

В.И. ЩЕГЛОВ, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., НТУ «ХПИ»

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ТЕРМОУПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ ГРАНИЧНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПОЛОГО БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НА НЕГО ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Установлен эффект уменьшения внутреннего радиуса упругого полого бесконечного цилиндра B , являющегося телом вращения с круговыми цилиндрическими граничными поверхностями, при воздействии на него цилиндрического температурного поля, вызывающего равномерный нагрев бесконечного осесимметричного полого цилиндра \bar{B}_1 , соосного с цилиндром B , являющегося правильной его частью, при неизменности температуры полого цилиндра B во всех его точках, не принадлежащих полуму цилиндру \bar{B}_1 , причем дополнительно должны выполняться следующие условия: достаточная близость всех точек зоны нагрева полого цилиндра B к его внутренней граничной поверхности; положительность среднего значения коэффициента линейного расширения материала полого цилиндра B в пределах изменения его температуры в зоне нагрева; определенный характер зависимости от температуры модуля Юнга и коэффициента Пуассона материала тела B .

Ключевые слова: термоупругая деформация, граничная поверхность, полый бесконечный цилиндр, нагрев, температурное поле, модуль Юнга, коэффициент Пуассона, коэффициент линейного расширения.

Введение и цель работы. При разработке технологий и оборудования тепловой сборки, разборки соединений с натягом, а также при разработке прессового оборудования возникает необходимость решить задачу определения формы и размеров границ упругих тел, подвергшихся воздействию на них температурных полей. В работе [1] эта задача решена для случая, когда в качестве упругого тела рассматривается упругий изотропный полый шар или упругое пространство с шаровой полостью, а в качестве температурных полей – сферические температурные поля, центр симметрии которых совпадает с центром симметрии полого шара и центром симметрии упругого пространства с шаровой полостью, соответственно, причем эти сферические температурные поля моделируют нагрев указанных упругих тел, сконцентрированный вблизи внутренней граничной сферы – для полого шара и граничной сферы – для упругого пространства с шаровой полостью.

Целью настоящей работы является нахождение формы и размеров граничных поверхностей упругого изотропного бесконечного полого цилиндра B , являющегося телом вращения с круговыми цилиндрическими граничными поверхностями, и упругого изотропного пространства с бесконечной круговой цилиндрической полостью, обозначаемого Π , подвергшихся воздействию на них цилиндрических температурных полей, ось симметрии которых совпадает с осью вращения соответствующего нагреваемого тела, вызывающих равномерный нагрев до температуры T_n бесконечного осесимметричного полого цилиндра \bar{B}_1 , соосного с телом B или телом Π , являющегося правильной его (тела B или тела Π) частью, граничные цилиндрические по-

верхности которого не пересекаются с границами тел B и Π , при неизменности температуры $T_0 < T_n$ во всех точках тел B и Π , не принадлежащих полю цилиндру \bar{B}_1 . Вышеуказанные температурные поля моделируют нагрев тела B (тела Π), сконцентрированный в зоне, несколько удаленной от граничных цилиндрических поверхностей тела B (граничной цилиндрической поверхности тела Π).

Постановка задачи. Рассматриваются следующие однородные и изотропные тела вращения: упругий полый бесконечный цилиндр, обозначаемый B , с граничными цилиндрическими круговыми поверхностями, являющимися соосными поверхностями вращения с радиусами R_0 и R_2 ($R_0 < R_2$); упругое пространство с цилиндрической полостью, обозначаемое Π , с границей, являющейся круговой цилиндрической поверхностью радиуса R_0 . Нормальные сечения указанных выше упругих тел B и Π показаны на рис. 1 и рис. 2 соответственно.

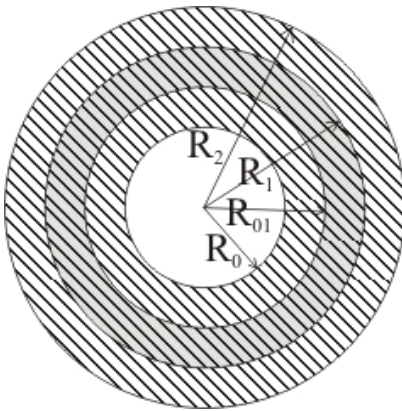


Рис. 1 – Нормальное сечение полого бесконечного цилиндра с отмеченным кольцом серого цвета сечением зоны его нагрева, удалённой от его внутренней граничной поверхности.

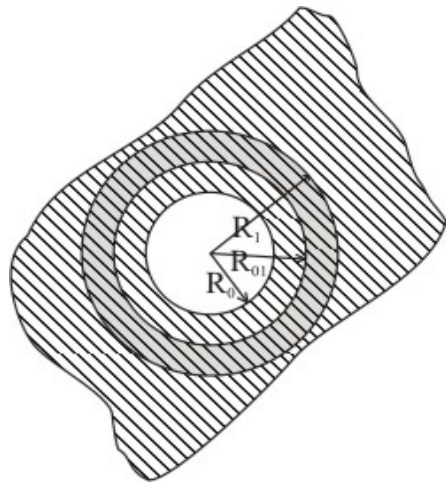


Рис. 2 – Нормальное сечение упругого пространства, имеющего цилиндрическую полость, с отмеченным кольцом серого цвета сечением зоны его нагрева, удалённой от граничной поверхности полости.

