

В.Т. ГРИШАКИН, канд. техн. наук, ХНАДУ, Харьков

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ИМПУЛЬСНОЙ НАГРУЗКИ, ВОЗДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА ВЯЗКО-УПРУГУЮ БАЛКУ

Работа представляет решение задачи по идентификации положения и амплитудного значения импульсной сосредоточенной нагрузки, действующей на шарнирно закрепленную балку. Решение построено как на модели балки Кирхгофа, так и на модели Тимошенко, с учетом диссипации энергии колебаний на основе соотношений Фойгта. Процедура идентификации предполагает минимизацию некоторой целевой функции, позволяющей на первом этапе определить приближенное положение точки приложения нагрузки, а на втором – вычислить ее приближенное амплитудное значение. При проведении численного эксперимента исходные данные были взяты с результатов моделирования методом конечных элементов колебаний балки, обусловленных импульсной нагрузкой. Показано, что использование модели Тимошенко обеспечивает более близкий к истинному значению результат идентификации с приемлемой для инженерной практики точностью.

Ключевые слова: идентификация, сосредоточенная нагрузка, диссипация, модель Фойгта, минимизация.

Введение. В последние десятилетия в связи с активным развитием теории и практики решения некорректных задач вычислительной математики наблюдается повышенный интерес к разработке эффективных подходов по идентификации действующих на элементы конструкции нестационарных механических нагрузок, в том числе импульсных. И к настоящему времени наиболее полно изучены подходы по восстановлению нагрузок в случае балочных элементов, как достаточно простой и распространенной расчетной механической системы. В ряде посвященных данной проблематике публикаций процедура идентификации построена на модальном анализе колебаний балки [2, 5, 6]. Однако, как показано в некоторых работах, более точные результаты идентификации могут быть получены на основе технологии временной области. Данная технология используется для приближенного восстановления закона изменения во времени сосредоточенной или распределенной известным образом по длине балке нагрузки [3], для определения положения точки приложения сосредоточенной нагрузки в предположении, что закон изменения ее во времени известен [1]. В работе [2] показана возможность реализации данной технологии для полной идентификации импульсной нагрузки (положение точки приложения и амплитудное ее значение) с учетом диссипации энергии колебаний балки. Вместе с тем полученное в данной работе решение построено на модели Кирхгофа и через введение критерия точности по частоте, что несколько сужает область полученных результатов. Настоящая работа обобщает результаты [2] через привлечение *модели Тимошенко* с учетом *соотношений Фойгта*, при этом сама процедура идентификации строится на принципиально ином подходе.

Постановка задачи. Рассматривается балка длиной l (рис. 1), изготовленная из материала с плотностью ρ и модулем упругости E . С балкой связана декартова система координат, начало которой совпадает с одним из торцов балки, а ось абсцисс направлена вдоль ее оси. Колебания возбуждаются импульсной сосредоточенной нагрузкой $q(x, t)$, точка приложения которой определяется координатой $x = x_0$.

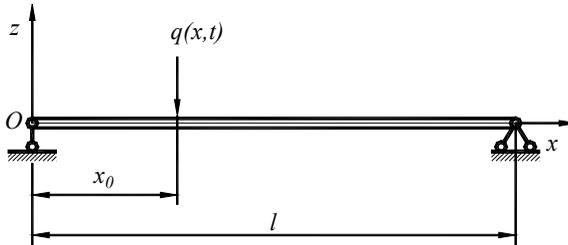


Рис. 1 – Описание модели балки.

В рамках гипотез Кирхгофа-Лява уравнение, описывающие нестационарное деформирование исследуемой балки с учетом диссипации энергии колебаний по модели Фойгта, имеют вид [3]:

$$\frac{EI}{\rho F} \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \frac{\eta I}{\rho F} \frac{\partial^5 w(x, t)}{\partial x^4 \partial t} + \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho F} q. \quad (1)$$

Здесь $w(x, t)$ – прогиб балки; $q(x, t) = P_0 \delta(t) \delta(x - x_0)$; t – время; η – коэффициент динамической вязкости, δ – дельта-функция Дирака; F , I – площадь поперечного сечения балки и осевой момент инерции (при прямоугольном поперечном сечении $F = bh$ и $I = bh^3/12$, где h – толщина; b – ширина сечения).

