УДК 519.6

О.М. ЛИТВИН, д-р фіз.-мат. наук, проф., УІПА, Харків;
Ю.І. ПЕРШИНА, канд. фіз.-мат. наук, докторант, УІПА, Харків
В.О. ПАСІЧНИК, канд. техн. наук, доц., ГДАДМ, Харків

ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДУ ЗНАХОДЖЕННЯ ТОЧОК РОЗРИВУ ПЕРШОГО РОДУ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Розроблено та досліджено метод знаходження точок розриву та ε – розриву першого роду лінійної функції однієї змінної, наближуючи її розривним інтерполяційним чи апроксимаційним лінійним сплайном. Доведені теореми про необхідну кількість ітерацій запропонованого методу для досягнення потрібної точності. Введено поняття ε – неперервності функції однієї змінної. На його основі розроблено модифікований алгоритм виявлення розривів першого роду нелінійної функції однієї змінної, використовуючи розривний апроксимаційний лінійний сплайн. Розглянуто приклад, який підтверджує ефективність запропонованого методу. Також розглянуто перспективи подальших досліджень.

Ключові слова: розривна лінійна інтерполяція, розривна лінійна апроксимація, ε – розрив.

Вступ. Задачі наближення розривних функцій виникають досить часто. Наприклад, в комп'ютерній томографії при дослідженні внутрішньої структури тіла корисно враховувати його неоднорідність, тобто різну щільність в різних частинах тіла (кістки, серце, шлунок тощо мають різну щільність, тобто щільність всього тіла є функцією з розривами першого роду на системі ліній чи поверхонь); при дослідженні кори Землі за допомогою даних з кернів свердловин виникає задача відновлення внутрішньої структури кори між свердловинами. При цьому очевидним є те, що щільність ґрунту в різних точках кори є неоднорідною і найчастіше має розриви першого роду в точках поверхонь, що відділяють одну складову кори від іншої (чорнозем, глина, пісок, граніт тощо).

Тобто актуальною є задача розробки та дослідження теорії наближення розривних функцій за допомогою розривних сплайнів та розробка методів виявлення точок або ліній розриву функції для більш точного уявлення про структуру досліджуваного об'єкта. Її розв'язанню присвячена дана стаття.

Аналіз останніх досліджень. Задача наближення неперервних функцій неперервними сплайнами з достатньою повнотою описана в багатьох роботах. Існують багато технічних задач, в яких наближуюча функція не обов'язково є гладкою, іноді допустима її розривність – лише б похибка наближення була достатньо мала. Наближення такого типу раніше детально не розглядалося, існують тільки підходи до розв'язання такого типу задач, які працюють для частинних випадків. Для того, щоб розв'язувати широке коло наукових та технічних задач, корисні рівномірні наближення негладкими та розривними функціями. В роботах *Попова Б.Я.* [1] та його учнів досліджуються наближення неперервних функцій за допомогою розривних сплайнів в чебишевській нормі. В роботах Литвина О.М. [2] та його учнів досліджувалося питання наближення неперервних функцій однієї змінної кусково-сталими функціями.

В роботах [3] досліджується *розривний метод Гальоркіна* високого порядку. На відміну від класичного методу Гальоркіна, розривний метод апроксимує розривний розв'язок функціями, розривними на границях розрахункової сітки.

В роботах [4] – [7] запропоновані та дослідженні математичні моделі (нові класи крайових задач з розривними розв'язками), що описують процеси в неоднорідних середовищах з тонкими включеннями-тріщинами.

Для моделювання складних гладких фізичних явищ в якості потужної обчислювальної техніки використовуються Фур'є – спектральні методи [8]. Їх швидкість збіжності залежить від гладкості та періодичності функції в досліджуваній області. Якщо функція має розрив хоча б в одній точці, швидкість збіжності погіршується та поряд з розривами розвиваються коливання. Така поведінка називається *явищем Гібса*. Тобто, якщо функція є розривною, то її ряд Фур'є не є гарним наближенням функції. В роботі [9] використовуються фільтри у розкладі Фур'є розривних функцій. Але фільтрація не повністю знищує явище Гібса.