Упругие тела B и Π имеют во всех их точках одинаковую исходную температуру, равную T_0 , при которой они находятся в ненапряженном состоянии. На рассматриваемые упругие тела B и Π действует температурное поле, вызывающее равномерный их нагрев до температуры T_n ($T_n > T_0$) в правильной части тел B и Π – в полом бесконечном цилиндре, обозначаемом \bar{B}_1 , являющемся фигурой вращения, соосной с нагреваемым телом (B

или Π). Граничными поверхностями тела \bar{B}_1 являются соосные с телом B (телом Π) круговые цилиндрические поверхности, радиусы которых обозначаются R_{01} и R_1 ($R_0 < R_{01} < R_1 < R_2$), непересекающиеся с граничными поверхностями нагреваемых тел. Остальные точки тел B и Π в результате воздействия рассматриваемого температурного поля имеют исходную температуру T_0 . Нормальное сечение полого бесконечного цилиндра \bar{B}_1 показано на рис. 1 и рис. 2 кольцом серого цвета. Предполагаем, что объемные силы и поверхностная нагрузка на тела B и Π не действуют. Требуется в рамках *математической модели несвязной квазистатической термоупругости* определить формы граничных поверхностей тел B и Π и их размеры после воздействия на эти тела описанных выше температурных полей. Коэффициент теплопроводности материала тел B и Π считается не зависящим от температуры в пределах ее изменения от T_0 до T_n .

Математическая модель. В силу осевой симметрии нагреваемых тел B и Π , а также того, что температурные поля, вызывающие их нагрев, являются цилиндрическими с осью симметрии, совпадающей с осью симметрии нагреваемого тела, приходим к выводу, что граница тела B в результате его нагрева будет представлять объединение двух непересекающихся соосных цилиндрических круговых поверхностей, а граница тела Π после нагрева имеет форму цилиндрической круговой поверхности. Будем рассматривать нагреваемые тела B и Π и функции распределения температурных полей, вызывающих их нагрев, в цилиндрической системе координат, ось аппликат которой совпадает с осью симметрии нагреваемого тела, полярная ось лежит в плоскости, перпендикулярной оси аппликат, начало отсчета на оси аппликат совпадает с началом полярной оси, цилиндрическими координатами точки нагреваемого тела являются: r – расстояние точки от оси аппликат; φ – полярный угол ортогональной проекции точки на вышеуказанную плоскость, перпендикулярную оси аппликат, называемую *основной плоскостью*; z – аппликата рассматриваемой точки. Функции распределения температурных полей, возникающих в телах B и Π в результате их вышеописанного нагрева, в выбранной цилиндрической системе координат имеют вид:

для полого цилиндра

для упругого пространства с
цилиндрической полостью

$$T = T_0 + (T_n - T_0)H\left(\frac{r}{R_{01}} - 1\right)H\left(1 - \frac{r}{R_1}\right), \quad T = T_0 + (T_n - T_0)H\left(\frac{r}{R_{01}} - 1\right)H\left(1 - \frac{r}{R_1}\right), \quad (1)$$

$$r \in [R_0, R_2];$$

$$r \in [R_0, +\infty),$$

где $H(p)$, $p \in (-\infty, +\infty)$ – единичная функция Хевисайда, равная 1 при $p \geq 0$ и равная 0 при $p < 0$; r – описанная ранее цилиндрическая координата точки нагреваемого тела.

Функции распределения (1) рассматриваемых температурных полей, возникающих в результате нагрева тел B и Π , моделируют нагрев этих тел, сконцентрированный в зоне, несколько удаленной от их граничных поверх-

ностей. Температурные поля, возникающие в телах B и Π в процессе их нагрева, могут задаваться, например, следующими функциями распределения:

<p>для полого цилиндра</p> $T = T_0 + (T_n - T_0)H\left(\frac{r}{R_{01}} - 1\right) \times$ $\times H\left(1 - \frac{r}{R_1}\right)f\left(\frac{\tau}{\tau_n}\right),$ $r \in [R_0, R_2], 0 \leq \tau \leq \tau_n;$	<p>для упругого пространства с цилиндрической полостью</p> $T = T_0 + (T_n - T_0)H\left(\frac{r}{R_{01}} - 1\right) \times$ $\times H\left(1 - \frac{r}{R_1}\right)f\left(\frac{\tau}{\tau_n}\right),$ $r \in [R_0, +\infty), 0 \leq \tau \leq \tau_n,$
---	---

где τ_n – время, прошедшее от начала до окончания нагрева тел B или Π ($\tau_n > 0$); τ – время, отсчитываемое от начала нагрева тела B или Π ($0 \leq \tau \leq \tau_n$); $f(p)$ – числовая функция, возрастающая и гладкая на $[0, 1]$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

Функции (2) являются решениями *неоднородного уравнения теплопроводности* при объемных плотностях распределения мощности источников тепла, задаваемых обобщенными функциями. При $\tau = \tau_n$ функции (2) равны соответствующим функциям (1).

Решение задачи определения размеров граничных поверхностей тел B и Π в результате их указанного выше нагрева (при $\tau = \tau_n$) рассмотрим в двух случаях:

1. Когда предполагается, что в процессе нагрева упругих тел B и Π ($0 \leq \tau \leq \tau_n$) модуль Юнга E , коэффициент Пуассона ν и коэффициент линейного расширения α их материала не зависят от температуры.

2. Когда учитывается при решении задачи зависимость от температуры модуля Юнга E , коэффициента Пуассона ν и коэффициента линейного расширения α материала упругих тел B и Π .

Векторное поле перемещений $\vec{U}(P)$ точек P упругого изотропного тела B (тела Π) в силу симметрии как тел B и Π , так и действующих на них температурных полей (цилиндрических) является цилиндрическим векторным полем, ось симметрии которого совпадает с осью симметрии температурного поля и осью вращения тела B (тела Π). Вектор-функция $\vec{i} = (u_r(r), 0, 0)$ задает векторное поле перемещений $\vec{U}(P)$ в вышеуказанной цилиндрической системе координат, где функция $u_r(r)$ задает радиальную компоненту вектора перемещений точек нагреваемого тела, азимутальная и аксиальная компоненты вектора \vec{i} равны 0.

