

Мищенко Виктор Олегович – доктор технических наук, доцент, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, г. Харьков; тел.: (057) 705-42-81; e-mail: mischenko@univer.kharkov.ua.

Mishchenko Viktor Olegovich – Doctor of Technical Sciences, Associate professor, V. N. Karazin Kharkov National University, Kharkov; tel.: (057) 705-42-81; e-mail: mischenko@univer.kharkov.ua.

Паточкін Борис Вікторович – аспірант, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (057) 705-42-81; тел.: (050) 999-79-65; e-mail: equilibrium2702@gmail.com.

Паточкин Борис Викторович – аспирант, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, г. Харьков; тел.: (057) 705-42-81; тел.: (050) 999-79-65; e-mail: equilibrium2702@gmail.com.

Patochkin Boris Viktorovich – postgraduate, V. N. Karazin Kharkov National University, Kharkov; tel.: (057) 705-42-81; tel.: (050) 999-79-65; e-mail: equilibrium2702@gmail.com.

УДК 517.955.8

Е. А. НАБОКА

СИНХРОНИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ПЛАСТИН БЕРГЕРА С НЕЛИНЕЙНЫМ ВНУТРЕННИМ И ГРАНИЧНЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ. ЧАСТЬ 2

Рассматривается модель Бергера нелинейных колебаний двух одинаковых упруго связанных пластин с частично зашпеленной и частично свободной границей. Предполагается, что нелинейные диссипационные силы действуют во внутренней части пластин и на свободной части их границ. Изучена зависимость структуры глобального аттрактора системы от параметра γ , пропорционального интенсивности взаимодействия пластин. В этой части работы описана структура верхнего предела аттрактора при $\gamma \rightarrow \infty$. Установлено, что он совпадает с множеством $\text{diag}(\tilde{\mathcal{A}} \times \tilde{\mathcal{A}})$ – диагональю прямого произведения двух экземпляров аттрактора системы, описывающей колебания одной пластины. Также при дополнительных условиях на функции демпфирования доказано, что и сам аттрактор системы двух связанных пластин совпадает с множеством $\text{diag}(\tilde{\mathcal{A}} \times \tilde{\mathcal{A}})$ для достаточно больших значений параметра γ .

Ключевые слова: модель Бергера, упруго связанные пластины, асимптотическая синхронизация, нелинейная диссипация, свободная граница.

Обзор результатов части 1. Явления синхронизации различных составных механических, химических, биологических, социальных систем вызывают большой интерес в литературе (смотрите [1 – 13]).

В данной серии работ изучается синхронизация механической системы, состоящей из двух упруго связанных пластин с частично зашпеленной и частично свободной границей и нелинейными диссипационными силами, действующими как во внутренних частях пластин, так и на свободных участках их границ. Соответствующая математическая модель, известная в литературе как *модель Бергера* нелинейных колебаний пластины [14], имеет следующий вид:

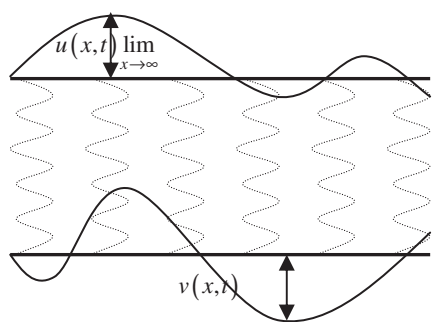


Рис. 1 – Система связанных пластин:
 $u(x,t), v(x,t)$ – вертикальные отклонения пластин относительно состояния покоя.

$$u = u(x,t), v = v(x,t), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, t \geq 0;$$

$$\begin{cases} u_{tt} + B(u_t) + \Delta^2 u + \left(Q - \beta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega \right) \Delta u + \gamma(u-v) = p, \\ v_{tt} + B(v_t) + \Delta^2 v + \left(Q - \beta \int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\Omega \right) \Delta v + \gamma(v-u) = p, \end{cases} \quad x \in \Omega, t > 0; \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u^0, \quad v|_{t=0} = v^0, \quad u_t|_{t=0} = u^1, \quad v_t|_{t=0} = v^1; \quad (2)$$

$$u = \partial_n u = v = \partial_n v = 0, \quad x \in \Gamma_0; \quad (3)$$

$$\Delta u + (1-\mu)\Sigma_1 u = 0, \quad \Delta v + (1-\mu)\Sigma_1 v = 0, \quad x \in \Gamma_1; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \partial_n \Delta u + (1-\mu)\Sigma_2 u &= d(x)g(u_t) + \sigma u - \left(Q - \beta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega \right) \partial_n u, \\ \partial_n \Delta v + (1-\mu)\Sigma_2 v &= d(x)g(v_t) + \sigma v - \left(Q - \beta \int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\Omega \right) \partial_n v, \end{aligned} \quad x \in \Gamma_1; \quad (5)$$

где Ω – плоская область, занимаемая пластинами в состоянии покоя; граница области $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$; $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$, Γ_0 – зашпеленная часть границы, Γ_1 – ее свободная часть; функции $u(x,t), v(x,t)$ описывают

вертикальные отклонения пластины относительно состояния покоя; операторы $B(z) = \tilde{d}(x)b(z)$ и $d(x)g(z)$ отвечают за механизм диссипации во внутренней части пластины и на ее границе; функция $p = p(x) \in L_2(\Omega)$ описывает поперечные нагрузки, приложенные к пластине; слагаемое $\gamma(u - v)$ учитывает связь пластин системы, причем коэффициент $\gamma \geq 0$ пропорционален интенсивности связи; граничные операторы Σ_i определены равенствами:

$$\Sigma_1 z = 2n_1 n_2 z_{x_1 x_2} - n_1^2 z_{x_2 x_2} - n_2^2 z_{x_1 x_1}, \quad \Sigma_2 z = \partial_\tau ((n_1^2 - n_2^2) z_{x_1 x_2} + n_1 n_2 (z_{x_2 x_2} - z_{x_1 x_1})),$$

где $n = (n_1, n_2)$ – единичный вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega$, а τ – единичный касательный вектор; константы β, μ, σ положительные, а константа Q принимает произвольное вещественное значение.