В роботах [10] – [12] авторами запропонований метод відновлення розривної функції однієї змінної та алгоритм виявлення точок $\varepsilon-$розриву. В даній роботі пропонується обгрунтування цього методу у вигляді теорем про збіжність ітераційного процесу та кількості ітерацій, що потрібно зробити для виявлення точки $\varepsilon-$розриву.

Постановка задачі. Нехай задана лінійна функція однієї змінної $f(x)$ на інтервалі $[0;1]$ з можливими розривами першого роду в точках x_k, $k=\overline{1,n}$. Задані вузли розбивають інтервал $[0;1]$ на $n-1$ частин. Треба побудувати та дослідити метод відновлення розривної функції $f(x)$ та виявити точки $\varepsilon-$розриву.

Метод виявлення точок ε - розриву.

Визначення 1. Будемо називати розривним інтерполяційним лінійним сплайном на відрізку $[x_k, x_{k+1}]$, $k=\overline{1,n-1}$ функцію $S(x)\in C^{-1}[a,b]$, яка визначається наступним чином

$$S(x)=C_k^{+}\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}+C_{k+1}^{-}\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k},\ k=\overline{1,n-1}, \tag{1}$$

де C_k^{+}, C_{k+1}^{-}, $k=\overline{1,n-1}$ – параметри сплайну $S(x)$, що визначаються у вигляді односторонніх границь

$$C_k^{+}=\lim_{x\to x_k+0}f(x),\ C_{k+1}^{-}=\lim_{x\to x_{k+1}-0}f(x).$$

Теорема 1. *Якщо* $f(x)\in C^{-1}[a,b]$, *яка є* r *раз диференційованою на кожному з інтервалів* $[x_k, x_{k+1}]$, $k=\overline{1,n-1}$, $r=1,2$, *то залишок* $Rf(x)=$

$= f(x) - S(x)$ *наближення розривним інтерполяційним сплайном вигляду (1) на кожному інтервалі розбиття буде мати вигляд*

$$R_k f(x) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f^{(r)}(\xi) G(x, \xi) d\xi, \; x \in [x_k, x_{k+1}], \; k = \overline{1, n-1},$$

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \dfrac{(x_k - \xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_k \le \xi \le x, \\ -\dfrac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \dfrac{(x_{k+1} - \xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x \le \xi \le x_{k+1}, \end{cases} \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Далі пропонується алгоритм виявлення розривів функції однієї змінної та алгоритм оптимального визначення вузлів наближуючого сплайну, який сформулюємо по кроках.

Визначення 2 *Розривним апроксимаційним лінійним сплайном* на відрізку $[x_k, x_{k-1}]$, $k = \overline{1, n-1}$ будемо називати розривну функцію, визначену формулою (1), де коефіцієнти C_k^+, C_{k+1}^- сплайна знаходяться методом найменших квадратів в одній із наступних форм:

– дискретній формі

$$\sum_{k=1}^{n-1} (f(x_k + 0) - S_k(x_k + 0))^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (f(x_k - 0) - S_k(x_k - 0))^2 \to \min_C ;$$

– інтегральній формі

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - S(t))^2 dt \to \min_C . \tag{2}$$

Визначення 3. Якщо $\left| \lim\limits_{x \to x_q + 0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_q - 0} f(x) \right| < \varepsilon$, то функцію $f(x)$ будемо називати $\varepsilon -$ *неперервною в точці* x_q .

Оптимальним набором вузлів будемо називати таку найменшу кількість вузлів, серед яких є точки $\varepsilon -$розриву функції, та таку, що розривний сплайн, побудований на їх основі, наближує функцію із заданою точністю.

Викладемо алгоритм наближення розривної функції покроково.

Крок 1. Будуємо розривний апроксимаційний сплайн $S(x)$ на заданих вузлах x_k, $k = \overline{1, n}$ за формулою (1) з невідомими коефіцієнтами C_k^+, C_{k+1}^-, $k = \overline{1, n-1}$. Причому на першій ітерації вважаємо, що односторонні значення функції в заданих вузлах збігаються. Знаходимо вектор $C = (C_1^+, C_2^-, C_2^+, C_3^-, ..., C_{n-1}^+, C_n^-)$ з умови (2). Після підстановки знайдених коефіцієнтів у сплайн (1) отримаємо сплайн

$$S_k(x) = S_k(x, C^I), \; x \in [x_k, x_{k+1}], \; k = \overline{1, n-1} .$$

Крок 2. На кожному з інтервалів $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{1, n-1}$ обчислюємо значення $J_k^* = \max_{x_k \le x \le x_{k+1}} J_k(x)$, $J_k(x) = \left| f(x) - S_k(x) \right|$.

