

А. В. ВОРОПАЙ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЯЗКОЙ И УПРУГОЙ СОСТАВЛЯЮЩИХ В РЕАКЦИИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ОПОРЫ, КОНТАКТИРУЮЩЕЙ С ПЛАСТИНОЙ

Механічна система складається з прямокутної ізотропної пластини середньої товщини, шарнірно-опёртої по контуру, та додаткової зосередженої в'язкопружної опори. На пластину діє нестационарне навантаження, що збуває коливання. Вплив в'язкопружної опори моделюється додатковою нестационарною силою, що діє замість опори. Запропоновано метод розділення реакції в'язкопружної опори на в'язку та пружну складові. Дослідження зводяться до аналізу системи інтегральних рівнянь Вольтерра, які розв'язуються чисельно з використанням методу регуляризації А. М. Тихонова. Наведено приклад розрахунку прогину пластини з додатковою в'язкопружною опорою, а також наведені в'язка, пружна та повна реакція між пластиною та додатковою опорою.

Ключові слова: пластина середньої товщини, ідентифікація, нестационарне навантаження, в'язкопружна опора, система інтегральних рівнянь Вольтерра, регуляризуючий алгоритм А. М. Тихонова.

Механическая система состоит из прямоугольной изотропной пластины средней толщины, шарнирно-опёртой по контуру, и дополнительной сосредоточенной вязкоупругой опоры. На пластину воздействует нестационарное нагружение, вызывающее колебания. Влияние вязкоупругой опоры моделируется дополнительной нестационарной сосредоточенной силой действующей вместо опоры. Предложен метод разделения реакции вязкоупругой опоры на вязкую и упругую составляющие. Исследования сводятся к анализу системы интегральных уравнений Вольтерра, которые решаются численно с использованием метода регуляризации А. Н. Тихонова. Приведен пример расчета прогиба пластины с дополнительной вязкоупругой опорой, а также показаны вязкая, упругая и полная реакция между пластиной и дополнительной опорой.

Ключевые слова: пластина средней толщины, идентификация, нестационарное нагружение, вязкоупругая опора, система интегральных уравнений Вольтерра, регуляризующий алгоритм А. Н. Тихонова.

The mechanical system consists of a hingedly supported medium-thickness rectangular plate with an additional concentrated viscoelastic support. The nonstationary concentrated transversal load, which initiates vibration, is acting on the plate. The effect of the viscoelastic support is simulated by an additional nonstationary concentrated force acting instead of the support. The method of separating the viscoelastic support reaction into viscous and elastic components is proposed. The simulation of the plate deforming is based on Timoshenko's refined theory. The researches are reduced to a system of Volterra integral equations. Solving of such Volterra integral equations is an ill-posed problem, which is solved numerically using of Tikhonov's regularization algorithm. A stable analytical and numerical solution of the ill-posed problems for the considered mechanical system is obtained without using iterative computational schemes. The results of numerical calculation for the direct and inverse problems are presented. A computation example of the deflection of a plate with an additional viscoelastic support is given. The viscous, elastic and full reactions between the plate and the additional support vs. time are also demonstrated.

Key words: medium-thickness plate, identification, nonstationary loading, viscoelastic support, system of Volterra integral equation, Tikhonov's regularization algorithm.

Введение и постановка задачи. Данная статья является продолжением исследования нестационарного деформирования механической системы, состоящей из прямоугольной пластины средней толщины, шарнирно-опёртой по контуру, и дополнительной сосредоточенной вязкоупругой опоры при импульсном воздействии. В предыдущей работе [1] приведены возможные постановки обратных задач для пластины с дополнительной опорой, а также описано решение одной обратной задачи идентификации неизвестной нагрузки, вызывающей нестационарное деформирование пластины с дополнительной опорой.

В случае, когда при решении задачи приоритетом является определение внешнего возмущающего воздействия во времени $P(t)$, методика, описанная в предыдущей работе, демонстрирует достаточно высокую эффективность. В указанных задачах (рис. 1) влияние вязкоупругой опоры, заменялось одной реакцией:

$$R(t) = c \cdot w(x_C, y_C, t) + \kappa \cdot dw(x_C, y_C, t) / dt, \quad (1)$$

что позволяло определить ее в результате решения соответствующей прямой или обратной задачи.