Предполагаем, что операторы внутреннего и внешнего демпфирования удовлетворяют следующим условиям:

Условия 1. (внутреннее демпфирование)

$$B(z) = \tilde{d}(x)b(z): \tilde{d}(x) \in L_\infty(\Omega); \tilde{d}(x) > 0, x \in \Omega; b(z) \in C^1(\mathbb{R}); b(0) = 0; b'(z) > 0, \forall z \in \mathbb{R};$$

$$\exists m_1, M_1 > 0: m_1 \leq b'(z) \leq M_1(1 + zb(z)), |z| \geq 1;$$

Условия 2. (граничное демпфирование)

$$d(x) \in L_\infty(\Gamma_1), d(x) > 0, x \in \Gamma_1; g(z) \in C^1(\mathbb{R}); g(0) = 0; g'(z) \geq m_2 > 0, \forall z \in \mathbb{R};$$

$$\exists M_2 > 0: g'(z) \leq M_2(1 + zg(z)), |z| \geq 1.$$

Задача (1) – (5) порождает семейство динамических систем (H, S_t^γ) с фазовым пространством

$$H = [H_{\Gamma_0}^2(\Omega)]^2 \times [L_2(\Omega)]^2$$

и эволюционным оператором $S_t^\gamma: H \rightarrow H$, действующим по правилу

$$S_t^\gamma(u^0, v^0, u^1, v^1) = (u(x, t), v(x, t), u_t(x, t), v_t(x, t)),$$

где пара функций $u(x, t), v(x, t) \in C([0, T]; H_{\Gamma_0}^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L_2(\Omega))$ – единственное слабое решение задачи (1) – (5) для начальных данных (u^0, v^0, u^1, v^1) .

Для любого $\gamma \geq 0$ динамическая система (H, S_t^γ) обладает компактным глобальным аттрактором \mathfrak{A}^γ . Аттрактор совпадает с неустойчивым многообразием $M_+(N^\gamma)$, исходящим из множества стационарных точек системы N^γ . Кроме того, семейство аттракторов $\{\mathfrak{A}^\gamma\}$ ограничено в пространстве H равномерно по параметру γ . Для траекторий системы из аттрактора справедливо следующее неравенство

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t) - v(t)\| \leq C / \gamma, \tag{6}$$

для некоторого $C \in (0; \infty)$ и $(u(t), v(t), u_t(t), v_t(t)) \subset \mathfrak{A}^\gamma, \gamma > 0$.

Нас интересует предельное поведение аттрактора \mathfrak{A}^γ при $\gamma \rightarrow \infty$. Данное поведение описывается при помощи специальной структуры – верхнего предела аттрактора [15]. Напомним, что верхним пределом аттрактора \mathfrak{A}^γ при $\gamma \rightarrow \infty$ называется множество

$$\mathfrak{A}(\infty) = \bigcap_{N \geq N_0} \left[\bigcup_{\gamma \geq N} \mathfrak{A}^\gamma \right]_H, \quad N_0 \geq 0,$$

где $[\cdot]_H$ означает замыкание множества по норме пространства H . В первой части нашей работы [16] доказано, что верхний предел аттрактора \mathfrak{A}^γ при $\gamma \rightarrow \infty$ лежит на диагонали фазового пространства системы H :

$$\mathfrak{A}(\infty) \subset \text{diag}H = \{(z^0, z^0, z^1, z^1): (z^0, z^1) \in H_{\Gamma_0}^2(\Omega) \times L_2(\Omega)\}. \tag{8}$$

Соотношение (8) означает асимптотическую синхронизацию динамики системы (1) – (5) при $t \rightarrow \infty, \gamma \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\|u(t, \gamma) - v(t, \gamma)\|_{H_{\Gamma_0}^2(\Omega)} + \|u_t(t, \gamma) - v_t(t, \gamma)\|_{L_2(\Omega)} \right) = 0.$$

Цель работы. В настоящей статье мы подробно опишем структуру множества $\mathfrak{A}(\infty)$, а также, при дополнительном предположении на функцию внутреннего демпфирования $b(z)$:

$$b'(z) \geq m_1 > 0, z \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

установим синхронизацию системы для конечных, но достаточно больших, значений параметра связи $\gamma \geq \gamma_0 > 0$ при $t \rightarrow \infty$. Кроме того, мы покажем, что синхронизация динамики системы происходит с экспоненциальной

скоростью:

$$\|u(t) - v(t)\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|u_t(t) - v_t(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq Ce^{-\delta(t-t_0)}, \quad (10)$$

при $t \geq t_0 > 0$, $\gamma \geq \gamma_0 > 0$ для некоторых $C, \delta > 0$.

Вспомогательная задача. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу, описывающую нелинейные колебания одной пластины с частично заземленной и частично свободной границей:

$$z_{tt} + B(z_t) + \Delta^2 z + \left(Q - \beta \int_{\Omega} |\nabla z|^2 d\Omega \right) \Delta z = p, \quad x \in \Omega, t > 0; \quad (11)$$

$$z|_{t=0} = z^0, \quad z_t|_{t=0} = z^1; \quad (12)$$

$$z = \partial_\nu z = 0, \quad x \in \Gamma_0; \quad (13)$$

$$\Delta z + (1 - \mu) \Sigma_1 z = 0, \quad x \in \Gamma_1; \quad (14)$$

$$\partial_n \Delta z + (1 - \mu) \Sigma_2 z = d(x)g(z_t) + \sigma z - \left(Q - \beta \int_{\Omega} |\nabla z|^2 d\Omega \right) \partial_n z, \quad x \in \Gamma_1. \quad (15)$$

Считаем, что операторы и константы в задаче (11) – (15) те же, что и в задаче (1) – (5), в частности, выполнены условия 1 на операторы внутреннего и внешнего демпфирования.

Задача (11) – (15) корректно разрешима в пространстве $\tilde{H} = H_{\Gamma_0}^2(\Omega) \times L_2(\Omega)$, то есть имеет единственное слабое (в смысле определения 2 из [16]) решение $z(x, t) \in C([0, T]; H_{\Gamma_0}^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L_2(\Omega))$ для любых начальных данных $(z^0, z^1) \in \tilde{H}$. Аналогично задаче (1) – (5) задача (11) – (15) порождает в пространстве \tilde{H} динамическую систему, обладающую компактным глобальным аттрактором $\tilde{\mathfrak{A}}$.