Крок 3. Якщо виконуються умови: 1) $J_q < \delta, J_{q+1} < \delta$, де δ – задана точність наближення; 2) $S(x)$ є ε – неперервною в точці x_{q+1}, то вузол x_{q+1} видаляємо з розгляду.

Крок 4. З усіх J_k^* обираємо максимальне значення $M = \max_{1 \le k \le n}(J_k^*)$ та ділимо інтервал, в якому це максимальне значення отримується, навпіл.

Крок 5. На новій множині вузлів знову будуємо апроксимаційний сплайн за формулою (1) та за формулою (2) знаходимо вектор коефіцієнтів C.

Перевіряємо виконання умови $\max_{x \in [a,b]} \left| f(x) - Sp(x) \right| < \delta$, де δ – задана точність наближення. Якщо умова виконана, то отримали набір оптимальних вузлів наближуючого сплайну, серед яких знаходяться і розриви заданої функції. Якщо вказана умова не виконана, то повертаємося до кроку 3.2

Теорема 2. *Якщо $f(x) \in C^{-1}[0;1]$ є кусково-лінійною функцією і має одну точку розриву першого роду $x^* = m/2^k$, $m, k \in N$, $m < 2^k$, то можна її виявити не більше, ніж за k ітерацій.*

Доведення будемо проводити методом математичної індукції.

Нехай $k=1$, $m=1$, тобто $x^* = 0{,}5$.

Крок 1. В якості вузлів розривного лінійного сплайну $S(x)$ вибираємо рівномірно розташовані вузли $x_0 = 0,\ x_1 = 0{,}5,\ x_2 = 1$. Будуємо розривний сплайн

$$S(x) = \begin{cases} C_1^+ \dfrac{x-0.5}{0-0.5} + C_2^- \dfrac{x-0}{0.5-0}, & x \in [0, 0.5]; \\ C_2^+ \dfrac{x-1}{0.5-1} + C_3^- \dfrac{x-0.5}{1-0.5}, & x \in (0.5, 1]. \end{cases}$$

Для початкового наближення в якості параметрів $C_k^{\pm}$ візьмемо односторонні значення функції $f(x)$ у потрібних вузлах, тобто

$$C_k^{\pm} = \lim_{x \to x_k \pm 0} f(x).$$

Для знаходження параметрів використовуємо метод найменших квадратів в інтегральній формі. Випишемо функціонал, який треба мінімізувати:

$$J(C) = \int_0^1 (f(x) - S(x))^2 dx = \int_0^{0.5} (f(x) - S(x))^2 dx + \int_{0.5}^1 (f(x) - S(x))^2 dx. \quad (3)$$

Оскільки $f(x)$ є кусково-лінійною розривною функцією, то $f(x) - S(x) \equiv 0$. Звідки отримаємо $J(C) = 0$.

Тобто для випадку, коли розривна лінійна функція має одну точку розриву $x^* = m/2^k$, $k=1$, $m=1$, то для відновлення такої функції достатньо однієї ітерації.

Нехай $k = 2$. Для визначеності будемо вважати $m = 1$, тобто $x^* = 1/2^2$.

Крок 2. При побудові сплайну $S(x)$ у запропонованому на кроці 1 вигляді функціонал буде мати вигляд

$$J(C) = \int_0^1 (f(x) - S(x))^2 dx = \int_0^{0.5} (f(x) - S(x))^2 dx \neq 0 ,$$

оскільки $\int_{0.5}^{1} (f(x) - S(x))^2 dx = 0$, бо $f(x)$ є лінійною неперервною функцією на інтервалі $(0.5;1)$.