В первом случае при решении задачи о нахождении радиусов нормальных сечений граничных цилиндрических круговых поверхностей бесконечного полого цилиндра B' , получающегося из полого цилиндра B в результате воздействия на него температурного поля, задаваемого формулой (1), воспользуемся выражением, приведенным в работе [2], для вычисления радиальной компоненты $u_r(r)$ вектор-функции, задающей распределение век-

торного поля перемещений $\bar{U}(p)$. В результате вычислений получаем:

$$u_r(R_0) = (1 + \nu_0)\alpha_0 t_{cp} R_0; \quad (3)$$

$$u_r(R_2) = (1 + \nu_0)\alpha_0 t_{cp} R_2, \quad (4)$$

где α_0 – коэффициент линейного расширения материала упругого полого цилиндра B при его температуре, равной T_0 ; ν_0 – коэффициент Пуассона материала полого цилиндра B при температуре T_0 ; t_{cp} – среднее по нормальному сечению тела B значение функции распределения $t(r)$ в выше-введенной цилиндрической системе координат скалярного поля $T(P) - T_0$ изменения температуры в каждой точке P тела B в результате его нагрева, определяемое по формуле:

$$t_{cp} = \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_2^2 - R_0^2} t_n. \quad (5)$$

В формуле (5) $t_n = T_n - T_0$. Используя соотношения (3), (4) и (5), найдем формулы для вычисления внутреннего R_0' и внешнего R_2' радиусов полого цилиндра B' :

$$R_0' = R_0[1 + (1 + \nu_0)\alpha_0 t_{cp}], \quad (6)$$

$$R_2' = R_2[1 + (1 + \nu_0)\alpha_0 t_{cp}]. \quad (7)$$

Из формул (6), (7) в силу $t_{cp} > 0$ следует, что при вышеописанном нагреве и выполнении условия $\alpha_0 > 0$ радиусы внутренней и внешней граничных круговых цилиндрических поверхностей полого бесконечного упругого кругового цилиндра увеличиваются, при $\alpha_0 < 0$ – уменьшаются, а при $\alpha_0 = 0$ – не изменяются, то есть при $\alpha_0 > 0$ внутренний и внешний радиусы полого бесконечного кругового цилиндра увеличиваются, при $\alpha_0 < 0$ – уменьшаются, а при $\alpha_0 = 0$ остаются неизменными.

Для нахождения в первом случае радиуса R_0' нормального сечения граничной цилиндрической круговой поверхности упругого тела вращения Π' , являющегося упругим пространством с бесконечной круговой цилиндрической полостью, получающегося из тела Π в результате воздействия на него цилиндрического температурного поля, задаваемого формулой (1), воспользуемся равенством (6), в котором $t_{cp} = 0$ (этот результат получается из равенства (5) в результате предельного перехода при $R_2 \rightarrow +\infty$). Таким образом, находим:

$$R_0' = R_0, \quad (8)$$

то есть радиус граничной цилиндрической круговой поверхности упругого пространства с бесконечной круговой цилиндрической полостью в результате описанного выше нагрева не меняется, что означает неизменность радиуса

цилиндрической круговой полости тела Π в результате рассматриваемого его нагрева.

Учёт зависимости термоупругих коэффициентов от температуры.

Рассмотрим решение задачи о нахождении радиусов нормальных сечений граничных цилиндрических круговых поверхностей бесконечного полого цилиндра B' , получающегося из полого цилиндра B в результате воздействия на него цилиндрического температурного поля с функцией распределения (1), во втором случае, когда учитывается температурная зависимость модуля Юнга, коэффициента Пуассона и коэффициента линейного расширения материала тела B . Функция распределения $t(r)$ изменения температуры в каждой точке тела B в результате его нагрева имеет вид:

$$t(r) = \begin{cases} 0, & R_0 \leq r < R_{01}; \\ t_n, & R_{01} \leq r \leq R_1; \\ 0, & R_1 < r \leq R_2. \end{cases} \quad (9)$$

Как отмечалось ранее, азимутальная и аксиальная компоненты вектор-функции, задающей в вышевыбранной цилиндрической системе координат векторное поле перемещений $\vec{U}(P)$, равны нулю, радиальная компонента зависит только от цилиндрической координаты r ($u_r = u_r(r)$). В силу этого, учитывая связь компонент тензора деформаций с вышеупомянутой вектор-функцией, имеем следующие равенства: $e_z = e_{rz} = e_{\varphi z} = e_{r\varphi} = 0$. Используя закон Гука, находим: $\sigma_{rz} = \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi z} = 0$. Для всех внутренних точек тела B имеют место равенства: $e_r = u_r'(r)$, $e_\varphi = u_r(r)/r$. Рассмотрим три открытых соосных бесконечных полых цилиндра

$$B_0: R_0 < r < R_{01}, \quad B_1: R_{01} < r < R_1, \quad B_2: R_1 < r < R_2,$$

которые являются непересекающимися подмножествами тела B . Тогда, учитывая закон Гука, уравнения равновесия тел \bar{B}_0 , \bar{B}_1 , \bar{B}_2 и связь компонент тензора деформации с компонентами вектор-функции $\vec{u}(r)$, находим обыкновенное дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет радиальная компонента $u_r(r)$ вектор-функции $\vec{u}(r)$ на объединении интервалов (R_0, R_{01}) , (R_{01}, R_1) , (R_1, R_2) :

$$u_r''(r) + u_r'(r)/r + u_r(r)/r^2 = 0. \quad (10)$$

Тогда на указанном выше объединении интервалов имеем:

$$u_r(r) = \begin{cases} C_1 r + C_2 / r, & R_0 < r < R_{01}; \\ D_1 r + D_2 / r, & R_{01} < r < R_1; \\ M_1 r + M_2 / r, & R_1 < r < R_2. \end{cases} \quad (11)$$