Определим оператор $S_t : \text{diag}H \rightarrow \text{diag}H$ следующим образом:

$$S_t(z^0, z^0, z^1, z^1) = (z(x, t), z(x, t), z_t(x, t), z_t(x, t)), \quad \forall (z^0, z^0, z^1, z^1) \in \text{diag}H,$$

где $z(x, t)$ – слабое решение задачи (11) – (15) для начальных данных (z^0, z^1) . Отметим, что определенный таким образом оператор S_t совпадает с ограничением на пространство $\text{diag}H$ оператора S_t^γ для любого неотрицательного значения параметра γ :

$$S_t(z^0, z^0, z^1, z^1) = S_t^\gamma(z^0, z^0, z^1, z^1), \quad \forall (z^0, z^0, z^1, z^1) \in \text{diag}H, t \geq 0, \gamma \geq 0.$$

Рассмотрим динамическую систему $(\text{diag}H, S_t)$. Очевидно, эта динамическая система обладает компактным глобальным аттрактором

$$\mathfrak{A} = \text{diag}(\tilde{\mathfrak{A}} \times \tilde{\mathfrak{A}}) = \left\{ (z^0, z^0, z^1, z^1) : (z^0, z^1) \in \tilde{\mathfrak{A}} \right\}. \quad (16)$$

Аттрактор \mathfrak{A} является подмножеством аттрактора \mathfrak{A}^γ для любого неотрицательного γ , а именно имеет место равенство

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^\gamma \cap \text{diag}H, \quad \forall \gamma \geq 0. \quad (17)$$

Действительно, ввиду инвариантности множества $\mathfrak{A}^\gamma \cap \text{diag}H$ относительно оператора S_t^γ а, следовательно, на множестве $\text{diag}H$ операторы совпадают), и оператора S_t , используя свойство притяжения аттрактором траекторий из ограниченных множеств, имеем

$$0 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \{ \text{dist}_H(S_t a, \mathfrak{A}), a \in \mathfrak{A}^\gamma \cap \text{diag}H \} = \sup \{ \text{dist}_H(a, \mathfrak{A}), a \in \mathfrak{A}^\gamma \cap \text{diag}H \}.$$

Последнее равенства в силу компактности множеств \mathfrak{A} и $\mathfrak{A}^\gamma \cap \text{diag}H$ означает включение $\mathfrak{A}^\gamma \cap \text{diag}H \subset \mathfrak{A}$. Из соотношения (17) следует, что множество \mathfrak{A} инвариантно относительно оператора S_t^γ . Используя эту инвариантность и повторяя рассуждения, приведенные выше, получим включение $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}^\gamma$.

Основной результат.

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1 на операторы внутреннего и внешнего демпфирования задачи (1) – (5). Тогда

1. Верхний предел аттрактора $\mathfrak{A}(\infty)$ динамической системы (H, S_t^γ) , порождаемой задачей (1) – (5), совпадает с аттрактором \mathfrak{A} динамической системы $(\text{diag}H, S_t)$, определенным соотношением (16);

2. Если наряду с условиями 1 выполнено неравенство (9), то аттрактор \mathfrak{A}^γ динамической системы (H, S_t^γ) совпадает с аттрактором \mathfrak{A} для достаточно больших значений параметра γ .

Доказательство теоремы 1. Для того, чтобы доказать первое утверждение теоремы, нам потребуется установить некоторые свойства верхнего предела аттрактора $\mathfrak{A}(\infty)$.

Лемма 1. Пусть выполнены условия 1. Тогда множество $\mathfrak{A}(\infty)$ компактно в пространстве H и инвариантно относительно оператора S_t^γ для любого неотрицательного значения параметра γ , то есть

$$S_t^\gamma \mathfrak{A}(\infty) = \mathfrak{A}(\infty), \quad \forall t \geq 0, \gamma \geq 0. \tag{18}$$

При доказательстве леммы 1 используются следующие утверждения.

Утверждение 1. Пусть выполнены условия 1.

Рассмотрим траектории $(u_i(t), v_i(t), u_{it}(t), v_{it}(t))$, $t \in [0, T]$ динамической системы (H, S_t^γ) для некоторого неотрицательного значения параметра γ . Пусть $R > 0$ такое, что

$$\|u_i(t)\|_{H_{\Gamma_0}^2(\Omega)}^2 + \|v_i(t)\|_{H_{\Gamma_0}^2(\Omega)}^2 + \|u_{it}(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|v_{it}(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq R, \quad t \in [0, T], \forall i.$$

Тогда для разности $w_i(t) = u_i(t) - v_i(t)$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\|w_{it}(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + a(w_i(t), w_i(t)) + \sigma \|w_i(t)\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 \right) + \gamma \|w_i(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \\ & \leq \varepsilon + \frac{C(R, \varepsilon)}{t-s} + C(R, t-s, \varepsilon) \sup_{\tau \in [s, t]} \|w_i(\tau)\|_{H^{1+\delta}(\Omega)}, \quad s < t, s, t \in [0, T], \forall i, \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$a(y, z) = \int_{\Omega} \left(\mu \Delta y \Delta z + (1-\mu) (y_{x_1 x_1} z_{x_1 x_1} + y_{x_2 x_2} z_{x_2 x_2}) + 2(1-\mu) y_{x_1 x_2} z_{x_1 x_2} \right) d\Omega,$$

константы $\varepsilon > 0$, $0 < \delta < 1$, $C(R, \varepsilon)$, $C(R, T, \varepsilon) > 0$ не зависят от γ .

Утверждение 2. Обозначим $w_{ij}(t)$ разность $w_{ij}(t) = (u_i(t) - u_j(t)) + (v_i(t) - v_j(t))$. Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\|w_{ijt}(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + a(w_{ij}(t), w_{ij}(t)) + \sigma \|w_{ij}(t)\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 \right) \leq \tilde{\varepsilon} + \frac{C(R, \tilde{\varepsilon})}{t-s} + \\ & + C(R, t-s, \tilde{\varepsilon}) \left(\text{lot}(u_i - u_j) + \text{lot}(v_i - v_j) + \text{sot}(u_i - v_i) + \text{sot}(u_j - v_j) \right), \quad s < t, s, t \in [0, T], \forall i, j, \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\text{lot}(z) = \sup_{\tau \in [s, t]} \|z(\tau)\|_{H^{1+\delta}(\Omega)}, \quad 0 < \delta < 1, \quad \text{sot}(z) = \sup_{\tau \in [s, t]} \left(\|z(\tau)\|_{H^2(\Omega)} + \|z_t(\tau)\|_{L_2(\Omega)} \right),$$

константы $\tilde{\varepsilon} > 0$, $C(R, \tilde{\varepsilon})$, $C(R, t-s, \tilde{\varepsilon}) > 0$ не зависят от γ .