Інтервал, на якому $J(C) \neq 0$, ділимо навпіл, вводячи новий вузол $x = 0,25$. Тобто маємо новий набір вузлів $x_0 = 0,\ x_1 = 1/2^2,\ x_2 = 1/2^1.$ І, повторюючи крок 1, отримаємо:

$$J(C) = \int_0^{0.5} (f(x) - S(x))^2 dx = \int_0^{\frac{1}{4}} (f(x) - S(x))^2 dx + \int_{\frac{1}{4}}^{0.5} (f(x) - S(x))^2 dx = 0 .$$

Аналогічний результат буде у випадку $m = 3,\ k = 2$.

Тобто для виявлення точки розриву $x^* = m/2^k,\ k = 2$ потрібні 2 ітерації.

Нехай для виявлення точки розриву $x^* = m/2^k,\ m = 1,\ k = n$ потрібно n ітерацій, тобто на $n-$ій ітерації розривний сплайн $S(x)$ будуємо на вузлах $x_0 = 0,\ x_1 = 1/2^n,\ x_2 = 1/2^{n-1}$ і мінімізуючий функціонал має вигляд

$$J(C) = \int_0^{1/2^n} (f(x) - S(x))^2 dx + \int_{1/2^n}^{1/2^{n-1}} (f(x) - S(x))^2 dx = 0 ,$$

оскільки функція є кусково-лінійною з єдиним розривом в точці $x^* = 1/2^n$.

Доведемо, що для виявлення точки розриву $x^* = m/2^k,\ m = 1,\ k = n+1$ потрібно $n+1$ ітерація. Для цього випадку функціонал

$$J(C) = \int_0^{1/2^n} (f(x) - S(x))^2 dx + \int_{1/2^n}^{1/2^{n-1}} (f(x) - S(x))^2 dx = \int_0^{1/2^n} (f(x) - S(x))^2 dx \neq 0,$$

оскільки $\int_{1/2^n}^{1/2^{n-1}} (f(x) - S(x))^2 dx = 0,$ бо $f(x)$ є лінійною неперервною функцією на інтервалі $(1/2^n,\ 1/2^{n-1})$.

Інтервал, на якому $J(C) \neq 0$, ділимо навпіл, вводячи новий вузол $x = 1/2^{n+1}$ (тобто робимо $n+1-$у ітерацію). І, будуючи на новій трійці вузлів

$x_0 = 0,\ x_1 = 1/2^{n+1},\ x_2 = 1/2^n$ розривний сплайн, отрмаємо:

$$J(C) = \int_0^{1/2^{n+1}} (f(x) - S(x))^2 dx + \int_{1/2^{n+1}}^{1/2^n} (f(x) - S(x))^2 dx = 0,$$

тому що точка $x = 1/2^{n+1}$ є точкою розриву.

Тобто розрив виявлено за $n+1-$у ітерацію.

Теорема 2 доведена.

Теорема 3. *Якщо $f(x) \in C^{-1}[0;1]$ – кусково-лінійна функція, що має одну точку розриву першого роду x^*, то виявити її можна за $k = \lceil -\log_2 2\varepsilon \rceil$ ітерацій з похибкою ε.*

Доведення. Опишемо алгоритм виявлення точки ε -розриву.

Крок 1. Обираємо рівномірне розбиття інтервалу $[0;1]$: $x_0 = 0,\ \ x_1 = 0.5,$ $x_2 = 1$. І будуємо на цих вузлах розривний сплайн $S(x)$. Функціонал, який треба мінімізувати, має вигляд (3). Один з інтегралів в цьому виразі буде дорівнювати нулю, оскільки на інтервалі, по якому ведеться інтегрування, функція задається є неперервно і лінійною.

Крок 2. Інтервал, на якому $J(C) \neq 0$, ділимо навпіл. Нехай для визначеності це інтервал $\left[0;\, 0,5\right]$ і обираємо вузли

$$x_0 = 0,\ x_1 = 1/2^2,\ x_2 = 1/2\,.$$

Знову ж будуємо сплайн на нових вузлах, і один з інтегралів в мінімізуючому функціоналі не буде дорівнювати нулю.

Знайдемо критерій зупинки ітераційного процесу.