Коэффициенты C_1 , C_2 , D_1 , D_2 , M_1 , M_2 определяются однозначно из следующих условий:

$$u_r(R_{01} - 0) = u_r(R_{01} + 0), \quad (12)$$

$$u_r(R_1 - 0) = u_r(R_1 + 0), \quad (13)$$

$$\sigma_r(R_{01} - 0) = \sigma_r(R_{01} + 0), \quad (14)$$

$$\sigma_r(R_1 - 0) = \sigma_r(R_1 + 0), \quad (15)$$

$$\sigma_r(R_0 + 0) = 0, \quad (16)$$

$$\sigma_r(R_2 - 0) = 0. \quad (17)$$

Условия (12) – (15) являются следствием непрерывности функций $u_r(r)$ и $\sigma_r(r)$ на сегменте $[R_0, R_2]$, а условия (16) и (17) являются следствием как условия непрерывности функции $\sigma_r(r)$ на $[R_0, R_2]$, так и условия отсутствия нагрузки на граничных поверхностях упругого тела B . Решая систему шести линейных алгебраических уравнений с шестью неизвестными $C_1, C_2, D_1, D_2, M_1, M_2$, получающуюся из условий (11) – (17), находим выражения для постоянных $C_1, C_2, D_1, D_2, M_1, M_2$ через $R_0, R_{01}, R_1, R_2, \nu_0 = \nu(T_0), \nu_1 = \nu(T_H), E_0 = E(T_0), E_1 = E(T_H), \alpha_1 = \alpha(T_H)$, где, следуя работе [2], $\alpha(T_H)$ – среднее значение коэффициента линейного расширения материала полого цилиндра B в диапазоне изменения его температуры от T_0 до T_H .

Тогда, используя равенство (11), получаем:
при $R_0 \leq r \leq R_{01}$

$$u_r(r) = \alpha_1 t_H (1 + \nu_1) \left(1 - \frac{R_{01}^2}{R_1^2}\right) r \left(1 - 2\nu_0 + \frac{R_0^2}{r^2}\right) \frac{1 + (1 - 2\nu_0) \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 - \frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0} \left(1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right)}{W(\nu_0, \nu_1, E_0, E_1, R_0, R_{01}, R_1, R_2)}, \quad (18)$$

при $R_1 \leq r \leq R_2$

$$u_r(r) = \alpha_1 t_H (1 + \nu_1) R_1^2 \left(1 - \left(\frac{R_{01}}{R_1}\right)^2\right) \frac{1}{r} \left[1 + (1 - 2\nu_0) \left(\frac{r}{R_2}\right)^2\right] \frac{1 - 2\nu_0 + \left(\frac{R_0}{R_{01}}\right)^2 + \frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0} \left(1 - \left(\frac{R_0}{R_{01}}\right)^2\right)}{W(\nu_0, \nu_1, E_0, E_1, R_0, R_{01}, R_1, R_2)}. \quad (19)$$

В формулах (18), (19)

$$W(\nu_0, \nu_1, E_0, E_1, R_0, R_{01}, R_1, R_2) = \left[1 + (1 - 2\nu_0) \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right] \left[\left(1 - 2\nu_0 + \left(\frac{R_0}{R_{01}}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{R_{01}}{R_1}\right)^2\right) + \frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0} \left(1 - \left(\frac{R_0}{R_{01}}\right)^2\right) \left(1 + (1 - 2\nu_1) \left(\frac{R_{01}}{R_1}\right)^2\right)\right] + \frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0} \left(1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right) \left[\left(1 - 2\nu_0 + \left(\frac{R_0}{R_{01}}\right)^2\right) \left(1 - 2\nu_1 + \left(\frac{R_{01}}{R_1}\right)^2\right) + \frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0} \left(1 - 2\nu_1\right) \left(1 - \left(\frac{R_0}{R_{01}}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{R_{01}}{R_1}\right)^2\right)\right]. \quad (20)$$

Используя равенство (19), находим:

$$u_r(R_2) = 2\alpha_1 t_H \frac{(1 + \nu_1)(1 - \nu_0)(R_1^2 - R_{01}^2)R_2^{-1}}{W(\nu_0, \nu_1, E_0, E_1, R_0, R_{01}, R_1, R_2)} \left[1 - 2\nu_0 + \left(\frac{R_0}{R_{01}}\right)^2 + \right.$$

$$+ \frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0} \left(1 - \left(\frac{R_0}{R_{01}}\right)^2\right)]. \quad (21)$$

Из формулы (21) следует, что в результате описанного выше нагрева полого цилиндра B при $\alpha_1 > 0$ внешний радиус полого цилиндра B увеличивается, при $\alpha_1 < 0$ – уменьшается, а при $\alpha_1 = 0$ – остается неизменным. Радиус R'_2 нормального сечения внешней граничной круговой цилиндрической поверхности полого цилиндра B' , получающегося из полого цилиндра B в результате воздействия на него используемого нагрева, определяем из равенства $R'_2 = R_2 + u_r(R_2)$. Используя формулу (21), получаем:

$$R'_2 > R_2 \text{ при } \alpha_1 > 0, \quad R'_2 < R_2 \text{ при } \alpha_1 < 0, \quad R'_2 = R_2 \text{ при } \alpha_1 = 0.$$

Используя равенство (18), находим:

$$u_r(R_0) = 2\alpha_1 t_n \frac{(1 + \nu_1)(1 - \nu_0)R_0 \left(1 - \left(\frac{R_{01}}{R_1}\right)^2\right)}{W(\nu_0, \nu_1, E_0, E_1, R_0, R_{01}, R_1, R_2)} \left[1 + (1 - 2\nu_0)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 - \frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0} \left(1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right)\right]. \quad (22)$$

Из формулы (22) следует, что знак или равенство нулю $u_r(R_0)$ зависит только от знака или равенства нулю произведения α_1 и выражения, стоящего в квадратных скобках. При $\alpha_1 > 0$ получаем $u_r(R_0) < 0$ (внутренний радиус полого цилиндра B уменьшается в результате описанного ранее нагрева), если выполняется неравенство

$$R_1 < R_2 \left\{ \left[\frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0} - 1 \right] : \left[\frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0} + 1 - 2\nu_0 \right] \right\}^{1/2} \quad (23)$$