Условия вида (19), (20) в литературе носят название *стабилизационных неравенств* и пришли в теорию динамических систем из теории управления (смотрите, напр., [17]). С разнообразными применениями стабилизационных неравенств для исследования бесконечномерных динамических систем можно познакомиться в работах [12, 13, 18 – 24].

Доказательство леммы 1.

Покажем, что множества $\Omega_N = \left[\bigcup_{\gamma \geq N} \mathfrak{A}^\gamma \right]_H$ компактны для любого $N \geq N_0$. Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что существует такая бесконечная последовательность точек $\{a_i\}_{i=1}^\infty$, $a_i = (a_i^1, a_i^2, a_i^3, a_i^4)$, что

$$\text{dist}_H(a_i, a_j) \geq 10\delta', \quad \delta' > 0, \quad i \neq j.$$

Не теряя общности, мы можем считать, что все точки последовательности принадлежат аттракторам \mathfrak{A}^{γ_i} для различных значений параметра γ , то есть

$$a_i \in \mathfrak{A}^{\gamma_i} : \gamma_i \neq \gamma_j, \text{ если } i \neq j, \quad \gamma_i \rightarrow \infty, \text{ если } i \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим последовательность полных траектории $(u^{\gamma_i}(t), v^{\gamma_i}(t), u_t^{\gamma_i}(t), v_t^{\gamma_i}(t))$, $t \in \mathbb{R}$ из аттракторов \mathfrak{A}^{γ_i} таких, что для некоторого $\tilde{T} > 0$, выбор которого мы обоснуем ниже, имеем

$$(u^{\gamma_i}(\tilde{T}), v^{\gamma_i}(\tilde{T}), u_i^{\gamma_i}(\tilde{T}), v_i^{\gamma_i}(\tilde{T})) = a_i.$$

Применим к рассматриваемой последовательности траекторий неравенства (19), (20).

Положим в неравенстве (20) $s = 0$, $t = \tilde{T}$, $\tilde{\varepsilon} = (\delta')^2 / 10$, выбирая \tilde{T} настолько большим, чтобы

$$C(R, \tilde{\varepsilon}) / \tilde{T} \leq (\delta')^2 / 10.$$

Функции $u^{\gamma_i}(t)$, $v^{\gamma_i}(t)$ ограничены в пространстве $H_{\Gamma_0}^2(\Omega)$, а их производные $u_i^{\gamma_i}(t)$, $v_i^{\gamma_i}(t)$ – в пространстве $L_2(\Omega)$, равномерно по $t \in \mathbb{R}$, $\gamma \geq 0$. Следовательно, последовательности $\{u^{\gamma_i}(t)\}$, $\{v^{\gamma_i}(t)\}$ сходятся по норме пространства $C(-\tau, \tau; H^{1+\delta}(\Omega))$ при любых $0 < \delta < 1$. Поэтому можно выбрать такой номер $N_1 > 0$, что

$$C(R, \tilde{T}, \tilde{\varepsilon}) \left(\text{lot}(u^{\gamma_i} - u^{\gamma_j}) + \text{lot}(v^{\gamma_i} - v^{\gamma_j}) \right) \leq (\delta')^2 / 10 \text{ при } i, j \geq N_1.$$

Используем (19), чтобы оценить слагаемые

$$\text{sot}(u^{\gamma_i} - v^{\gamma_i}) = \sup_{\tau \in [0, \tilde{T}]} \left(\|u^{\gamma_i}(\tau) - v^{\gamma_i}(\tau)\|_{H^2(\Omega)} + \|u_i^{\gamma_i}(\tau) - v_i^{\gamma_i}(\tau)\|_{L_2(\Omega)} \right).$$

Пусть в (19) $\varepsilon = (\delta')^2 / (60 \cdot C(R, \tilde{T}, \tilde{\varepsilon}))$, $s = 0$, $t = \tilde{T} + T_0$, где T_0 настолько большое, что

$$2 \cdot C(R, \varepsilon) \cdot C(R, \tilde{T}, \tilde{\varepsilon}) / (\tilde{T} + T_0) = (\delta')^2 / 30.$$

Выберем номер N_2 таким, чтобы

$$2 \cdot C(R, \tilde{T} + T_0, \varepsilon) \cdot C(R, \tilde{T}, \tilde{\varepsilon}) \cdot \sup_{t \in [0, \tilde{T} + T_0]} \|u^{\gamma_i} - v^{\gamma_i}\|_{H^{1+\delta}(\Omega)} \leq (\delta')^2 / 30 \text{ при } i \geq N_2.$$

Отметим, что такой выбор возможен ввиду (6). Переходя в обеих частях (19) к супремуму по $t \in [0, \tilde{T} + T_0]$, при данном выборе параметров имеем

$$\text{sot}(u^{\gamma_i} - v^{\gamma_i}) \leq \varepsilon + \frac{C(R, \varepsilon)}{\tilde{T} + T_0} + C(R, \tilde{T} + T_0, \varepsilon) \sup_{t \in [0, \tilde{T} + T_0]} \|u^{\gamma_i} - v^{\gamma_i}\|_{H^{1+\delta}(\Omega)} \leq \frac{\delta'}{10 \cdot C(R, \tilde{T}, \tilde{\varepsilon})}. \quad (21)$$

Используя полученные неравенства в (20), приходим к оценке

$$\|w_{ij}(\tilde{T})\|_{L_2(\Omega)}^2 + a(w_{ij}(\tilde{T}), w_{ij}(\tilde{T})) + \sigma \|w_{ij}(\tilde{T})\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 \leq (\delta')^2 / 4,$$

где $w_{ij} = (u^{\gamma_i} - u^{\gamma_j}) + (v^{\gamma_i} - v^{\gamma_j})$, $i, j \geq N_0 = \max\{N_1, N_2\}$, откуда

$$\|(a_i^1 - a_j^1) + (a_i^2 - a_j^2)\|_{H^2(\Omega)} + \|(a_i^3 - a_j^3) + (a_i^4 - a_j^4)\|_{L_2(\Omega)} \leq \delta' / 2.$$