Однако для задач, связанных с идентификацией параметров вязкоупругой опоры (жесткости и вязкости), или при оптимальном проектировании дополнительных опор, снижающих амплитуды прогибов, определения полной реакции недостаточно. Необходимо отдельно знать влияние вязкой и упругой составляющей реакции. В этом случае целесообразно рассмотреть задачу в следующей постановке: пусть прямоугольная пластина имеет две независимые дополнительные опоры – вязкую (демпфирующую) и линейно упругую, которые приложены в двух разных точках (рис. 2). Считается, что точка D с координатами проекции в срединной плоскости пластины (x_D, y_D) – это место контакта с демпфером, действие которого заменяется реакцией $R_D(t) = \kappa \cdot dw(x_D, y_D, t) / dt$, а точка C с координатами (x_C, y_C) – место контакта с линейно упругой дополнительной опорой (своего рода жесткой пружиной), реакция которой $R_C(t) = c \cdot w(x_C, y_C, t)$. В общем случае предполагается, что точки C и D не совпадают, хотя с точки зрения механики, если точки расположены на небольшом расстоянии, то в силу принципа суперпозиции совместное воздействие вязкой и линейно упругой опор эквивалентно действию вязкоупругой опоры $R(t) = R_D(t) + R_C(t)$. Такое решение задачи оказалось справедливо и в частном случае, когда точки C и D совпадают, поскольку разрешающая система уравнений в прямой и обратной задачах получилась не вырожденной.

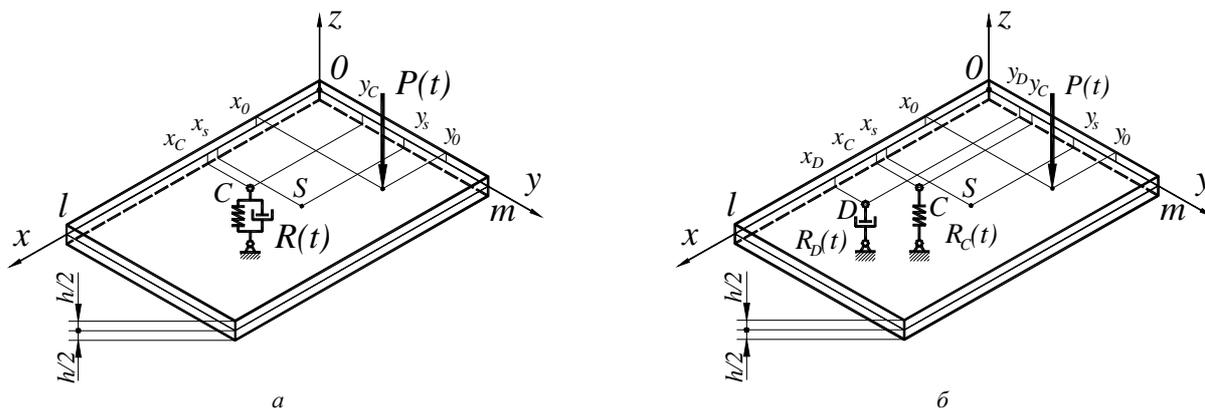


Рис. 1 – Схема нагружения: а – пластина с дополнительной вязкоупругой опорой; б – пластина с двумя дополнительными независимыми опорами.

Прямая задача. Выражение для прогиба пластины в случае, когда на неё действует несколько независимых поперечных нагрузок ($P_i(t)$, $i \in \overline{1, N}$), приведенное, например в [2], имеет следующий вид:

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^N \int_0^t K_i(x, y, t - \tau) \cdot P_i(\tau) d\tau, \tag{2}$$

где $w(x, y, t)$ – изменение прогиба пластины во времени; $K_i(x, y, t)$ – разностное ядро интегрального уравнения, типа свертки, для i -той нагрузки в точке пластины с координатами (x, y) . Методы получения ядер и их вид также описаны в [2].

На основе (2) можно записать следующие выражения для точек контакта с демпфером (x_D, y_D) и линейно упругой дополнительной опорой (x_C, y_C) :

$$\begin{cases} w(x_C, y_C, t) = \int_0^t K_{PC}(t - \tau) \cdot P(\tau) d\tau - \int_0^t K_{CC}(t - \tau) \cdot R_C(\tau) d\tau - \int_0^t K_{DC}(t - \tau) \cdot R_D(\tau) d\tau; \\ w(x_D, y_D, t) = \int_0^t K_{PD}(t - \tau) \cdot P(\tau) d\tau - \int_0^t K_{CD}(t - \tau) \cdot R_C(\tau) d\tau - \int_0^t K_{DD}(t - \tau) \cdot R_D(\tau) d\tau, \end{cases} \tag{3}$$

где $P(t)$ – внешняя возмущающая нестационарная нагрузка; $K_{ij}(t)$ – ядра, записанные для конкретной i -той нагрузки в j -той точке, вид которых будет приведен ниже; $R_C(t)$ и $R_D(t)$ – соответствующие реакции в точках контакта с демпфером и линейно упругой опорой.