при необходимом выполнении условия

$$\frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0} > 1. \quad (24)$$

Вводя величину R_{10} , задаваемую равенством

$$R_{10} = R_2 \left\{ \left[\frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0} - 1 \right] : \left[\frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0} + 1 - 2\nu_0 \right] \right\}^{1/2}, \quad (25)$$

приходим к выводу, что при выполнении неравенства (24) из условия $R_1 = R_{10}$ следует, что $u_r(R_0) = 0$ (внутренний радиус полого цилиндра B не изменяется); из условия $R_1 > R_{10}$ следует, что $u_r(R_0) > 0$ (внутренний радиус тела B увеличивается), если $\alpha_1 > 0$, и $u_r(R_0) < 0$ (внутренний радиус тела B уменьшается), если $\alpha_1 < 0$; из условия $R_1 < R_{10}$ следует, что $u_r(R_0) < 0$ (внутренний радиус тела B уменьшается), если $\alpha_1 > 0$, и $u_r(R_0) > 0$ (внутренний радиус тела B увеличивается), если $\alpha_1 < 0$. Если условие (24) не выполняется, то при $\alpha_1 > 0$ внутренний радиус полого цилиндра B увеличивается, а при $\alpha_1 < 0$ –

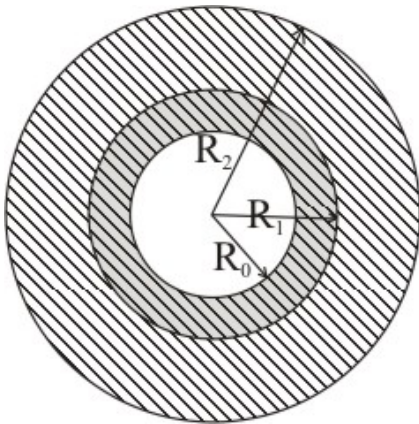


Рис. 3 – Нормальное сечение полого бесконечного цилиндра с отмеченным кольцом серого цвета сечением зоны его нагрева, примыкающей к его внутренней граничной поверхности.

В случае $\alpha_1 = 0$ получаем $R'_0 = R_0$. Выполнение неравенства (24) является необходимым и достаточным условием существования и положительности величины R_{10} .

Анализ предельных случаев. Рассмотрим некоторые предельные случаи используемого нагрева полого бесконечного цилиндра. В случае, когда зона нагрева \bar{B}_1 полого цилиндра B примыкает к его внутренней граничной круговой цилиндрической поверхности (нормальное сечение тела B с отмеченным кольцом серого цвета нормальным сечением зоны его нагрева показано в этом случае на рис. 3), формулы для вычисления $u_r(R_0)$ и $u_r(R_2)$ получаются в результате предельного перехода в равенствах (20) – (22) при $R_{01} \rightarrow R_0 + 0$. Тогда

$$u_r(R_0) = \alpha_1 t_{\text{н}} (1 + \nu_1) \left[1 - \left(\frac{R_0}{R_1} \right)^2 \right] R_0 \left\{ 1 + (1 - 2\nu_0) \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 - \frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0} \left[1 - \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right] \right\} \times \\ \times \left\{ \left[1 + (1 - 2\nu_0) \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{R_0}{R_1} \right)^2 \right] + \frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0} \left[1 - 2\nu_1 + \left(\frac{R_0}{R_1} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right] \right\}^{-1}; \quad (26)$$

$$u_r(R_2) = 2\alpha_1 t_{\text{н}} (1 + \nu_1) (1 - \nu_0) \frac{R_1^2}{R_2} \left[1 - \left(\frac{R_0}{R_1} \right)^2 \right] \times \\ \times \left\{ \left[1 + (1 - 2\nu_0) \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{R_0}{R_1} \right)^2 \right] + \frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0} \left[1 - 2\nu_1 + \left(\frac{R_0}{R_1} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right] \right\}^{-1}. \quad (27)$$

С помощью формулы (26) приходим к заключению, что при выполнении неравенства (24) из условия $R_1 = R_{10}$, где R_{10} задается формулой (25),

уменьшается. Если $\alpha_1 = 0$, то внутренний радиус тела B не изменяется ($u_r(R_0) = 0$). Если радиус нормального сечения внутренней граничной цилиндрической круговой поверхности полого цилиндра B' обозначить R'_0 , то при выполнении неравенства (24) из равенства $R_1 = R_{10}$ следует равенство $R'_0 = R_0$; из неравенства $R_1 > R_{10}$ следует неравенство $R'_0 > R_0$, если $\alpha_1 > 0$, и неравенство $R'_0 < R_0$, если $\alpha_1 < 0$; из неравенства $R_1 < R_{10}$ следует соотношение $R'_0 < R_0$, если $\alpha_1 > 0$, и $R'_0 > R_0$, если $\alpha_1 < 0$. При невыполнении неравенства (24) при $\alpha_1 > 0$ $R'_0 > R_0$, при $\alpha_1 < 0$ $R'_0 < R_0$.

следует, что в результате указанного нагрева полого цилиндра его внутренний радиус не изменяется, из условия $R_1 > R_{10}$ следует, что внутренний радиус полого цилиндра увеличивается, если $\alpha_1 > 0$, и уменьшается при $\alpha_1 < 0$, из условия $R_1 < R_{10}$ следует, что внутренний радиус полого цилиндра уменьшается, если $\alpha_1 > 0$, и увеличивается, если $\alpha_1 < 0$. При невыполнении условия (24) внутренний радиус полого цилиндра B увеличивается, если $\alpha_1 > 0$, и уменьшается при $\alpha_1 < 0$. При $\alpha_1 = 0$ внутренний радиус полого цилиндра не изменяется.