Из соотношения (21) также следует, что

$$\|u^{\gamma_i}(t) - v^{\gamma_i}(t)\|_{H^2(\Omega)} + \|u_i^{\gamma_i}(t) - v_i^{\gamma_i}(t)\|_{L_2(\Omega)} \leq \delta' / 5, \quad t \in [0, \tilde{T} + T_0], i \geq N_0.$$

Оценить расстояния между точками a_i, a_j для достаточно больших номеров i, j ($i, j \geq N_0$):

$$\begin{aligned} \text{dist}_H(a_i, a_j) &= \|a_i^1 - a_j^1\|_{H^2(\Omega)} + \|a_i^2 - a_j^2\|_{H^2(\Omega)} + \|a_i^3 - a_j^3\|_{L_2(\Omega)} + \|a_i^4 - a_j^4\|_{L_2(\Omega)} \leq \|(a_i^1 - a_j^1) + (a_i^2 - a_j^2)\|_{H^2(\Omega)} + \\ &+ \|a_i^1 - a_j^1\|_{H^2(\Omega)} + \|a_j^1 - a_j^2\|_{H^2(\Omega)} + \|(a_i^3 - a_j^3) + (a_i^4 - a_j^4)\|_{L_2(\Omega)} + \|a_i^3 + a_j^4\|_{L_2(\Omega)} + \|a_j^3 + a_j^4\|_{L_2(\Omega)} \leq \delta', \end{aligned}$$

что противоречит исходному предположению. Следовательно, множества Ω_N компактны для любого $N \geq N_0$, и верхний предел аттрактора $\mathfrak{A}(\infty)$ компактен в H как пересечение замкнутых компактных в H множеств.

Покажем теперь, что множество $\mathfrak{A}(\infty)$ инвариантно относительно оператора S_t^γ для любого неотрицательного значения параметра γ . Поскольку $\mathfrak{A}(\infty)$ лежит на диагонали пространства H , где операторы S_t^γ , $\gamma \geq 0$ совпадают с оператором S_t , нам достаточно установить, что множество $\mathfrak{A}(\infty)$ инвариантно относительно S_t .

Покажем сначала, что имеет место включение

$$S_t \mathfrak{A}(\infty) \subset \mathfrak{A}(\infty), \quad \forall t \geq 0. \quad (22)$$

Предположим, (22) не выполняется и существуют такие точка $a \in \mathfrak{A}(\infty)$ и $t_0 > 0$, что $S_{t_0} a \notin \mathfrak{A}(\infty)$. Точка a не может принадлежать аттрактору \mathfrak{A}^γ ни при каком значении параметра $\gamma \geq 0$, следовательно, она является предельной точкой некоторой последовательности $\{a^\gamma\}_{\gamma \rightarrow \infty}$, $a^\gamma \in \mathfrak{A}^\gamma$. Так как аттракторы \mathfrak{A}^γ инвариантны от-

носителю соответствующего эволюционного оператора S_t^γ , имеем $S_{t_0}^\gamma a^\gamma \in \mathfrak{A}^\gamma$. По доказанному выше множество Ω_N компактно в H при некотором $N \geq N_0$, следовательно, последовательность $\{S_{t_0}^\gamma a^\gamma\} \subset \left[\bigcup_{\gamma \geq N} \mathfrak{A}^\gamma \right]_H$ содержит сходящуюся подпоследовательность

$$\{S_{t_0}^{\gamma'} a^{\gamma'}\}_{\gamma' \geq N}, S_{t_0}^{\gamma'} a^{\gamma'} \rightarrow \tilde{a} \in \mathfrak{A}(\infty) \text{ при } \gamma' \rightarrow \infty.$$

Покажем, что $\tilde{a} = S_{t_0} a$. Рассуждение проведем методом от противного. Предположим, что $\tilde{a} \neq S_{t_0} a$, то есть

$$\text{dist}_H(\tilde{a}, S_{t_0} a) = \theta > 0. \tag{23}$$

Рассмотрим последовательность полных траекторий $(u^{\gamma'}(t), v^{\gamma'}(t), u_t^{\gamma'}(t), v_t^{\gamma'}(t)) \subset \mathfrak{A}^{\gamma'}$, $t \in \mathbb{R}$, таких, что $(u^{\gamma'}(T), v^{\gamma'}(T), u_t^{\gamma'}(T), v_t^{\gamma'}(T)) = a^{\gamma'}$ для некоторого $T > 0$, значение которого будет выбрано ниже, а также траекторию $(z(t), z(t), z_t(t), z_t(t)) \subset \text{diag}H$, $t \geq 0$, такую что $(z(T), z(T), z_t(T), z_t(T)) = a$. Данные траектории ограничены в пространстве H равномерно по t и $\gamma' \geq 0$:

$$\|u^{\gamma'}(t)\|_{H_{\Gamma_0}^2(\Omega)}^2 + \|v^{\gamma'}(t)\|_{H_{\Gamma_0}^2(\Omega)}^2 + \|u_t^{\gamma'}(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|v_t^{\gamma'}(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq R, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \gamma' \geq 0.$$

Рассуждая как при доказательстве первого утверждения *теоремы 3* в [16], мы можем получить следующую оценку

$$E_w(t) \leq E_w(s) e^{C_1(R)(t-s)}, \quad 0 \leq s < t \tag{24}$$

для функционала

$$E_w(t) = \frac{1}{2} \left(\|w_{1t}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|w_{2t}\|_{L_2(\Omega)}^2 + a(w_1, w_1) + a(w_2, w_2) + \sigma \|w_1\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 + \sigma \|w_2\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 \right) + \frac{\gamma'}{2} \|u^{\gamma'} - v^{\gamma'}\|_{L_2(\Omega)}^2, \\ w_1 = u^{\gamma'} - z, w_2 = v^{\gamma'} - z.$$

Положим теперь в (24) $s = T$, $t = t_0 + T$, выбирая T настолько большим, чтобы слагаемое $C(R, \varepsilon)/T$ при $\varepsilon = 0.1 \cdot \theta \exp(-C_1(R)t_0)$ в (19) не превосходило ε . Далее, ввиду (6), мы можем выбрать γ' такими, что компактный член $\sup_{\tau \in [T, t_0+T]} \|u^{\gamma'}(\tau) - v^{\gamma'}(\tau)\|_{H^{1+\delta}(\Omega)}^2$ в (19) не превосходит ε . Тогда из (19) при указанном выборе значений T и γ' получаем

$$\gamma' \|u^{\gamma'}(T) - v^{\gamma'}(T)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq 0.3 \cdot \theta \exp(-C_1(R)t_0).$$

Далее, поскольку точка a – предельная точка последовательности $\{a^{\gamma'}\}$ при $\gamma' \rightarrow \infty$, мы можем выбрать γ' настолько большими, что сумма первых шести слагаемых $E_w(T)$ будут меньше ε . Тогда из (24) следует $E_w(t_0 + T) < \theta$, что противоречит (23). Полученное противоречие означает справедливость включения (22).