Треба знайти такий найближчий до точки розриву інтервал $(m/2^k,$ $(m+1)/2^k),\ m \in N,\ m < 2^k$, що виконується умова

$$\left|\frac{m+1}{2^k} - \frac{m}{2^k}\right| < 2\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2^k} < 2\varepsilon \Rightarrow 2^k > \frac{1}{2\varepsilon} \Rightarrow k > \log_2 \frac{1}{2\varepsilon} = -\log_2(2\varepsilon).$$

Оскільки $k \in N$, то $k = \lceil -\log_2(2\varepsilon) \rceil$ – це номер ітерації (кроку), на якій потрібно зупинити ітераційний процес.

Число m задовольняє нерівностям

$$\frac{m}{2^k} < x^* < \frac{m+1}{2^k} \Rightarrow m < x^* \cdot 2^k,\ m > x^* \cdot 2^k - 1$$

Оскільки $m \in N$, то $m = \lfloor x^* \cdot 2^k \rfloor$.

Тобто на $k = \lceil -\log_2(2\varepsilon) \rceil$ – ітерації знайдемо точку $\varepsilon -$-розриву x^*, яка потрапить в $\varepsilon -$інтервал $\left(\lfloor x^* \cdot 2^k \rfloor / 2^k,\ \left(\lfloor x^* \cdot 2^k \rfloor + 1\right)/2^k\right)$. Тобто $x^* \in$ $\in \left(\lfloor x^* \cdot 2^k \rfloor / 2^k,\ \left(\lfloor x^* \cdot 2^k \rfloor + 1\right)/2^k\right)$.

Теорема доведена.

Приклад 1. Нехай розривна лінійна функція $f(x)$ має розрив першого роду в точці $x^* = \pi - 3 \approx 0.14159265$. Складемо таблицю результатів виявлення точки $\varepsilon -$розриву, тобто $\varepsilon -$інтервал, та номер ітерації в залежності від заданої похибки ε (табл. 1).

Таблиця 1 – Результати розрахунку

Похибка, ε	Номер ітерації, k	$\varepsilon -$інтервал
0,01	6	(0.140625; 0.15625)
0,001	9	(0.140625; 0.1425781)
0,0001	13	(0.14147949; 0.1416016)

Визначення 4. *Базисним розривним лінійним сплайном* на інтервалі $[0;1]$ будемо називати сплайн

$$B(x) = \begin{cases} h(x), & x \in [0;1]; \\ 0, & x \notin [0;1], \end{cases}$$

де $h(x)$ – лінійний неперервний поліном.

Теорема 4. *Довільну розривну лінійну функцію $f(x)$ зі скінченною кількістю розривів першого роду можна представити у вигляді суми базисних розривних сплайнів.*

Дійсно завжди, знайдуться такі $M \in N$ і параметри $C_k^{\pm}$, що лінійну розривну функцію можна записати у вигляді

$$f(x) = \sum_{k=1}^{M} B(Mx - k; C_k^{\pm}),\ C_k^{\pm} = f\left(\frac{k}{M} \pm 0\right).$$

Викладемо алгоритм наближення розривної лінійної функції покроково.

Крок 1. Будуємо розривний апроксимаційний лінійний сплайн $S(x)$ на заданих вузлах x_k, $k = \overline{1,n}$ (наприклад, рівномірно розташованих) за формулою (1) з невідомими коефіцієнтами C_k^+, C_{k+1}^-, $k = \overline{0, n-1}$. Причому на першій ітерації вважаємо, що односторонні значення функції в заданих вузлах збігаються. Знаходимо вектор $C = (C_1^+, C_2^-, C_2^+, C_3^-, ..., C_{n-1}^+, C_n^-)$ з умови (2), обчислюючи функціонал $J(C)$.

Крок 2. Знаходимо інтервали, на яких

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - Sp_k(t))^2\, dt \neq 0,\ \ k = \overline{0, n-1}.$$

Обчислюємо їх довжину $d_k = x_{k+1} - x_k$. Якщо $d_k < 2\varepsilon$, то інтервали (x_k, x_{k+1}) є $\varepsilon -$околом точок розриву ($\varepsilon -$розривами) і ітераційний процес закінчено. Якщо ця умова не виконується, то знайдені інтервали ділимо навпіл. Інші інтеграли дорівнюють нулю, оскільки $f(x)$ є кусково-лінійною функцією. Отримаємо новий набір вузлів. І повторюємо крок 1.