Из формулы (27) следует, что в результате рассматриваемого нагрева тела B его внешний радиус увеличивается, если $\alpha_1 > 0$, уменьшается при $\alpha_1 < 0$ и не изменяется при $\alpha_1 = 0$. Осуществляя предельный переход в равенствах (26), (27) при $R_1 \rightarrow R_2 - 0$, получаем равенства

$$u_r(R_0) = \alpha_1 t_n (1 + \nu_1) R_0 \text{ и } u_r(R_2) = \alpha_1 t_n (1 + \nu_1) R_2,$$

из которых следует, что в этом случае нагрева полого цилиндра изменения величин его внутреннего и внешнего радиусов совпадают с их изменениями в равномерно нагретом на температуру t_n полом цилиндре. Осуществляя предельный переход в равенствах (26) и (27) при $R_1 \rightarrow R_0 + 0$, получаем равенства $u_r(R_0) = 0$ и $u_r(R_2) = 0$, из которых следует неизменность величин внутреннего и внешнего радиусов полого цилиндра так же, как у полого цилиндра в ненагретом состоянии.

Радиусы граничных поверхностей до и после нагрева. Рассмотрим задачу о нахождении радиуса R'_0 граничной цилиндрической круговой поверхности упругого пространства с цилиндрической полостью, обозначаемого P' , получающегося из тела P в результате воздействия на него температурного поля (1). Как в случае 1), когда предполагается независимость от температуры термоупругих постоянных α, E, ν материала тела P , так и в случае 2), когда эта зависимость имеет место, применим вышеиспользуемый для тела B алгоритм решения этой задачи. Рассмотрим тела вращения – два открытых полых соосных цилиндра

$$B_0: R_0 < r < R_{01}, \quad B_1: R_{01} < r < R_1$$

и соосное с ними открытое упругое пространство с цилиндрической полостью, обозначаемое B_2 , где $B_2: r > R_1$. Тогда, учитывая закон Гука, уравнения равновесия упругих тел $\bar{B}_0, \bar{B}_1, \bar{B}_2$ и связь компонент тензора деформаций с радиальной компонентой $u_r(r)$ вектор-функции $\vec{u}(r)$, находим, что функция $u_r(r)$ удовлетворяет уравнению (10) на объединении множеств $(R_0, R_{01}), (R_{01}, R_1), (R_1, +\infty)$. Используя работы [2], [3] и учитывая конечность потенциальной энергии упругих деформаций для любой части тела P , множество аппликат всех точек которой ограничено, вызванных воздействием на тело P температурного поля, задаваемого формулой (1), находим на множестве $(R_0, R_{01}) \cup (R_{01}, R_1) \cup (R_1, +\infty)$ следующее представление для

функции $u_r(r)$:

$$u_r(r) = \begin{cases} C_1 r + C_2 / r, & R_0 < r < R_{01}; \\ D_1 r + D_2 / r, & R_{01} < r < R_1; \\ M / r, & r > R_1. \end{cases} \quad (28)$$

Напомним, что условия (12) – (15) являются следствием непрерывности функций $u_r(r)$ и $\sigma_r(r)$ на $[R_0, +\infty)$, а равенство (16) является следствием как условия непрерывности функции $\sigma_r(r)$ на полупрямой $[R_0, +\infty)$, так и условия отсутствия нагрузки на граничной поверхности упругого тела Π . Решая систему пяти линейных алгебраических уравнений с пятью неизвестными C_1, C_2, D_1, D_2, M , получающуюся с использованием равенств (12) – (16), (28), находим выражения для постоянных C_1, C_2, D_1, D_2, M через значения

$$R_0, R_{01}, R_1, E_0 = E(T_0), E_1 = E(T_H), \nu_0 = \nu(T_0), \nu_1 = \nu(T_H), \alpha_1,$$

где $E(T)$, $\nu(T)$ – функции, выражающие температурную зависимость модуля Юнга и коэффициента Пуассона материала тела Π соответственно, а α_1 , следуя работе [2], является средним значением коэффициента линейного расширения материала тела Π в диапазоне изменения его температуры от T_0 до T_H в зоне нагрева. Тогда, используя равенство (28), при $R_0 \leq r \leq R_{01}$ получаем:

$$u_r(r) = \alpha_1 t_H (1 + \nu_1) \left(1 - \frac{R_{01}^2}{R_1^2}\right) r \left(1 - 2\nu_0 + \frac{R_0^2}{r^2}\right) \frac{1 - \frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0}}{W_0(\nu_0, \nu_1, E_0, E_1, R_0, R_{01}, R_1)}, \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} W_0(\nu_0, \nu_1, E_0, E_1, R_0, R_{01}, R_1) = & \left(1 - 2\nu_0 + \frac{R_0^2}{R_{01}^2}\right) \left(1 - \frac{R_{01}^2}{R_1^2}\right) + \frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0} \left[\left(1 - \frac{R_0^2}{R_{01}^2}\right) \times \right. \\ & \times \left(1 + \left(1 - 2\nu_1\right) \frac{R_{01}^2}{R_1^2}\right) + \left(1 - 2\nu_0 + \frac{R_0^2}{R_{01}^2}\right) \left(1 - 2\nu_1 + \frac{R_{01}^2}{R_1^2}\right) + \frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0} \left(1 - 2\nu_1\right) \left(1 - \frac{R_0^2}{R_{01}^2}\right) \times \\ & \left. \times \left(1 - \frac{R_{01}^2}{R_1^2}\right)\right]. \end{aligned} \quad (30)$$

При $r = R_0$ из формулы (29) находим

$$u_r(R_0) = 2\alpha_1 t_H (1 + \nu_1) (1 - \nu_0) R_0 \left(1 - \frac{R_{01}^2}{R_1^2}\right) \frac{1 - \frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0}}{W_0(\nu_0, \nu_1, E_0, E_1, R_0, R_{01}, R_1)}. \quad (31)$$

Учитывая неравенство $W_0(\nu_0, \nu_1, E_0, E_1, R_0, R_{01}, R_1) > 0$ и соотношение $R'_0 = R_0 + u_r(R_0)$, из формулы (31) следует, что если произведение

$$\alpha_1 \left(1 - \frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0}\right) \quad (32)$$

положительно, то $u_r(R_0) > 0$, $R'_0 > R_0$ (радиус полости тела Π увеличивается), если произведение (32) отрицательно, то $u_r(R_0) < 0$, $R'_0 < R_0$ (радиус полости тела Π уменьшается), а если произведение (32) равно нулю, то $u_r(R_0) = 0$, $R'_0 = R_0$ (радиус полости тела Π не изменяется).