Обратное включение $S_t \mathfrak{A}(\infty) \supset \mathfrak{A}(\infty)$, $\forall t \geq 0$ доказывается аналогично.

Лемма 1 доказана полностью. Докажем теперь первое утверждение *теоремы 1*, а именно, установим равенство $\mathfrak{A}(\infty) = \mathfrak{A}$, где множество \mathfrak{A} определено соотношением (16).

Верхний предел аттрактора $\mathfrak{A}(\infty)$ – ограниченное множество в пространстве $\text{diag}H$ по норме пространства H , следовательно, притягивается к аттрактору \mathfrak{A} при $t \rightarrow \infty$. Кроме того, множество $\mathfrak{A}(\infty)$ инвариантно относительно оператора S_t , и мы можем записать

$$0 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \{ \text{dist}_H(S_t a, \mathfrak{A}), a \in \mathfrak{A}(\infty) \} = \sup \{ \text{dist}_H(a, \mathfrak{A}), a \in \mathfrak{A}(\infty) \}.$$

Поскольку оба множества $\mathfrak{A}(\infty)$ и \mathfrak{A} компактны в H , последнее соотношение означает включение $\mathfrak{A}(\infty) \subset \mathfrak{A}$. Обратное включение также выполнено (смотрите (17)), следовательно, множества $\mathfrak{A}(\infty)$ и \mathfrak{A} совпадают.

Перейдем к доказательству второго утверждения *теоремы 1*. Оно следует из леммы.

Лемма 2. Пусть выполнены условия 1 и неравенство (9). Тогда траектории динамической системы (H, S_t^γ) , исходящие из ограниченного в H множества \mathfrak{B} , сходятся равномерно к диагонали фазового пространства $\text{diag}H$, а именно, существуют такие положительные числа $\gamma_0 > 0$, $\delta > 0$, $t_0 = t_0(\mathfrak{B}) > 0$, что для любой траектории $S_t^\gamma(u^0, v^0, u^1, v^1) = (u(t), v(t), u_t(t), v_t(t))$ с начальными данными (u^0, v^0, u^1, v^1) из \mathfrak{B} выполнено неравенство (10) при $t \geq t_0$, $\gamma \geq \gamma_0$.

Доказательство леммы 2. Рассмотрим функцию $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$, где $u(t), v(t)$ – слабое решение задачи (1) – (5). Очевидно, функция $w(x, t)$ является слабым решением следующей начально-краевой задачи:

$$w_t + (B(u_t) - B(v_t)) + \Delta^2 w + \left(Q - \beta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega \right) \Delta w + \beta \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 - \int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\Omega \right) d\Omega \Delta v + 2\gamma w = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (25)$$

$$w|_{t=0} = w^0 = u^0 - v^0, \quad w_t|_{t=0} = w^1 = u^1 - v^1, \quad w = \partial_\nu w = 0, \quad x \in \Gamma_0, \quad \Delta w + (1 - \mu)\Sigma_1 w = 0, \quad x \in \Gamma_1,$$

$$\partial_\nu \Delta w + (1 - \mu)\Sigma_2 w = d(x)(g(u_t) - g(v_t)) + \sigma w - \left(Q - \beta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega \right) \partial_\nu w - \beta \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2) d\Omega \partial_\nu v, \quad x \in \Gamma_1.$$

Для функционала $V(t)$, определяемого соотношением:

$$V(t) = \frac{1}{2} \left(\|w_t\|_{L_2(\Omega)}^2 + a(w, w) + \sigma \|w\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 + 2\gamma \|w\|_{L_2(\Omega)}^2 \right) + \frac{1}{2} \left(Q - \beta \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right) \|\nabla w\|_{L_2(\Omega)}^2 + \eta \int_{\Omega} w_t w d\Omega, \quad \eta > 0,$$

докажем неравенство

$$\frac{d}{dt} V(t) + \delta V(t) \leq 0, \quad \delta > 0, \quad \text{при } t \geq t_0, \quad \gamma \geq \gamma_0. \quad (26)$$

Отметим сначала, что в силу интерполяционного неравенства:

$$\|\nabla w\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C_1 \varepsilon \left(a(w, w) + \sigma \|w\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 \right) + C(\varepsilon) \|w\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

функционал $V(t)$ удовлетворяет следующим оценкам:

$$\frac{1}{4} \left(\|w_t\|_{L_2(\Omega)}^2 + a(w, w) + \sigma \|w\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 + 2\gamma \|w\|_{L_2(\Omega)}^2 \right) \leq V(t) \leq \|w_t\|_{L_2(\Omega)}^2 + a(w, w) + \sigma \|w\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 + 2\gamma \|w\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Поочередно умножая уравнение (25) на w_t и w и интегрируя полученные равенства по Ω , получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \left(\|w_t\|_{L_2(\Omega)}^2 + a(w, w) + \sigma \|w\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 + 2\gamma \|w\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \left(Q - \beta \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right) \|\nabla w\|_{L_2(\Omega)}^2 \right) \leq \\ & \leq \eta_1 \left(\|w_t\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|w\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 \right) + C(\mathfrak{B}, \eta_1) \|\nabla w\|_{L_2(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} (B(u_t) - B(v_t)) w_t d\Omega - \int_{\Gamma_1} d(x)(g(u_t) - g(v_t)) w_t d\Gamma, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} w_t w d\Omega \leq \|w_t\|_{L_2(\Omega)}^2 - \left(a(w, w) + \sigma \|w\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 + 2\gamma \|w\|_{L_2(\Omega)}^2 \right) + \\ & + C_1 \left(\int_{\Omega} (B(u_t) - B(v_t)) w_t d\Omega + \int_{\Gamma_1} d(x)(g(u_t) - g(v_t)) w_t d\Gamma \right) + C(\mathfrak{B}) \|w\|_{H^{1+\theta}(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

