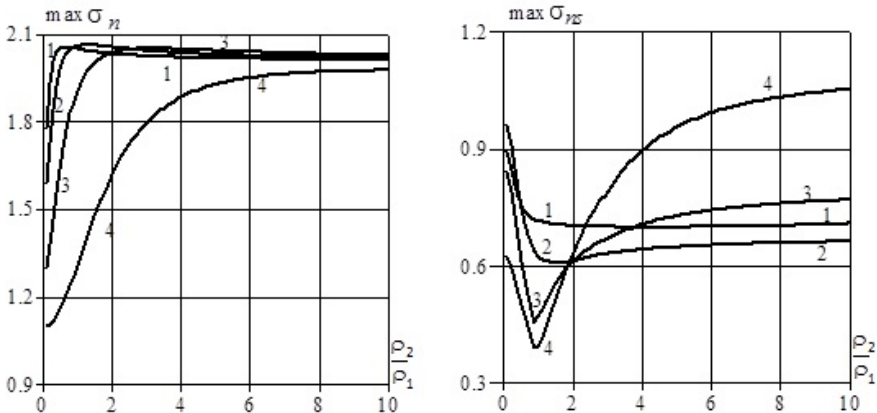


Рис. 2 – Максимальні напруження на контурі жорсткого включення.

При дифракції подовжньої (1) або поперечної (2) хвилі на жорсткому включенні напруження σ_s завжди менше σ_n і зв'язане з ним співвідношенням $\sigma_s = \sigma_n \nu_1 / (1 - \nu_1)$. Рис. 2 ілюструє розподіл максимальних контурних напружень σ_n і σ_{ns} у залежності від відношення щільностей включення та ма-

тричі ρ_2 / ρ_1 при $a/b = 0,5$; $\nu_1 = 0,3$ і набіганні на циліндр подовжньої хвилі (1). Криві 1, 2, 3 і 4 відповідають значенням $d/2a$, рівним 1/3; 0,5; 1,0 і 2,5 ($d = 2\pi / \gamma_1^{(1)}$ – довжина падаючої хвилі).

Аналіз показує, що зі збільшенням параметра ρ_2 / ρ_1 максимальні значення напружень σ_n спочатку зростають, а потім при досягненні деякого значення (залежного від відношення довжини хвилі до осі еліпса) вони поступово стабілізуються, що відповідає дифракції подовжньої хвилі на нерухомому включенні [9]. Напруження σ_{ns} , навпаки, спочатку спадають, а потім настає процес стабілізації. Причому у випадку коротких хвиль ($d/2a = 1/3$ і 0,5) жорстке включення починає вести себе як нерухоме вже при $\rho_2 / \rho_1 = 3$. Наприклад, при $d/2a = 1/3$ і $\rho_2 / \rho_1 = 3$ максимальні напруження на контурі жорсткого включення відрізняються від відповідних напружень на контурі нерухомого включення менше ніж на 2%. У випадку довгих хвиль ($d/2a = 2,5$) навіть при достатньо великих значеннях ρ_2 / ρ_1 ($\rho_2 / \rho_1 < 10$) максимальні значення σ_n і σ_{ns} продовжують змінюватись зі збільшенням. Тут стабілізація напружень відбувається при > 10 .

Висновки. У даній статті запропоновано підхід до розв'язання задач дифракції пружних гармонічних хвиль на циліндричних пружних або жорстких включеннях в умовах плоскої деформації. Будуються інтегральні зображення амплітуд переміщень відбитого поля в матриці і проникаючого поля у волокні (у випадку пружного включення). Крайові задачі зведені до системи сингулярних інтегральних рівнянь і обґрунтовуються необхідні додаткові умови. Чисельна реалізація інтегральних рівнянь проводилася методом механічних квадратур. Приводяться залежності максимальних напружень на контурі еліптичного включення в залежності від механічних, геометричних та динамічних характеристик.

Список літератури: 1. Гуляев Ю.В., Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л., Сизова Н.Д. Исследование дифракции упругих волн на пластинах, ослабленных двумя отверстиями произвольной формы // ДАН. Математическая физика. – 1996. – 349, № 2. – С. 175 – 179. 2. Подільчук Ю.Н., Рубцов Ю.К. Применение лучевых методов в задачах распространения и рассеяния волн (обзор) // Прикладная механика. – 1996. – 32, № 12. – С. 3 – 27. 3. Фильштинский Л. А. Дифракция упругих волн на трещинах, отверстиях, включениях в изотропной среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1991. – №4. – С. 119 – 127. 4. Гандель Ю.В., Душкин В.Д. Математические модели двумерных задач дифракции: сингулярные интегральные уравнения и численные методы дискретных особенностей // Харьков: Акад. ВВ МВД Украины. – 2012. – 544 с. 5. Назаренко А.М. Дифракция гармонических волн на цилиндрическом упругом включении в условиях плоской деформации // Динамические системы. – 2005. – №19. – С. 54 – 60. 6. Назаренко А.М., Панченко Б.Е., Ложкин А.М. Дифракция волн плоской деформации на жестком цилиндрическом включении произвольного поперечного сечения // Вісник Донецького університету. Серія А: Природничі науки. – 2006. – №3. – С. 113 – 117. 7. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах // К.: Наук. думка. – 1981. – 284 с. 8. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции // К.: Наук. думка. – 1984. – 344 с. 9. Назаренко А.М., Панченко Б.Е., Ложкин А.М. Метод сингулярных интегральных уравнений в задачах дифракции упругих волн на цилиндрических включениях // Вісник СумДУ. Сер. Фізика, математика, механіка. – 2004. – №8. – С. 144 – 150.