При рассмотрении случая независимости от температуры модуля Юнга, коэффициента Пуассона и коэффициента линейного расширения материала упругого пространства с цилиндрической полостью, обозначаемого Π , в формуле (31) полагаем $E_1 = E_0$, $\nu_1 = \nu_0$, $\alpha_1 = \alpha_0$. Тогда, как установлено выше, $u_r(R_0) = 0$, $R'_0 = R_0$ (радиус цилиндрической полости тела Π в результате вышеописанного его нагрева не меняется). Тот же результат получается из формул (3) и (5), осуществляя предельный переход в формуле (5) при $R_2 \rightarrow +\infty$ и зафиксированных величинах R_0 , R_{01} , R_1 , t_n . При рассмотрении случая 2) формула (29) получается из формул (18) и (20) в результате предельного перехода в них, когда $R_2 \rightarrow +\infty$, а остальные величины r , R_0 , R_{01} , R_1 , E_0 , E_1 , ν_0 , ν_1 , α_1 , t_n зафиксированы.

Результаты моделирования. Рассмотрим пример расчета радиуса R'_0 внутренней граничной круговой цилиндрической поверхности бесконечного полого цилиндра B' , получающегося из бесконечного полого цилиндра B в результате воздействия на него температурного поля (1). Материал полого цилиндра B – медь, $R_0 = 10$ мм, $R_{01} = 20$ мм, $R_2 = 150$ мм, $T_0 = 0^\circ\text{C}$, $T_n = 100^\circ\text{C}$. В расчетах использовались следующие значения коэффициентов E , ν , α : $E_0 = 132$ ГПа, $E_1 = 128$ ГПа, $\nu_0 = 0,31$, $\nu_1 = 0,315$, $\alpha_0 = 16,4 \cdot 10^{-6} 1/\text{K}$, $\alpha_1 = 16,83 \times 10^{-6} 1/\text{K}$, поскольку в формулах (21), (22), (31) зависимости $u_r(R_0)$ и $u_r(R_2)$ от параметров E_0 и E_1 проявляется только как зависимость от их отношения $E_0 : E_1$, то при проводимых по этим формулам расчетах вместо их справочных значений могут быть взяты любые другие пропорциональные им значения модуля Юнга. В этих данных α_1 – это среднее значение коэффициента линейного расширения материала в диапазоне температур $0-100^\circ\text{C}$. При нахождении справочных значений E , ν , α использовалась работа [4]. Согласно формуле (25) находим $R_{10} = 23,65$ мм (с точностью до сотых долей мм). Рассмотрим три случая.

1) $R_1 = R_{10}$. Тогда, при учете температурной зависимости E , ν , α материала тела B получаем с точностью до сотых долей мкм $u_r(R_0) = 0$. Следовательно, радиус внутренней граничной круговой цилиндрической поверхности полого цилиндра B в результате его нагрева не изменяется, то есть $R'_0 = R_0$. При отсутствии зависимости E , ν , α материала полого цилиндра B от температуры или пренебрежении этой зависимостью при расчетах получаем $u_r(R_0) = 0,15$ мкм, то есть радиус внутренней граничной круговой цилиндрической поверхности тела B в результате нагрева этого тела увели-

чится и станет равным 10 мм 0,15 мкм.

2) $R_1 = 22 \text{ мм} < R_{10}$. Тогда, при учете температурной зависимости E , ν , α материала тела B получаем с точностью до сотых долей мкм $u_r(R_0) = -0,01$ мкм. Следовательно, радиус внутренней граничной круговой цилиндрической поверхности полого цилиндра B в результате его нагрева уменьшается на 0,01 мкм. При отсутствии зависимости E , ν , α материала тела B от температуры получаем $u_r(R_0) = 0,08$ мкм, то есть радиус внутренней граничной круговой цилиндрической поверхности тела B увеличится и станет равным 10 мм 0,08 мкм.

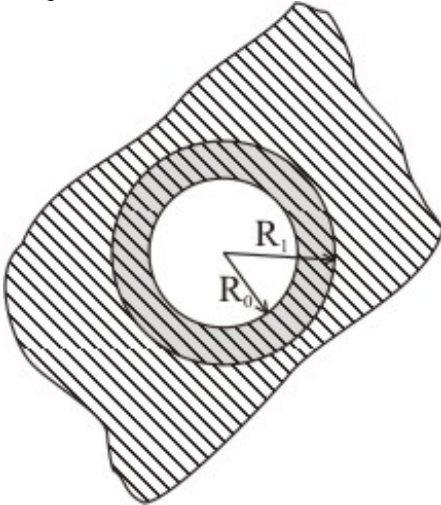


Рис. 4 – Нормальное сечение упругого пространства, имеющего цилиндрическую полость, с отмеченным кольцом серого цвета сечением зоны его нагрева, примыкающей к граничной поверхности полости.

поверхности (нормальное сечение тела Π с отмеченным кольцом серого цвета нормальным сечением зоны его нагрева показано на рис. 4).