Крок 3. В якості вузлів розривного сплайну обираємо кінці інтервалу $(0;1)$ та точки ε-розриву $x_m^*, m=\overline{1,M}$, враховуючи $C_0^+ = f(0)$, $C_m^\pm =$ $= f(x_m \pm \varepsilon)$, $m=\overline{1,M}$, $C_{M+1}^- = f(1)$.

Приклад 2. Нехай в області $D=[0,1]$ задана функція (рис. 1)

$$f(x)=\begin{cases}-12x^2+2, & x\in(0,0.4];\\ 3-x, & x\in(0.4,0.7];\\ 1, & x\in(0.7,0.1].\end{cases}$$

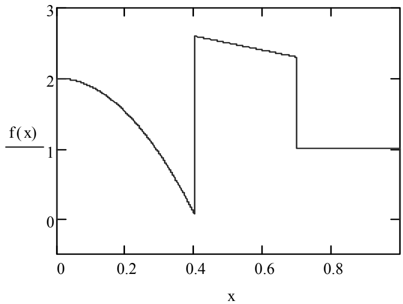

Рис.1 – Графік функції.

Тобто ця функція має два розриви першого роду в точках $x=0.4$, $x=0.7$. Задамо $\varepsilon=0.01$. Оскільки задана функція нелінійна, а наближувати будемо лінійними розривними сплайнами, то потрібно задавати точність наближення δ, наприклад $\delta=$ $=0.01$. Адаптуємо наведений вище алгоритм.

На першому кроці будуємо розривний апроксимаційний сплайн $S(x)$ на вузлах x_k, $k=\overline{1,n}$ за формулою (1) з невідомими коефіцієнтами $C_k^+, C_{k+1}^-, k=\overline{1,n-1}$. Знаходимо вектор C з умови (2).

Далі на другому кроці на кожному з інтервалів $[x_k, x_{k+1}]$, $k=\overline{1,n-1}$ обчислюємо значення $J_k^* = \max\limits_{x_k\le x\le x_{k+1}} J_k(x)$, $J_k(x)=\left|f(x)-Sp_k(x)\right|$. І крок 3 зводиться до перевірки умов: 1) $J_q<\delta, J_{q+1}<\delta$, де δ – задана точність наближення; 2) $S(x)$ є $\varepsilon-$неперервною в точці x_{q+1}. Якщо ці умови виконані, то вузол x_{q+1} видаляємо з розгляду. З усіх J_k^* обираємо максимальне значення $M=\max\limits_{1\le k\le n}(J_k^*)$ та ділимо інтервал, в якому це максимальне значення отримується, навпіл.

На новій множині вузлів знову будуємо апроксимаційний сплайн за формулою (1) та за формулою (2) знаходимо вектор коефіцієнтів C.

Перевіряємо виконання умови $\max\limits_{x\in[a,b]}\left|f(x)-S(x)\right|<\delta$, де δ – задана точність наближення. Якщо умова виконана, то ми отримали набір оптимальних вузлів наближуючого сплайну, серед яких знаходяться і розриви заданої функції. Якщо вказана умова не виконана, то повертаємося до кроку 3.

Застосуємо цей алгоритм до заданої функції. Оберемо вузли сплайна: $x_1=0,\ x_2=0.3,\ x_3=0.6,\ x_4=1$. Побудуємо розривний апроксимаційний лінійний сплайн у вигляді формули (1). Задамо точність наближення $\delta=0.01$ та $\varepsilon=0.01$. Наведемо деякі проміжні результати наближення