Укажем, что реакции $R_C(t)$ и $R_D(t)$, действующие со стороны дополнительных опор на пластину, считались условно отрицательными (взяты в выражениях (3) со знаком минус), действия со стороны пластины на демпфер и «пружины» считались равными по величине, но условно положительными (для удобства записи):

$$R_D(t) = +\kappa \cdot dw(x_D, y_D, t) / dt \text{ и } R_C(t) = +c \cdot w(x_C, y_C, t). \tag{4}$$

Из соотношений (4) для прогибов в точках (x_D, y_D) и (x_C, y_C) можно получить следующие выражения:

$$w(x_D, y_D, t) = \int_0^t \frac{R_D(\tau)}{\kappa} d\tau \text{ и } w(x_C, y_C, t) = \frac{R_C(t)}{c}. \tag{5}$$

Если считать, что возмущающая сила, а также реакции дополнительных опор являются сосредоточенными нагрузками, то соответствующие ядра $K_{ij}(t)$ в интегралах свертки для шарнирно-опертой пластины средней толщины типа С. П. Тимошенко будут иметь вид:

$$K_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\Omega_{1kn} \cdot \sin \omega_{1kn}(t) - \Omega_{2kn} \cdot \sin \omega_{2kn}(t)] \cdot \sin\left(\frac{k\pi x_i}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y_i}{m}\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi x_j}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y_j}{m}\right), \tag{6}$$

где ω_{1kn} и ω_{2kn} – собственные частоты колебаний пластины; l и m – длина и ширина пластины; (x_i, y_i) – координаты точки, в которой прикладывается i -тая нагрузка, а (x_j, y_j) – это координаты j -той точки, в которой определяется изменение прогиба во времени.

В случае, когда $P(t)$ известна, систему интегральных уравнений (3) относительно неизвестных сил $R_C(t)$ и

$R_D(t)$ можно дополнить выражениями в точках контакта (5). Исключим из уравнений прогибы и перенесем известные слагаемые в правую часть:

$$\begin{cases} \int_0^t K_{CC}(t-\tau) \cdot R_C(\tau) d\tau + \frac{R_C(t)}{c} + \int_0^t K_{DC}(t-\tau) \cdot R_D(\tau) d\tau = \int_0^t K_{PC}(t-\tau) \cdot P(\tau) d\tau; \\ \int_0^t K_{CD}(t-\tau) \cdot R_C(\tau) d\tau + \int_0^t K_{DD}(t-\tau) \cdot R_D(\tau) d\tau + \int_0^t \frac{R_D(\tau)}{\kappa} d\tau = \int_0^t K_{PD}(t-\tau) \cdot P(\tau) d\tau. \end{cases} \quad (7)$$

Для решения системы интегральных уравнений (7) была выполнена дискретизация методом частичного интегрирования. То есть на малых дискретных участках времени ($\Delta t = T / J$, где T – исследуемый промежуток, а J – число шагов дискретизации) сила $P(t) = P(j \cdot \Delta t) = P_j$, а также реакции $R_C(j \cdot \Delta t)$ и $R_D(j \cdot \Delta t)$ считались постоянными. В результате получена следующая система матричных уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{CC} \cdot \mathbf{R}_C + \mathbf{A}_{DC} \cdot \mathbf{R}_D = \mathbf{A}_{PC} \cdot \mathbf{P}; \\ \mathbf{A}_{CD} \cdot \mathbf{R}_C + \mathbf{A}_{DD} \cdot \mathbf{R}_D = \mathbf{A}_{PD} \cdot \mathbf{P}, \end{cases} \quad (8)$$

где матрицы \mathbf{A}_{PC} , \mathbf{A}_{PD} соответствуют частично проинтегрированным ядрам $K_{PC}(t-\tau)$ и $K_{PD}(t-\tau)$, элементы которых могут быть найдены в виде $a_{ji} = K^*[(j-i)\Delta t]$, как значения дискретно проинтегрированного ядра

$$K^*[i\Delta t] = \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} K(\tau) d\tau.$$

Матрицы \mathbf{A}_{DC} , \mathbf{A}_{CD} и \mathbf{A}_{CC}^* соответствуют частично проинтегрированным ядрам $K_{DC}(t-\tau)$, $K_{CD}(t-\tau)$ и $K_{CC}(t-\tau)$, матрица \mathbf{A}_{CC} эквивалентна выражению: $\mathbf{A}_{CC} = \mathbf{A}_{CC}^* + \frac{1}{c} \mathbf{E}$, а \mathbf{E} – единичная матрица.