при некотором $\theta: 0 < \theta < 1$. В силу условий леммы 2, можем оценить нормы $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma_1)$ функции w , используя операторы внутреннего и граничного демпфирования:

$$\|w_t\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C \cdot \int_{\Omega} (B(u_t) - B(v_t)) w_t d\Omega, \quad \|w_t\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 \leq \int_{\Gamma_1} d(x)(g(u_t) - g(v_t)) w_t d\Gamma.$$

Применяя интерполяционное неравенство, можем записать оценку для $H^{1+\theta}(\Omega)$ – нормы w :

$$\|w\|_{H^{1+\theta}(\Omega)}^2 \leq \eta_2 \left(a(w, w) + \sigma \|w\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 \right) + C(\eta_2) \cdot \|w\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Полученные неравенства дают нам возможность записать следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} V(t) + \delta V(t) \leq -(\eta - \delta - \eta_2 C(\mathfrak{B}, \eta_1) + \eta \eta_2 C(\mathfrak{B})) \left(a(w, w) + \sigma \|w\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 \right) - \\ & - (1 - \eta C_1 - \eta_1 C_2) \left(\int_{\Omega} (B(u_t) - B(v_t)) w_t d\Omega + \int_{\Gamma_1} d(x)(g(u_t) - g(v_t)) w_t d\Gamma \right) - ((\eta - \delta) 2\gamma - (1 + \eta) C(\mathfrak{B}, \eta_1, \eta_2)) \|w\|_{L_2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

откуда при $\delta, \eta, \eta_1, \eta_2 > 0$ достаточно малых и γ достаточно больших, следует (26).

Применяя лемму Гронуолла к (26), получаем (10).

Лемма 2 доказана, и мы можем переходить к завершению доказательства теоремы 1.

Из утверждения леммы 2 следует, что аттрактор \mathfrak{A}^γ лежит на диагонали фазового пространства при достаточно больших значениях параметра γ :

$$\mathfrak{A}^\gamma \subset \text{diag} H, \quad \gamma \geq \gamma_0 > 0,$$

что в силу (17) означает искомое равенство двух множеств:

$$\mathfrak{A}^\gamma = \mathfrak{A}, \quad \gamma \geq \gamma_0.$$

Выводы. Рассмотрена система связанных пластин Бергера с нелинейным внутренним и граничным демпфированием. Исследована зависимость структуры глобального аттрактора \mathcal{A}^γ системы от параметра γ , пропорционального интенсивности взаимодействия пластин. Описана структура верхнего предела аттрактора $\mathcal{A}(\infty)$ при $\gamma \rightarrow \infty$. Установлено явление асимптотической (при $t \rightarrow \infty$) синхронизации системы для конечных значений параметра связи γ при дополнительных условиях на функции задачи (1) – (4).

Список литературы: 1. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization. A universal concept in nonlinear science. – Cambridge, Cambridge University Press, 2001. 432 p. 2. *Strogatz S.* Sync: The emerging science of spontaneous order. – New York: Hyperion Press, 2003. 338 p. 3. *Afraimovich V.S., Rodrigues H.M.* Uniform dissipativeness and synchronization of nonautonomous equations // International Conference on Differential Equations (Lisboa, 1995). – N. J. World Scientific Publishing, River Edge, 1998. – 3 – 17. 4. *Rodrigues H.M.* Abstract methods for synchronization and applications // Appl. Anal. – 1996. – № 62. – 263 – 296. 5. *Caraballo T., Kloeden P.E.* The persistence of synchronization under environmental noise // Proc. Roy. Soc. London A. – 2005. – № 461. – 2257 – 2267. 6. *Kloeden P.E.* Synchronization of nonautonomous dynamical systems // Elect. J. Diff. Eqns. – 2003. Vol. 2003. No. 39. – 1 – 10. 7. *Carvalho A.N., Rodrigues H.M., Doltko T.* Upper semicontinuity of attractors and synchronization // J. Math. Anal. Appl. – 1998. – № 220. – 13 – 41. 8. *Rekalo A.M., Chueshov I.D.* Global attractor of a contact parabolic problem in a thin two-layer domain // Sb. Math. – 2004. – № 195 – 97 – 119. 9. *Chueshov I.* Invariant manifolds and non-linear master-slave synchronization in coupled systems // Applicable Analysis. – 2007. – V. 86, № 3. – 269 – 286. 10. *Naboka O.* Synchronization of nonlinear oscillations of two coupling Berger plates // Nonlinear Analysis – 2007. – № 67. – 1015 – 1026. 11. *Naboka O.* Synchronization Phenomena in the System Consisting of m Coupled Berger Plates // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – № 341. – 1107 – 1124. 12. *Naboka O.* On synchronization of oscillations of two coupled Berger plates with nonlinear interior damping // СРАА – 2009. – Vol. 8, № 6 – 1933 – 1956. 13. *Naboka O.* On partial synchronization of nonlinear oscillations of two Berger plates coupled by internal subdomains // Nonlinear Analysis. – 2009. – № 71. – 6299 – 6311. 14. *Berger M.* A new approach to the large deflection of plate // J. Appl. Mech. – 1955. – № 22. – 465 – 472. 15. *Kapitansky L.V., Kostin I.N.* Attractors of nonlinear evolution equations and their approximations // Leningrad Math. J. – 1991. – № 2. – 97 – 117. 16. *Набока Е.А.* Синхронизация колебаний двух связанных пластин Бергера с нелинейным внутренним и граничным демпфированием. Часть 1 // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – № 18 (1127). – 2015. – С. 98 – 108. 17. *Lasićka I., Triggiani R.* Control theory of partial differential equations. – Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 18. *Bucci F., Chueshov I., Lasićka I.* Global attractor for a composite system of nonlinear wave and plate equation // Communications on Pure and Applied Analysis. – 2007. – № 6. – 113 – 140. 19. *Chueshov I., Lasićka I.* Long-time behavior of second order evolution equations with nonlinear damping // Memoirs AMS. – 2008. – Vol. 195, № 912. – 1 – 183. 20. *Chueshov I., Lasićka I.* Global attractors for von Karman evolutions with a nonlinear boundary dissipation // J. Diff. Eq. – 2004. – № 198. – 196 – 231. 21. *Chueshov I., Lasićka I.* Attractors of second order evolution equations with a nonlinear damping // J. Diff. Eq. – 2004. – № 16. – 469 – 512. 22. *Chueshov I., Lasićka I.* Long-time dynamics of von Karman semi-flows with non-linear boundary/interior damping // J. of Diff. Eq. – 2007. – № 233. – 42 – 86. 23. *Chueshov I., Lasićka I.* Long time dynamics of semilinear wave equation with nonlinear interior-boundary damping and source of critical exponents // AMS Contemporary Mathematics. – 2007. – № 426. – 153 – 193. 24. *Chueshov I., Lasićka I.* Von Karman Evolution Equations. Well-Posedness and Long-Time Dynamics. – Springer, 2010. 766 p.