При цьому оптимально обрали вузли сплайна, які дорівнюють

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0.075,\ x_3 = 0.15,\ x_4 = 0.225,\ x_5 = 0.3,\ x_6 = 0.375,$$

$$x_7 = 0.4,\ x_8 = 0.7,\ x_9 = 1.$$

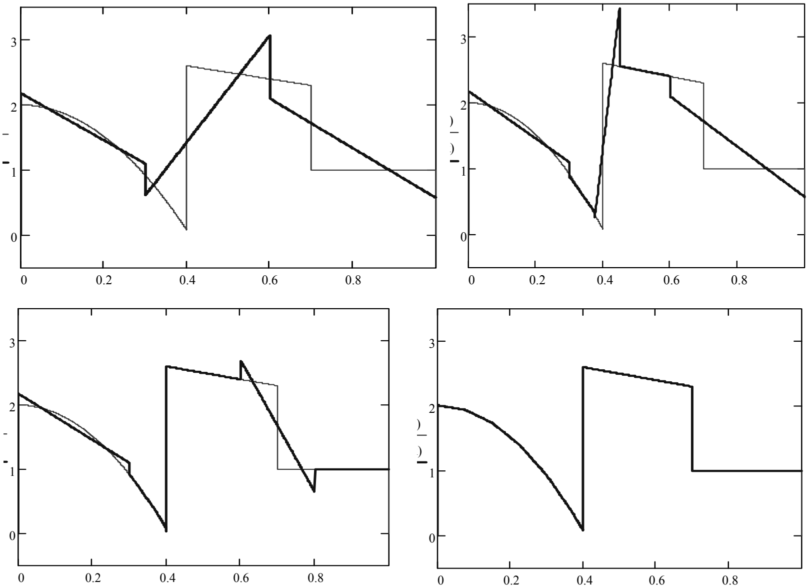

Рис.2 – Проміжні результати алгоритму виявлення точок розриву розривної функції шляхом наближення її розривним сплайном.

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають перспективним розвиток теорії наближення розривних функцій багатьох змінних розривними сплайнами та побудову математичних моделей розривних процесів на основі розробленої теорії, оскільки, як вже було зазначено, задачі дослідження процесів, що мають розриви, виникають частіше, ніж задачі дослідження неперервних процесів.

Наступним кроком автори планують обгрунтувати метод відновлення розривних функцій двох змінних [13] та метод виявлення ліній та точок $\varepsilon-$розриву, використовуючи розбиття області визначення функції двох змінних на прямокутні елементи, з метою оптимізації кількості обчислень.

Висновки. В роботі введено поняття розривного лінійного апроксимаційного сплайну, та пропонуєтья метод знаходження точок ε -розриву лінійної функції однієї змінної, інформацією про яку є її значення, які можна отримати на довільній скінченній множині точок з інтервалу $[0;1]$. Цей метод може бути розповсюджений на випадок нелінійної розривної функції. І в роботі запропонований модифікований метод знаходження точок розриву.

Список літератури: 1. *Попов Б.А.* Равномерное приближение сплайнами. – Киев.: Наукова думка, 1989.– 272с. **2.** *Литвин О.М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Х.: Основа, 2002. – 544с.; **3.** *Петровская Н.Б.* Аппроксимация разрывных решений для одного класса схем высокого порядка // Математическое моделирование. – Москва. – 2005. – Т.17, №1. – С. 79 – 92; **4.** *Дейнека В.С.*, *Сергиенко И.В.* Анализ многокопмонентных распределенных систем и оптимальное управление. Наукова Думка. – Киев. – 2007. – 703с. **5.** *Дейнека В.С.*, *Сергиенко И.В.* Модели и методы решения задач в неоднородных средах. – Киев: Наук. думка, – 2001. – 606с. **6.** *Дейнека В.С.*, *Сергиенко И.В.* Оптимальное управление неоднородными распределенными системами. – Киев: Наук. думка, – 2003. – 506с. **7.** *Дейнека В.С.*, *Сергиенко И.В.* Системный анализ упругих и термоупругих неоднородных тел. – Киев: Наук. думка, – 2012. – 511с. **8.** *Abdul J. Jerri*, Ed. Advances in the Gibbs Phenomenon // Clarkson University Σ Sampling Publishing Potsdam, New York Copyright. –2011. – 424 pp. **9.** *Gottlieb S.*, *Jae-Hun Jung*, *Kim S.* A Review of David Gottlieb's Work on the Resolution of the Gibbs Phenomenon // Commun. Comput. Phys. – Beijing. – Vol. 9, No. 3. – 2011. – P. 497 – 519. **10.** *Литвин О.М.*, *Першина Ю.І.* Наближення розривної функції за допомогою розривних сплайнів // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець – Подільський, 2010. – Вип.3. – С. 122 – 131. **11.** *Литвин О.М.*, *Першина Ю.І.* Математичне моделювання процесів, які мають розриви, за допомогою розривних інтерполяційних сплайнів // Научно-технический журнал «Искусственный интеллект». – 2011. – №2.– С.152 – 158. **12.** *Литвин О.М.*, *Першина Ю.І.* Наближення розривної функції розривним сплайном, коли вузли сплайна не збігаються з розривами функції. – Институт проблем математики и механики // Праці ІПММ НАН України. – Т.24. – Донецьк, 2012. – С. 157 – 165. **13.** *Литвин О.Н.*, *Першина Ю.И.*, *Сергиенко И.В.* Восстановление разрывных функций двух переменных, когда линии разрыва неизвестны (прямоугольные элементы). // Кибернетика и системный анализ, №4. – 2014. – С.126 – 134.