Произведение $\mathbf{A}_{DD} \cdot \mathbf{R}_D$ соответствует интегралу:

$$\int_0^t \left[K_{DD}(t-\tau) + \frac{1}{\kappa} \right] \cdot R_D(\tau) d\tau.$$

Система (8) решается с использованием *обобщенного алгоритма Крамера* для блочных матриц и *регуляризирующего алгоритма А. Н. Тихонова* [3]. В результате решения (8) определяются \mathbf{R}_C и \mathbf{R}_D , являющиеся дискретными аналогами неизвестных независимых реакций $R_C(t)$ и $R_D(t)$.

Обратная задача. Возможно несколько вариантов постановки обратной нестационарной задачи. Рассмотрим основные варианты.

- Точки приложения нагрузки и установки дополнительных опор известны, а также известны коэффициент жесткости и коэффициент демпфирования, требуется определить внешнюю возмущающую сила $P(t)$ и, как следствие, $R_C(t)$ и $R_D(t)$ (которые также неизвестны). Для идентификации требуется знать (измерить) изменение прогиба $w(x_S, y_S, t)$ или деформации (например, $\varepsilon_x(x_S, y_S, t)$) в одной произвольной точке пластины.

- Внешняя возмущающая сила $P(t)$ известна, требуется определить неизвестные параметры дополнительной вязко-упругой опоры. Для идентификации требуется знать (измерить) изменение прогиба или деформации в двух произвольных точках пластины.

- Неизвестна как внешняя возмущающая сила $P(t)$ так и параметры дополнительной вязко-упругой опоры (коэффициент жесткости и коэффициент демпфирования) Для идентификации требуется знать (измерить) изменение прогиба или деформации минимум в трех произвольных точках пластины.

В данной статье рассмотрим решение обратной задачи в первой постановке.

Предположим, что нам известно изменение во времени прогиба в некоторой точке пластины, а именно, $w(x_S, y_S, t) = w_S(t)$, тогда, по аналогии с (2), для точки S можно записать:

$$w(x_S, y_S, t) = \int_0^t K_{PS}(t-\tau) \cdot P(\tau) d\tau + \int_0^t K_{CS}(t-\tau) \cdot R_C(\tau) d\tau + \int_0^t K_{DS}(t-\tau) \cdot R_D(\tau) d\tau. \quad (9)$$

Причем в выражении (9) слагаемые, содержащие значения $R_C(t)$ и $R_D(t)$, записаны со знаком плюс, поскольку при решении обратной задачи реакции $R_C(t)$ и $R_D(t)$ рассматриваются как дополнительные внешние

независимые силы, которые могут принимать положительные или отрицательные значения.

В матричной форме выражение (9) запишется так:

$$\mathbf{A}_{PS} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{A}_{CS} \cdot \mathbf{R}_C + \mathbf{A}_{DS} \cdot \mathbf{R}_D = \mathbf{w}_S, \quad (10)$$

где вектор \mathbf{w}_S соответствует дискретным значениям функции $w(x_S, y_S, t) = w_S(t)$ (что как раз имеет место при реальных измерениях), остальные обозначения аналогичны использованным в (8). По сути, выражение (10) является матричным уравнением с тремя неизвестными векторами \mathbf{P} , \mathbf{R}_C и \mathbf{R}_D . Для его решения достаточно иметь ещё два матричных уравнения, которые могут быть получены из (8) путем переноса всех неизвестных в левую часть и изменения знаков перед слагаемыми, содержащими \mathbf{R}_C и \mathbf{R}_D , на положительные.

Для удобства записи и решения системы трёх матричных уравнений целесообразно переобозначить искомые векторы нагрузок \mathbf{P} , \mathbf{R}_C и \mathbf{R}_D как \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 и \mathbf{p}_3 , соответственно, тогда матрицы \mathbf{A}_{ji} будут вместо буквенных индексов иметь привычные численные, а именно – строка будет соответствовать точке пластины, а столбец – нагрузке:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Система (11) решается аналогично системе (8) с использованием обобщенного алгоритма Крамера и регуляризирующего алгоритма Тихонова. В результате решения (11) определяются \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 и \mathbf{p}_3 , то есть дискретные аналоги неизвестных сил $P(t)$, $R_C(t)$ и $R_D(t)$. Для удобства исследования положительные направления сил совпадают с положительными направлениями прогибов, а отрицательные значения соответствуют противоположному направлению.