Bibliography (transliterated): 1. *Pikovsky, A., M. Rosenblum and J. Kurths.* Synchronization. A universal concept in nonlinear science. Cambridge University Press, 2001. Print. 2. *Strogatz, S.* Sync: The emerging science of spontaneous order. New York: Hyperion Press, 2003. Print. 3. *Afraimovich, V. S., and H. M. Rodrigues.* "Uniform dissipativeness and synchronization of nonautonomous equations." *International Conference on Differential Equations (Lisboa 1995)*. World Scientific Publishing, River Edge, N. J. 1998. 3–17. Print. 4. *Rodrigues, H. M.* "Abstract methods for synchronization and applications." *Appl. Anal.* No. 62. 1996. 263–296. Print. 5. *Caraballo, T., and P. E. Kloeden.* "The persistence of synchronization under environmental noise." *Proc. Roy. Soc. London A*. No. 461. 2005. 2257–2267. Print. 6. *Kloeden, P. E.* "Synchronization of nonautonomous dynamical systems." *Elect. J. Diff. Eqns.* Vol. 2003. No. 39. 2003. 1–10. Print. 7. *Carvalho, A. N., H. M. Rodrigues and T. Doltko.* "Upper semicontinuity of attractors and synchronization." *J. Math. Anal. Appl.* No. 220. 1998. 13–41. Print. 8. *Rekalo, A. M., and I. D. Chueshov.* "Global attractor of a contact parabolic problem in a thin two-layer domain." *Sb. Math.* No. 195. 2004. 97–119. Print. 9. *Chueshov, I.* "Invariant manifolds and non-linear master-slave synchronization in coupled systems" *Applicable Analysis*. Vol. 86. No. 3. 2007. 269–286. Print. 10. *Naboka, O.* "Synchronization of nonlinear oscillations of two coupling Berger plates." *Nonlinear Analysis*. No. 67. 2007. 1015–1026. Print. 11. *Naboka, O.* "Synchronization Phenomena in the System Consisting of m Coupled Berger Plates." *J. Math. Anal. Appl.* No. 341. 2008. 1107–1124. Print. 12. *Naboka, O.* "On synchronization of oscillations of two coupled Berger plates with nonlinear interior damping." *CPAA*. Vol. 8. No. 6. 2009. 1933–1956. Print. 13. *Naboka, O.* "On partial synchronization of nonlinear oscillations of two Berger plates coupled by internal subdomains." *Nonlinear Analysis*. No. 71. 2009. 6299–6311. Print. 14. *Berger, M.* "A new approach to the large deflection of plate." *J. Appl. Mech.* No. 22. 1955. 465–472. Print. 15. *Kapitansky, L. V., and I. N. Kostin.* "Attractors of nonlinear evolution equations and their approximations." *Leningrad Math. J.* No. 2. 1991. 97–117. Print. 16. *Naboka, E. A.* "Синхронизация колебаний двух связанных пластин Бергера с нелинейным внутренним и граничным демпфированием. Часть 1." *Вісник НТУ «ХПІ»*. Сер.: Математичне моделювання в техніці та технологіях. No. 18 (1127). Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. 98–108. Print. 17. *Lasićka, I., and R. Triggiani.* *Control theory of partial differential equations*. Cambridge University Press, 2000. Print. 18. *Bucci, F., I. Chueshov and I. Lasićka.* "Global attractor for a composite system of nonlinear wave and plate equation." *Communications on Pure and Applied Analysis*. No. 6. 2007. 113–140. Print. 19. *Chueshov, I., and I. Lasićka.* "Long-time behavior of second order evolution equations with nonlinear damping." *Memoirs AMS*. Vol. 195. No. 912. 2008. 1–183. Print. 20. *Chueshov, I., and I. Lasićka.* "Global attractors for von Karman evolutions with a nonlinear boundary dissipation." *J. Diff. Eq.* No. 198. 2004. 196–231. Print. 21. *Chueshov, I., and I. Lasićka.* "Attractors of second order evolution equations with a nonlinear damping." *J. Diff. Eq.* No. 16. 2004. 469–512. Print. 22. *Chueshov, I., and I. Lasićka.* "Long-time dynamics of von Karman semi-flows with non-linear boundary/interior damping." *J. of Diff. Eq.* No. 233. 2007. 42–86. Print. 23. *Chueshov, I., and I. Lasićka.* "Long time dynamics of semilinear wave equation with nonlinear interior-boundary damping and source of critical exponents." *AMS Contemporary Mathematics*. No. 426. 2007. 153–193. Print. 24. *Chueshov, I., and I. Lasićka.* *Von Karman Evolution Equations. Well-Posedness and Long-Time Dynamics*. Springer, 2010. Print.

Поступила (received) 08.09.2015

Набока Елена Олександрівна – кандидат фізико-математичних наук, старший викладач, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: (057) 707-60-87; e-mail: lena.a.naboka@rambler.ru.

Набока Елена Алексеевна – кандидат фізико-математических наук, старший преподаватель, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»; тел.: (057) 707-60-87; e-mail: lena.a.naboka@rambler.ru.

Naboka Helena Alekseevna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Lecturer, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute»; тел.: (057) 707-60-87; e-mail: lena.a.naboka@rambler.ru.