Bibliography (transliterated): 1. Popov, B. A. *Ravnomernoe priblizhenie splajnami.* Kiev: Nauk. dumka*,* 1989. Print. **2.** Litvin, O. M. *Interlinacija funkcij ta dejaki i'i' zastosuvannja.* Kharkiv: Osnova, 2002. Print. **3.** Petrovskaja, N. B. "Approksimacija razryvnyh reshenij dlja odnogo klassa shem vysokogo porjadka." *Matematicheskoe modelirovanie.* Moscow. Vol. 17. No. 1. 2005. 79–92. Print. **4**. Dejneka, V. S., and I. V. Sergienko. *Analiz mnogokomponentnyh raspredeljonnyh sistem i optimal'noe upravlenie."* Kiev: Nauk. dumka. 2007. Print. **5**. Dejneka, V. S., and I. V. Sergienko. *Modeli i metody reshenija zadach v neodnorodnyh sredah.* Kiev: Nauk. dumka, 2001. Print. **6.** Dejneka, V. S., and I. V. Sergienko. *Optimal'noe upravlenie neodnorodnymi raspredeljonnymi sistemami.* Kiev: Nauk. dumka, 2003. Print*.* **7.** Dejneka, V. S. and I. V. Sergienko. *Sistemnyj analiz uprugih i termouprugih neodnorodnyh tel.* Kiev: Nauk. dumka, 2012. Print*.* **8.** Ed. Abdul, J. Jerri. *Advances in the Gibbs Phenomenon.* Clarkson University Σ Sampling Publishing Potsdam: New York Copyright, 2011. Print*.* **9.** Gottlieb, S., Jae-Hun Jung and S. Kim. "A Review of David Gottlieb's Work on the Resolution of the Gibbs Phenomenon." *Commun. Comput. Phys.* Vol. 9. No. 3. Beijing, 2011. 497–519. Print*.* **10.** Litvin, O. M., and Ju. I. Pershina. "Nablyzhennja rozryvnoi' funkcii' za dopomogoju rozryvnyh splajniv." *Matematychne ta komp"juterne modeljuvannja. Ser.: Fiziko-matematychni nauky: zb. nauk. prac'.* No. 3. Kam"janec' – Podil's'kyj, 2010. 122–131. Print*.* **11.** Litvin, O. M., and Ju. I. Pershina. "Matematychne modeljuvannja procesiv, jaki majut' rozryvy, za dopomogoju rozryvnyh interpoljacijnyh splajniv. *Nauchno-tehnicheskij zhurnal «Iskusstvennyj intellekt».* No. 2. 2011. 152–158. Print. **12**. Litvin, O. M., and Ju. I. Pershina. "Nablyzhennja rozryvnoi' funkcii' rozryvnym splajnom, koly vuzly splajna ne zbigajut'sja z rozryvamy funkcii'." *Praci IPMM NAN Ukrai'ny.* No. 24. Donec'k, 2012. 157–165. Print. **13.** Litvin, O. N., Ju. I. Pershina and I. V. Sergienko. "Vosstanovlenie razryvnyh funkcij dvuh peremennyh, kogda linii razryva neizvestny (prjamougol'nye jelementy)." *Kibernetika i sistemnyj analiz.* No. 4. 2014. 126–134. Print.

Надійшла (received) 03.03.2015