Результаты расчетов. При расчетах срединная плоскость пластины была связана с плоскостью xOy декартовой системы координат. Расчеты производились при следующих значениях параметров: $\rho = 7890 \text{ кг/м}^3$; $\nu = 0.3$; $E = 2.07 \cdot 10^{11} \text{ Па}$; $h = 0.04 \text{ м}$; $l = 0.6 \text{ м}$; $m = 0.4 \text{ м}$. Координаты точки приложения возмущающей нагрузки имеют значения: $x_0 = 0.4 \text{ м}$, $y_0 = 0.2 \text{ м}$. Координаты точки крепления дополнительной вязкоупругой опоры к пластине: $x_{CD} = 0.2 \text{ м}$, $y_{CD} = 0.2 \text{ м}$. Значение коэффициента жесткости дополнительной опоры $c = 10^8 \text{ Н/м}$, а коэффициент линейно-вязкого демпфирования $\kappa = 4 \cdot 10^4 \text{ Н/(м/с)}$; число членов в соответствующих двойных рядах Фурье 50×50 .

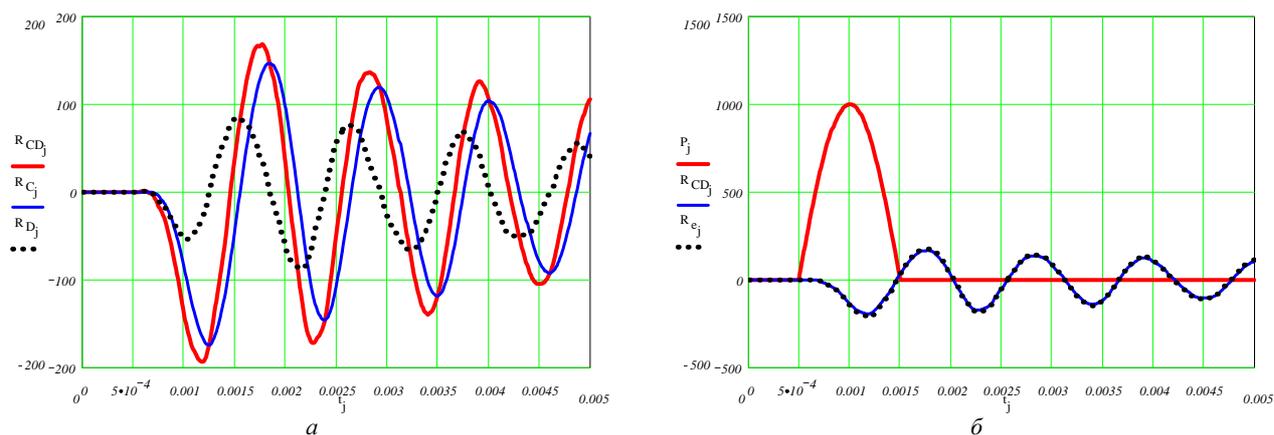


Рис. 2 – Реакция вязкоупругой опоры: а – составляющие реакции; б – реакции вязкоупругой опоры, найденные двумя разными методами.

При решении прямой задачи рассматривалось два случая. Поскольку точки контакта пластины с «вязкой» и «упругой» дополнительными опорами в общей постановке являются независимыми, то в первом случае считалось, что они совпадают (частный случай $x_C = x_D = x_{CD} = 0.2 \text{ м}$, $y_C = y_D = y_{CD} = 0.2 \text{ м}$), а во втором случае считалось, что они располагались на некотором расстоянии, когда их суммарное влияние еще подобно влиянию одной вязкоупругой опоры ($x_C = 0.15 \text{ м}$, $y_C = 0.15 \text{ м}$ и $x_D = 0.25 \text{ м}$, $y_D = 0.25 \text{ м}$).

На рис. 2 показаны результаты вычислений для первого случая. Определенные в результате решения сис-

темы уравнений (8) составляющие реакции между пластиной и дополнительной вязкоупругой опорой приведены на рис. 2, а: 1-я кривая соответствует суммарной реакции вязкоупругой опоры $R_{CD}(t) = R_C(t) + R_D(t)$; 2-я кривая – упругая составляющая вязкоупругой опоры $R_C(t)$; 3-я кривая – вязкая составляющая $R_D(t)$. На рис. 2, б показано изменение во времени возмущающей нагрузки $P(t)$ (полуволна синусоиды) и две кривые, соответствующие реакции вязкоупругой опоры $R_{CD}(t)$ и $R_e(t)$. Укажем, что $R_{CD}(t)$, то есть суммарная реакция, показана сплошной линией, а $R_e(t) = R(t)$ – это реакция именно вязкоупругой опоры (1), определение которой описано в [1], на рис. 2, б отложена точками, причем видно, что эти две кривые полностью совпадают. Совпадение кривых доказывает правильность решения и возможность использования любого из двух методов для определения реакции вязкоупругой опоры.