В случае исследования переходных процессов на основании уточненной модели балки С.П. Тимошенко с учетом эффекта вязкоупругого затухания по Фойгту используется следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \chi^2 \left(1 + \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \beta^2 \left(1 + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}; \\ \alpha^2 \left(1 + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho F} q, \end{cases} \quad (2)$$

где ψ – угол поворота нормали от изгиба к нейтральной линии балки; $G = E/2(1 + \nu)$ – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона; $\alpha = \sqrt{k'G/\rho}$; $\beta = \sqrt{k'GF/\rho I}$; $\chi = \sqrt{E/\rho}$; $k' = 6/5$ – коэффициент формы поперечного сечения; ε_1 и ε_2 – коэффициенты поперечного и вращательного затуханий (считается, что $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \eta/E$).

Для обеих моделей, граничные условия приняты в виде

$$w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0; \quad \partial^2 w / \partial x^2|_{x=0} = \partial^2 w / \partial x^2|_{x=l} = 0, \quad (3)$$

соответствующие случаю шарнирного закрепления торцов.

Начальные условия – нулевые.

Задача заключается в приближенном восстановлении амплитудного значения внешней нагрузки P_0 и положения точки ее приложения x_p в предположении, что известны прогибы балки $w(x, t) = \tilde{w}(t)$ в точке $x = x_1$.

Математическая модель. Для решения рассматриваемой задачи рассмотрим на первом этапе так называемую прямую задачу о колебаниях исследуемой балки под действием единичной нагрузки, приложенной в некоторой точке x_i .

Традиционный метод решения прямой задачи строится на поиске функции w в виде разложения по формам свободных колебаний балки:

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \sin(\lambda_k x), \quad (4)$$

где $a_k(t)$ – неизвестные коэффициенты; $\lambda_k = k\pi/l$ – волновые числа.

Очевидно, что решение (4) обеспечивает удовлетворение граничных условий (3).

Функция внешней нагрузки $q(x, t)$, также раскладывается в ряд Фурье:

$$q(x, t) = \delta(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin(\lambda_k x_i) \sin(\lambda_k x). \quad (5)$$

Для отыскания коэффициентов, соответствующих модели (1), представление (4) подставляется в трансформированное по Лапласу уравнение (1) при нулевых начальных условиях. В результате получим

$$a_k^L(s) = c_k / (s^2 + 2n_k s + p_k^2), \quad (6)$$

где s – комплексный параметр преобразования; $p_k^2 = (EI/\rho F)\lambda_k^4$; $2n_k = (\eta I/\rho F)\lambda_k^4$; $c_k = (2/\rho Fl) \sin(\lambda_k x_p)$. Здесь учтено, что $L\{\delta(t)\} = 1$.

С использованием таблиц операционного исчисления в области оригиналов для искоемых коэффициентов $a_k(t)$ будет справедливым следующее выражение

$$a_k(t) = L^{-1}\{a_k^L(s)\} = c_k e^{-n_k t} F_k(t), \quad (7)$$

где $F_k(t) = \frac{\sin\left(t\sqrt{p_k^2 - n_k^2}\right)}{\sqrt{p_k^2 - n_k^2}}$ при $p_k > n_k$ и $F_k(t) = \frac{\text{sh}\left(t\sqrt{n_k^2 - p_k^2}\right)}{\sqrt{n_k^2 - p_k^2}}$ при

$p_k < n_k$.

Заметим, что эти формулы позволяют вычислять прогибы балки без всяких ограничений на исходные данные.

С использованием изложенного в статье [3] подхода, несложно записать решение для трансформант $a_k(t)$ в случае привлечения уточненной модели (2) для описания вязкоупругих колебаний балки

$$a_k^L(s) = ((s^2 + s\beta_{1,k} + \beta_{0,k}) / (s^4 + \alpha_{3,k}s^3 + \alpha_{2,k}s^2 + \alpha_{1,k}s + \alpha_{0,k})) c_k, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_{0,k} &= \beta^2 + \chi^2 \lambda_k^2; \quad \beta_{1,k} = \beta^2 \varepsilon_2 + \chi^2 \varepsilon_1 \lambda_k^2; \quad \alpha_{0,k} = \alpha^2 \chi^2 \lambda_k^4; \\ \alpha_{1,k} &= \beta_{0,k} \alpha^2 \varepsilon_2 \lambda_k^2 + \alpha^2 \lambda_k^2 \beta_{1,k} - 2\alpha^2 \beta^2 \varepsilon_2 \lambda_k^2; \\ \alpha_{2,k} &= \beta_{1,k} \alpha^2 \varepsilon_2 \lambda_k^2 + \beta_{0,k} + \alpha^2 \lambda_k^2 (1 - \beta^2 \varepsilon_2^2); \quad \alpha_{3,k} = \alpha_{1,k} + \alpha^2 \varepsilon_2 \lambda_k^2. \end{aligned}$$