Формула для вычисления $u_r(R_0)$ в этом случае получается из равенств (30), (31) в результате предельного перехода в них при $R_{01} \rightarrow R_0 + 0$. Тогда

$$u_r(R_0) = \alpha_1 t_n (1 + \nu_1) R_0 \left[1 - \left(\frac{R_0}{R_1} \right)^2 \right] \left[1 - \frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0} \right] \times \\ \times \left\{ 1 - \left(\frac{R_0}{R_1} \right)^2 + \frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0} \left[1 - 2\nu_1 + \left(\frac{R_0}{R_1} \right)^2 \right] \right\}^{-1}. \quad (33)$$

Из формулы (33) следует, что, если выражение (32) положительно, то в результате рассматриваемого нагрева тела Π радиус его полости увеличивается; если выражение (32) отрицательно, **то указанный радиус уменьшает-**

3) $R_1 = 25 \text{ мм} > R_{10}$. Тогда, учитывая температурную зависимость E , ν , α материала тела B , получаем с точностью до сотых долей мкм $u_r(R_0) = 0,02$ мкм. Следовательно, радиус внутренней граничной круговой цилиндрической поверхности полого цилиндра B в результате его нагрева увеличится на 0,02 мкм. При отсутствии зависимости E , ν , α материала тела B от температуры получаем $u_r(R_0) = 0,22$ мкм, то есть радиус внутренней граничной круговой цилиндрической поверхности тела B увеличится и станет равным 10 мм 022 мкм.

Рассмотрим случай нагрева тела Π – упругого пространства с цилиндрической полостью, когда зона нагрева \bar{B}_1 тела B примыкает к его граничной круговой цилиндрической

ся, а если выражение (32) равно нулю, то радиус полости тела Π не изменяется.

Выводы. При использовании математической модели несвязной квазистатической термоупругости для исследования термоупругих деформаций граничных цилиндрических круговых поверхностей тела вращения – полого бесконечного упругого цилиндра, вызванных воздействием на него цилиндрического температурного поля, соответствующего нагреву полого цилиндра только в некоторой его зоне, являющейся правильной его частью с той же осью вращения и представляющей собой также полый бесконечный цилиндр, причем во всех точках зоны нагрева полого цилиндра температура одинакова, получены следующие результаты.

При учете температурной зависимости термоупругих постоянных материала полого цилиндра найдена такая величина R_{10} , что в случае выполнения необходимого и достаточного условия ее существования и положительности, если она меньше наибольшего расстояния от оси вращения полого цилиндра точек его зоны нагрева, то внутренний его радиус в результате нагрева увеличится, если величина R_{10} больше этого расстояния, то внутренний радиус полого цилиндра уменьшится и если величина R_{10} равна этому расстоянию, то внутренний радиус полого цилиндра не изменится. В случае невыполнения необходимого и достаточного условия существования и положительности величины R_{10} внутренний радиус полого цилиндра при его нагреве увеличивается; такие изменения внутреннего радиуса полого цилиндра происходят при его нагреве, если среднее значение коэффициента линейного расширения материала полого цилиндра положительно, при этом внешний радиус полого цилиндра в результате его нагрева увеличивается. При отсутствии температурной зависимости термоупругих постоянных материала полого цилиндра его внешний и внутренний радиусы увеличиваются при нагреве, если коэффициент линейного расширения его материала положителен.

Таким образом, учет температурной зависимости термоупругих коэффициентов материала полого бесконечного цилиндра является весьма существенным при определении деформаций его граничных поверхностей, поскольку позволяет обнаружить при выполнении определенных условий *эффект уменьшения внутреннего радиуса полого цилиндра при его нагреве* в случае положительности среднего значения коэффициента линейного расширения его материала. Учет температурной зависимости термоупругих коэффициентов материала нагреваемого упругого тела позволяет также обнаружить при выполнении найденного условия *эффект уменьшения радиуса граничной круговой цилиндрической поверхности* упругого пространства с цилиндрической полостью при воздействии на него цилиндрического температурного поля, ось симметрии которого совпадает с осью симметрии полости, вызывающего нагрев этого упругого тела только в некоторой его зоне, представляющей полый бесконечный цилиндр, соосный с полостью в упругом пространстве, причём во всех точках зоны нагрева температура одинакова, а среднее значение коэффициента линейного расширения материала упругого пространства с полостью (в пределах изменения его температуры в зоне нагрева) положительно. В случае отсутствия температурной зависимости тер-

моупругих постоянных материала упругого пространства с цилиндрической круговой полостью радиус граничной круговой цилиндрической поверхности при вышеуказанном нагреве не изменяется.

Список литературы: 1. Щеглов В.И. Об одном эффекте деформирования упругого полого шара при воздействии на него сферического температурного поля специального вида // Вестник НТУ «ХПИ», Серия: Математическое моделирование в технике и технологиях. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2014. – №6 (1049). – С. 223 – 233. 2. Коваленко А.Д. Термоупругость. – К.: Вища школа, – 1975. – 216 с. 3. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, – 1966. – 707 с. 4. Машиностроение: Энциклопедия. Т.1. – 2. Теоретическая механика. Термодинамика. Теплообмен. / Под ред. К.С. Колесникова. – М.: Машиностроение. – 1999. – 600 с.

Bibliography (transliterated): 1. Shheglov, V. I. "Ob odnom jeffekte deformirovanija uprugogo pologo shara pri vozdejstvii na nego sfericheskogo temperaturnogo polja special'nogo vida." *Visnyk NTU «KhPI»*. Ser.: *Matematychni modeljuvannja v tehnicji ta tehnologijah*. No. 6 (1049). 2014. P. 223–233. Print. 2. Kovalenko, A. D. *Termouprugost'*. Kyiv: Vyshha shkola, 1975. Print. 3. Mushelishvili, N. I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti*. Moscow: Nauka, 1966. Print. 4. *Mashynostroenie: Enciklopedija. Vol. 1–2. Teoreticheskaja mehanika. Termodinamika. Teploobmen*. Ed. K. S. Kolesnikova. Moscow: Mashynostroenie, 1999. Print.

Поступила (received) 14.04.2015