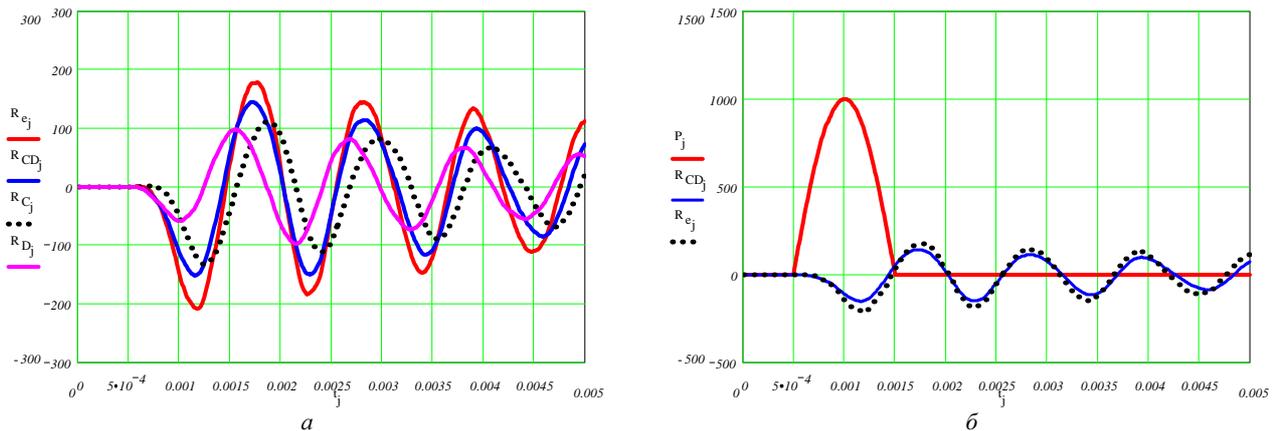


Рис. 3 – Реакции дополнительных вязкого и упругого контакта опор, а также вязкоупругой опоры: а – составляющие реакции; б – реакция вязкоупругой опоры и суммарная реакция контактов опор.

На рис. 3 показаны результаты вычислений для второго случая. Здесь точки опоры выбирались на небольшом расстоянии – точка контакта вязкоупругой опоры полагалась в центре небольшой окружности с радиусом $5\sqrt{2}$ см (примерно 1/10 величины пластины), а точки контакта «вязкой» и «упругой» опор располагались на концах диаметра этой окружности. Рассматривался случай, когда две дополнительные опоры моделируют одну вязкоупругую, и их суммарное действие ещё подобно, но уже заметно и отличие суммарной реакции от реакции вязкоупругой опоры. Кривые рис. 3, в основном, аналогичны описанным выше для рис. 2. Укажем лишь на некоторые отличия:

- на рис. 3, а на одну кривую больше, поскольку дополнительно показана реакция вязкоупругой опоры;
- на рис. 3, б реакция одной дополнительной вязкоупругой опоры и суммарная реакция (совместное действие вязкой и упругой опор) не совпадают, причем максимальные значения реакции вязкоупругой опоры примерно на треть выше, чем величины суммарной реакции.

Такое увеличение объясняется, по-видимому, тем, что двойная опора оказывает некоторое сглаживающее и усредняющее действие (причем, как с математической, так и с физической точек зрения).

Вычисления при решении обратной задачи выполнялись только для первого случая, то есть решалась задача идентификации неизвестного нестационарного нагружения, действовавшего на пластину, и распределения неизвестных вязкой и упругой составляющих дополнительной вязкоупругой опоры, присоединенной к шарнирно-опертой пластине в некоторой ее точке.

На рис. 4, а показаны исходные данные для решения задачи идентификации: изменения прогиба в некоторой точке пластины (полученные при решении прямой задачи) – гладкая кривая, а также *зашумленные значения* прогиба. Укажем, что для моделирования случайных погрешностей, возникающих при экспериментальном измерении прогибов или деформаций в точках пластины, принималось *нормальное распределение зашумления* со среднеквадратичным отклонением, равным 10%.