Переход в область изображений для (8) также может быть выполнен аналитически [3] –

$$a_k(t) = \sum_{j=1}^4 \frac{(\omega_{j,k}^2 + \beta_{1,k} \omega_{j,k} + \beta_{0,k}) e^{\omega_{j,k} t}}{4\omega_{j,k}^3 + 3\alpha_{3,k} \omega_{j,k}^2 + 2\alpha_{2,k} \omega_{j,k} + \alpha_{1,k}}. \quad (9)$$

Здесь $\omega_{j,k}$ – корни полинома знаменателя уравнения (8).

Располагая выражениями для $a_k(t)$ несложно на основании (4) вычислить прогибы балки в произвольной точке по ее длине, в том числе в точке $x = x_w$, при приложении единичной нагрузки в точке x_i . Эти перемещения $w(x_i, t)$ обозначим далее через $\hat{w}_i(t)$. Очевидно, что при приложении импульсной нагрузки $q(x, t) = q_0 \delta(t) \delta(x - x_i)$ перемещения в точке $x = x_w$ с использованием принятых обозначений будут равны $q_0 \hat{w}_i(t)$.

Таким образом, рассматриваемую в настоящей работе задачу идентификации и сформулированную в ее первом пункте можно трактовать как отыскание таких q_0 и x_i , при которых отклонение $q_0 \hat{w}_i(t)$ от $\tilde{w}(t)$ будет минимальным. Однако, ввиду того, что для современной практики как экспериментальных исследований, так и компьютерного моделирования, вместо непрерывных величин $\tilde{w}(t)$ и $\hat{w}(t)$, как правило, имеют место дискретные, представляющие собой массивы значений соответствующих функций для равноотстоящих точек с шагом Δt исследуемого временного интервала $(0; T)$, то q_0 и x_i должны минимизировать отклонения $\tilde{\mathbf{w}}$ от $q_0 \hat{\mathbf{w}}^{(i)}$. Здесь $\tilde{\mathbf{w}}$, $\hat{\mathbf{w}}^{(i)}$ – столбцовые матрицы с элементами $\tilde{\mathbf{w}}_m = \tilde{w}(m\Delta t)$, $\hat{\mathbf{w}}_m^{(i)} = \hat{w}_i(m\Delta t)$ ($m = \overline{1, M}$; $M = E(T/\Delta t)$, $E(x)$ – целая часть аргумента).

Процедура вычисления q_0 и x_i может быть построена на методе наименьших квадратов, когда эти величины принимаются такими, чтобы минимизировать квадратичную функцию $J(q_0, x_i)$:

$$J = \sum_{m=1}^M (\tilde{\mathbf{w}}_m - q_0 \hat{\mathbf{w}}_m^{(i)})^2 = \|\tilde{\mathbf{w}} - q_0 \hat{\mathbf{w}}_m^{(i)}\|_2^2.$$

Здесь $\|\mathbf{X}\|_2$ – евклидова норма матрицы-столбца \mathbf{X} .

Для отыскания искомого значения q_0 на первом этапе рассматривается задача $\min_{q_0} J$, которая эквивалентна решению уравнения $dJ/dq_0 = 0$. В результате несложных математических преобразований получим

$$q_0 = q_0(x_i) = \left(\sum_m \tilde{\mathbf{w}}_m \hat{\mathbf{w}}_m^{(i)} \right) / \left(\sum_m \hat{\mathbf{w}}_m^{(i)} \hat{\mathbf{w}}_m^{(i)} \right) = (\tilde{\mathbf{w}}^T \hat{\mathbf{w}}^{(i)}) / (\tilde{\mathbf{w}}^{(i)T} \hat{\mathbf{w}}^{(i)}). \quad (10)$$

Использование аналитических подходов для последующего восстановления значения x_i , минимизирующего функцию $J(q_0, x_i)$ при $q_0(x_i)$, определяемого равенством (10), достаточно затруднено. Поэтому поиск x_i осуществляется графически через построение графика J как функции x_i . Полученное значение x_i , соответствующее минимальному J , и будет представлять собой искомое x_p , а P_0 , определяющее внешнюю нагрузку $q(x, t) = P_0 \delta(t) \delta(x - x_p)$, равно $P_0 = q_0(x_p)$.