Bibliography (transliterated): 1. Guljaev, Yu. V., et al. "Issledovanie difrakcii uprugih voln na plastinakh, oslablennyh dvumja otverstijami proizvol'noj formy." *DAN. Matematicheskaja fizika*. Vol. 349. No. 2. 1996. 175–179. Print. 2. Podil'chuk, Yu. N., and Yu. K. Rubcov. "Primenenie luchevyh

metodov v zadachah rasprostraneniya i rassejaniya voln (obzor)." *Prikladnaja mehanika*. Vol. 32. No. 12. 1996. 3–27. Print. 3. Fil'shtinskij, L. A. "Difrakcija uprugih voln na treshhinah, otverstijah, vkljuchenijah v izotropnoj srede," *Izv. AN SSSR. Mehanika tverdogo tela*. No. 4. 1991. 119–127. Print. 4. Gandel', Yu. V., and V. D. Dushkin. *Matematicheskie modeli dvumernyh zadach difrakcii: singuljarnye integral'nye uravnenija i chislennye metody diskretnyh osobennostej*. Kharkov: Akad. VV MVD Ukrainy, 2012. Print. 5. Nazarenko, A. M. "Difrakcija garmonicheskikh voln na cilindricheskom uprugom vkljuchenii v uslovijah ploskoj deformacii." *Dinamicheskie sistemy*. No. 19. 2005. 54–60. Print. 6. Nazarenko, A. M., B. E. Panchenko and A. M. Lozhkin. "Difrakcija voln ploskoj deformacii na zhestkom cilindricheskom vkljuchenii proizvol'nogo poperechnogo sechenija." *Visnyk Donec'kogo universytetu. Ser. A: Pryrod-nychi nauky*. No. 3. 2006. 113–117. Print. 7. Grinchenko, V. T., and V. V. Meleshko. *Garmonicheskie kolebanija i volny v uprugih telah*. Kyiv: Nauk. dumka, 1981. Print. 8. Panasjuk, V. V., M. P. Savruk and Z. T. Nazarchuk. *Metod singuljarnyh integral'nyh uravnenij v dvumernyh zadachah difrakcii*. Kyiv: Nauk. dumka, 1984. Print. 9. Nazarenko, A. M., B. E. Panchenko and A. M. Lozhkin. "Metod singuljarnyh integral'nyh uravnenij v zadachah difrakcii uprugih voln na cilindricheskikh vkljuchenijah." *Visnyk SumDU. Ser.: Fizyka, matematyka, mehanika*. No. 8. 2004. 144–150. Print.

Надійшла (received) 05.06.2015

УДК 629.423.3

Л.В. ОВЕРЬЯНОВА, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПИ»;

О.В. ОМЕЛЬЯНЕНКО, студентка, НТУ «ХПИ»;

И.В. НОВОФАСТОВСКИЙ, студент, НТУ «ХПИ»

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОГО ИНЕРЦИОННОГО НАКОПИТЕЛЯ ЭНЕРГИИ В СИСТЕМЕ ТЯГОВОГО ПРИВОДА ПРИ ТОРМОЖЕНИИ ЭЛЕКТРОПОЕЗДА

Исследуется работа тягового электропривода электропоезда с бортовым электромеханическим инерционным накопителем энергии. Для расширения диапазона рабочих напряжений тягового электродвигателя и системы электромеханического преобразования энергии накопителя предлагается применить реверсивный повышающе-понижающий DC-DC преобразователь. Приводится схема включения накопителя в тяговый электропривод с DC-DC преобразователем, а также математическая модель обмена энергией в исследуемой системе. Установлено, что предлагаемое схематическое решение позволяет повысить эффективность утилизации энергии торможения электроподвижного состава, которая может быть использована в процессе последующего разгона поезда.

Ключевые слова: тяговый электропривод, электромеханический инерционный накопитель энергии, DC-DC преобразователь, электродвижущая сила, энергия обмена.

Введение. Морально устаревший электроподвижной состав (ЭПС) пригородного сообщения, эксплуатируемый в настоящее время на железных дорогах страны, нуждается в замене. Новый подвижной состав такого назначения должен создаваться на базе перспективных технологий транспортного машиностроения, одной из которых является энергосбережение. Для пригородного подвижного состава, характеризующегося частыми пусками и остановами, на которые расходуется от 30% энергии, затрачиваемой на тягу поездов, утилизация и последующее использование этой энергии является достаточно эффективным энергосберегающим средством. Одним из эффективных путей является использование на подвижном составе накопителей энер-