На рис. 4 б и рис. 4 в сплошными линиями показаны возмущающая нагрузка и составляющие вязкоупругой опоры, полученные при решении прямой задачи, а точками представлены идентифицированные значения сил $P(t)$, $R_C(t)$ и $R_D(t)$, найденные в результате численно-аналитического решения матричной системы (11). Рис. 4, б соответствует идентификации изменения во времени нестационарных нагрузок по незашумленным исходным данным, а рис. 4, в – по зашумленным.

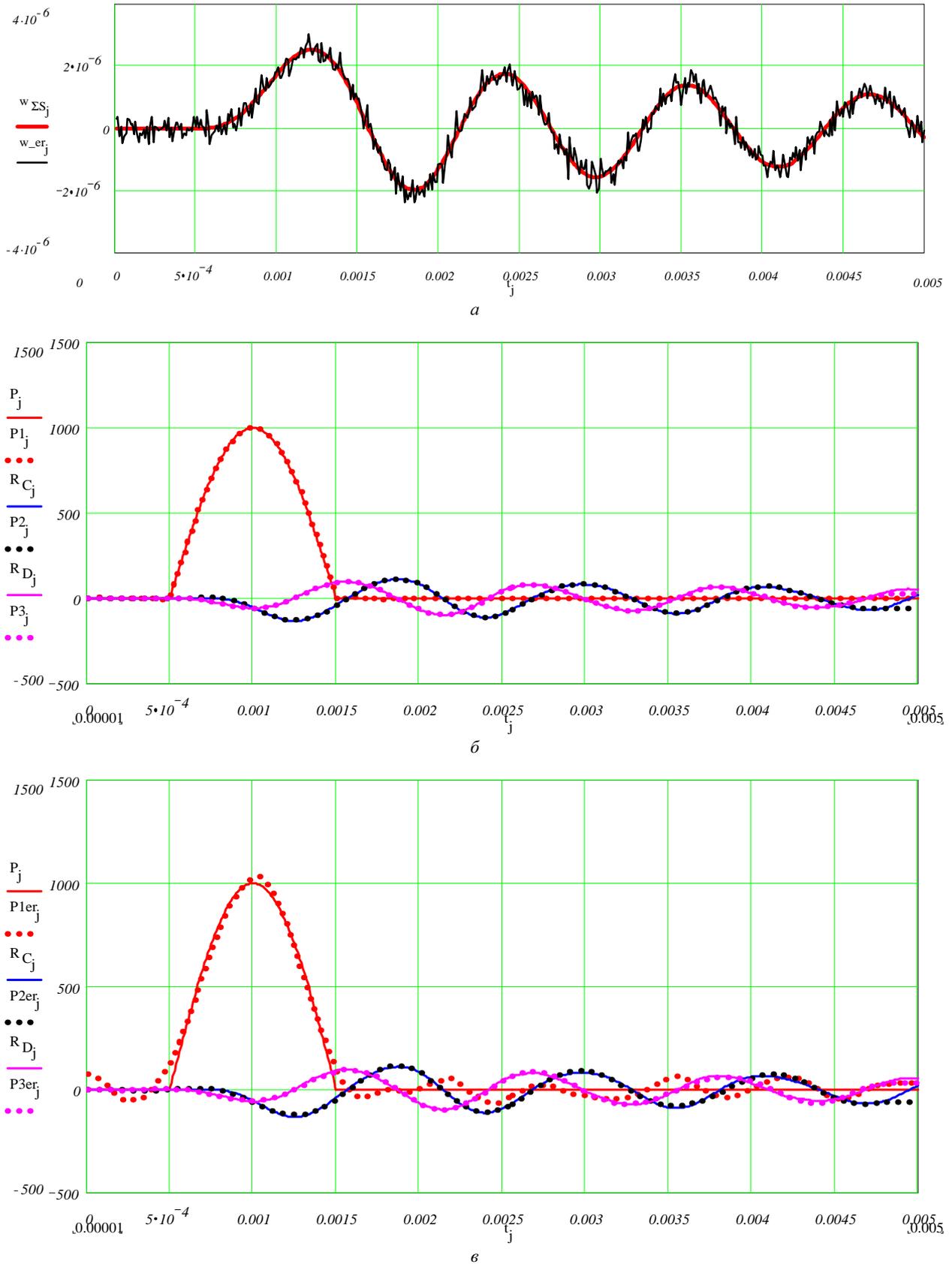


Рис. 4 – Вычисления по обратной задаче для первого случая: *а* – исходные данные для идентификации; *б* – идентифицированные силы по незашумленным исходным данным; *в* – идентифицированные силы по зашумленным исходным данным (внешняя и две составляющих реакции).