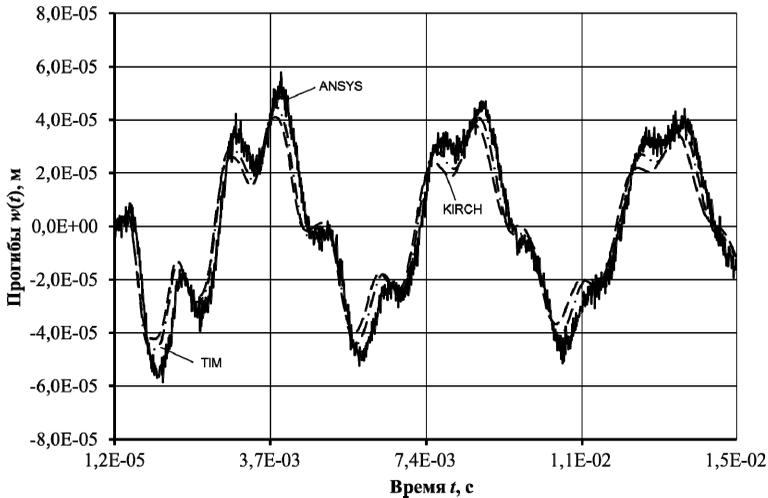


Рис. 2 – Прогиб балки $w(x_w, t)$.

Результат работы программы. Конкретные расчеты проводились для балки со следующими геометрическими параметрами и физическими характеристиками материала: $l = 0,47$ м; $b = 0,06$ м; $h = 0,02$ м; $\rho = 7890$ кг/м³; $E = 2,07 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu = 0,3$; $\eta = 10^6$ кг/м·с. Предполагалось, что идентификация импульсной нагрузки осуществляется по значениям прогибов балки $\tilde{w}(t)$ в точке $x_w = 3l/4$. При этом функция $\tilde{w}(t)$ была получена методом конечно-элементного моделирования колебаний балки, обусловленных приложением нагрузки $\bar{P}(t) = P_0 \sin(\pi t / t_{im}) H(t_{im} - t)$ в точке $x_p = l/4$, где $H(t)$ – единичная функция Хевисайда; $P_0 = 1.875$ кН, $t_{im} = 207.5$ мкс. На результат моделирования были наложены случайные числа с нулевым математическим ожиданием и амплитудой в 5% от максимального значения $\tilde{w}(t)$ на исследуемом временном интервале ($t \in [0; 3t_0]$; $3t_0 = 14.7325$ мс) для имитации ошибок измерения, передачи и обработки данных. Полученный результат моделирования как функция $\tilde{w}(t)$ изображен кривой 1 на рис. 2. Шаг по времени Δt принят равным $t_{im}/6$.

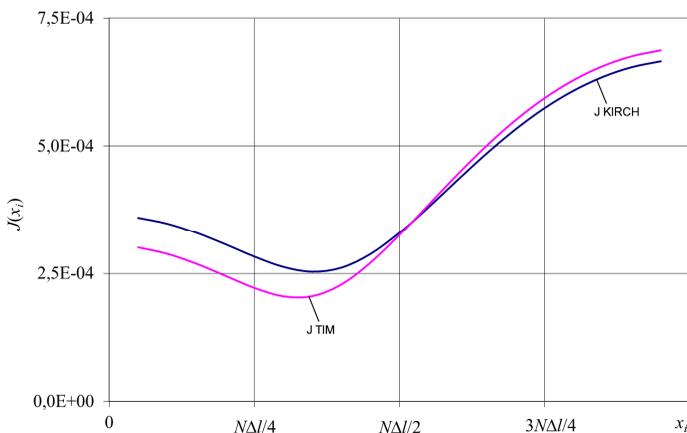


Рис. 3 – Функция $J(x_i)$.

На рис. 3 представлен график функции $J(x_i)$. Построение графика выполнено по конечному числу точек $x_i = i \cdot \Delta l$, где $i = \overline{1, N-1}$; $\Delta l = l/N$; $N = 20$. При этом кривая 1 соответствует случаю, когда коэффициенты $a_k(t)$, определяющие перемещения $w(x_w, t)$, вычислялись на основании (7) (модель Кирхгофа), а кривая 2 – на основании (9) (модель Тимошенко).

Очевидно, что для первой кривой минимальное значение функции J наблюдается при $x_i = x_7 = 7\Delta l$, а для второй – при $x_i = x_6 = 6\Delta l$. Следует отметить, что точное положение точки приложения нагрузки определяется координатой $x_p = x_5 = 5\Delta l = l/4$, то есть более точный результат восстановления значения x_p дает привлечение модели Тимошенко. Располагая значением x_i для обеих расчетных моделей, были вычислены значения $q_0 = q_0(x_i)$ в соответствии с (10). И если усредненное значение импульса действующей нагрузки составляет 0,24 Нс, то восстановленное в рамках модели Кирхгофа значение равно 0,19 Нс, а в рамках модели Тимошенко –0,21 Нс. Таким образом и в контексте восстановления амплитудного значения импульсной нагрузки P_0 расчетная модель Тимошенко дает лучший результат с погрешностью 15,2% против 22,5% для модели Кирхгофа.

Пересчитанные перемещения w в точке $x = x_1$ представлены на рис. 2, при этом кривая 2 соответствует модели Кирхгофа, кривая 3 – модели Тимошенко.

Следует отметить, что несогласованность кривых обусловлена не только неточностью описания рассмотренной нагрузки $\bar{P}(t)$ дельта-функцией Дирака, но и расхождением решений задач о колебаниях импульсно нагруженной балки методом конечных элементов и изложенным численно-аналити-

ческим.

К преимуществам изложенного метода по сравнению с изложенным в публикации [2] следует отнести простоту его реализации и меньшее количество вычислительных операций, обобщение подхода на случай уточненной модели балки, а также возможность его реализации для элементов конструкций более сложных геометрических форм.

Заключение. Работа представляет численно-аналитический подход к решению задачи идентификации импульсной сосредоточенной нагрузки, воздействующей на шарнирно закрепленную балку. Расчетные соотношения записаны на основании моделей Кирхгофа и Тимошенко с учетом диссипации энергии колебаний по Фойгту. Процедура идентификации построена через введение квадратичной целевой функции, определяющей ошибку между прогнозированной и измеренной величиной, по значениям которой осуществляется идентификация. Искомые значения координаты точки приложения нагрузки и ее амплитудное значение обеспечивают минимизацию данной функции. Выполненный численный эксперимент показал, что исследование в рамках модели Тимошенко дает более точные результаты идентификации по сравнению с моделью Кирхгофа. При этом погрешности восстановления положения точки приложения импульсной нагрузки и ее амплитуды составили 5%/15,2% (модель Тимошенко). Следует отметить, что исходные данные к задаче были получены *методом конечных элементов*.

Изложенный в настоящей работе подход, может быть использован для других вариантов закрепления балки или обобщен на случай конструктивных элементов других форм.

Список литературы: 1. Янютин Е.Г., Егоров П.А. Идентификация параметров нестационарно колеблющейся системы «балка-масса» // Вісник НТУ «ХПІ». – 2013. – №54 (1027). – С. 207 – 213. 2. Wang B.-T., Chiu Ch.-H. Determination of unknown impact force acting on a simply supported beam // *Mechanical Systems and Signal Processing*. – 2003. – Vol. 17, Iss. 3. – P. 683 – 704. 3. Янютин Е.Г., Гришакин В.Т. Идентификация подвижной нагрузки для вязко-упругих балок // Вестник НТУ «ХПІ». – 2008. – №47. – С. 178 – 184. 4. H. Inoue. Inverse analysis of the magnitude and direction of impact force. / H. Inoue, N. Ikeda, K. Kishimoto, T. Shibuya, T. Koizumi // *JSMIE International Journal Series A* 38. – 1995. – P. 84 – 91. 5. J. Zhu. A time domain method for identifying dynamic loads on continuous system. / J. Zhu, Z. Lu // *Journal of Sound and Vibration* 148. – 1991. – P. 137 – 146. 6. D. M. Liu. A new non-contact technique to identify impact force of beam structure (in Chinese) / D. M. Liu, C. Z. Tsai and E. Wu // *Proceedings of 14th national Conference of the Chinese Society of Mechanical Engineers*, Taoguan, Taiwan. – 1997. – P. 347 – 354. 7. K. Choi. Identification of impact force and location using distributed sensors. / K. Choi, F. K. Chang // *AIAA Journal* 34. – 1996. – P. 136 – 142.