Графики на рис. 4, б демонстрируют практически полное соответствие идентифицированных нагрузок аналогичным величинам из прямой задачи. Исключение составляет промежуток в самом конце исследуемого ин-

Вісник НТУ «ХПІ». 2016. № 16 (1188)

тервала времени, где наблюдаются небольшие отклонения, вызванные, по-видимому, накоплением погрешностей вычислений при численно-аналитическом решении системы (11). На рис. 4, в можно наблюдать, что удовлетворительные результаты при решении задачи идентификации могут быть получены даже при значительном зашумлении исходных данных, и описанная методика может успешно применяться при обработке экспериментальных данных для косвенного измерения нестационарных возмущающих нагрузок и реакций вязких и упругих опор.

Выводы. В работе описан оригинальный подход, при котором воздействие дополнительной вязкоупругой опоры на пластину моделируется в виде двух неизвестных независимых нестационарных сил – вязкой и упругой составляющих реакции между пластиной и дополнительной опорой. Неизвестные нестационарные нагрузки определяются из решения системы интегральных уравнений Вольтерра. На основе предложенного подхода при моделировании нестационарного деформирования пластинчатых элементов конструкций с дополнительными опорами имеется возможность получать устойчивые аналитико-численные решения задач механики деформируемого твердого тела без использования итерационных схем.

Описана методика решения прямой и обратной задачи идентификации неизвестной нагрузки, вызывающей нестационарное деформирование пластины с дополнительной вязкоупругой опорой, позволяющая получать устойчивые аналитико-численные решения.

Список литературы

1. Воронай А. В. Обратная задача при нестационарном деформировании прямоугольной пластины с дополнительной вязкоупругой опорой // Вестник национального технического университета "ХПИ". Серия : Динамика и прочность машин. – Х. : НТУ «ХПИ». – 2015. – № 57 (1166). – С. 25 – 29.
2. Воронай А. В., Янютин Е. Г. Идентификация нескольких импульсных нагрузок, воздействующих на пластину // Прикл. Механика. – 2007. – 43. – №7. – С. 90 – 97.
3. Тихонов А. Н., Гончаровский А. В. и др. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М. : Наука // Главная редакция физико-математической литературы, 1983. 200 с.

References (transliterated)

1. Voropay A. V. Obratnaya zadacha pri nestatsionarnom deformirovanii pryamougol'noy plastiny s dopolnitel'noy vyzkouprugoy oporoy [Inverse problem for nonstationary deforming of rectangular plate with additional viscoelastic support]. *Vestnik natsional'nogo tekhnicheskogo universiteta "KhPI". Seriya: Dinamika i prochnost' mashin* [Bulletin of National Technical University «KhPI». Series: Dynamics and strength of machines]. Kharkov, NTU «KhPI» Publ., 2015, no. 57 (1166), pp. 25–29.
2. Voropay A. V., Janyutin E. G. Identifikatsiya neskol'kikh impul'snykh nagruzok, vozdeystvuyushhikh na plastinu [Identification of several pulse loads acting on a plate]. *Prikl. Mekhanika* [Applied Mechanics]. 2007, vol. 43, no. 7, pp. 90–97.
3. Tikhonov A. N., Goncharovskiy A. V. et al. *Regulyariziruyushhie algoritmy i apriornaya informatsiya* [Regularization algorithms and a priori information]. Moscow, Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury Publ., 1983. 200 p.

Поступила (received) 08.06.2016

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Розподілення в'язкої і пружної складових в реакції додаткової в'язкопружної опори, що контактує з пластиною / О. В. Воронай // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 16 (1188). – С. 16 – 22. Бібліогр.: 3 назви. – ISSN 2222-0631.

Распределение вязкой и упругой составляющих в реакции дополнительной вязкоупругой опоры, контактирующей с пластиной / А. В. Воронай // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 16 (1188). – С. 16 – 22. Бібліогр.: 3 назви. – ISSN 2222-0631.

Distribution of viscous and elastic components in the reaction of an additional viscoelastic support contacting a plate / A. V. Voropay // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2016. – № 16 (1188). – pp. 16 – 22. Bibliog.: 3 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Воронай Олексій Валерійович – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay@mail.ru.

Воронай Алексей Валериевич – кандидат технических наук, доцент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay@mail.ru.

Voropay Alexey Valerievich – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, National Technical University "Kharkov Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay@mail.ru.