Bibliography (transliterated): 1. Janjutin, E. G., and P. A. Egorov. "Identifikacija parametrov nestacionarno kolebljuhshejsja sistemy «balka-massa»." // *Visnyk NTU «HPI»*. Ser.: *Matematychnje modeljuvannja v tehnici ta tehnologijach*. No. 54 (1027). 2013. 207–213. Print. 2. Wang, B.-T., and Ch.-H. Chiu. "Determination of unknown impact force acting on a simply supported beam." *Mechanical Systems and Signal Processing*. Vol. 17, Iss. 3. 2003. 683–704. Print. 3. Janjutin, E. G., and V. T. Grishakin. "Identifikacija podvizhnoj nagruzki dlja vjazko-uprugih balok." *Vestnyk NTU «HPI»*. No. 47. 2008. 178–184. Print. 4. Inoue, H., et al. "Inverse analysis of the magnitude and direction of impact force." *JSMIE International Journal Series A* 38. 1995. 84–91. Print. 5. Zhu, J., and Z. Lu. "A time domain method for identifying dynamic loads on continuous system." *Journal of Sound and Vibration*. No. 148. 1991. 137–146. Print. 6. Liu, D. M., C. Z. Tsai and E. Wu. "A new non-contact technique to

identify impact force of beam structure (in Chinese)." *Proceedings of 14th national Conference of the Chinese Society of Mechanical Engineers*. Taoguan, Taiwan. 1997. 347–354. Print. 7. Choi, K., and F. K. Chang. "Identification of impact force and location using distributed sensors." *AIJA Journal*. No. 34. 1996. 136–142. Print.

Поступила (received) 27.02.2015

УДК 621.43.068.4

А.Н. КОНДРАТЕНКО, канд. техн. наук, ст. преп., НУГЗУ, Харьков

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ФИЛЬТРА ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ ДИЗЕЛЯ. ЧАСТЬ 3: КОМПОНОВОЧНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ

Приведена и описана математическая модель гидравлического сопротивления ФТЧ в реальных условиях эксплуатации. Модель построена на основе расходной характеристики одного модуля ФТЧ, экспериментально полученной при постоянной температуре текучей среды, и данных стендовых испытаний автотракторного дизеля 2Ч10,5/12, оснащенного полноразмерным ФТЧ. Модель позволяет учесть ряд факторов, характеризующих условия эксплуатации ФТЧ в составе выпускной системы этого дизеля. Учет этих факторов производится путем введения соответствующих коэффициентов. В данной части работы описан физический смысл и оценены значения компоновочного коэффициента модели, позволяющего учесть размещение ФТЧ по длине выпускного тракта дизеля, влияющего на максимальную температуру отработавших газов на входе в ФТЧ.

Ключевые слова: дизель, фильтр твердых частиц, гидравлическое сопротивление, математическая модель.

Введение. С 1 января 2011 г. на территории Украины введены в действие нормы токсичности стандартов Правил ЕЭК ООН №№ 49 и 96 уровня EURO III [1, 2]. В связи с этим научно-исследовательские работы, направленные на создание принципиально новых и совершенствование известных конструкций *фильтров твердых частиц* (ФТЧ), являются актуальными и экономически обоснованными.

Анализ литературных источников. В отделе *поршневых энергоустановок* (ПЭУ) *Института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины* (ИПМаш НАНУ) разработан *фильтрующий элемент* (ФЭ) для ФТЧ новой конструкции, описанный в первой части исследования [3].

Выполнено физическое моделирование процесса движения *текучей среды* (ТС) в различных вариантах конструкции модуля разработанного ФТЧ на *безмоторной исследовательской установке* (БИУ). Экспериментальный образец – *прозрачный макет модуля* (ПММ) ФЭ, его особенности проведения моделирования описаны в Части 1 данного исследования [3]. В результате получены расходные характеристики ПММ ФЭ при неизменной температуре ТС t_{TC} – *изотермы зависимостей гидравлического сопротивления* (ГС) модуля ФЭ от потока ТС (для БИУ – воздуха) g_m в кг/(с·м²).