рвно диференційованих за кожною змінною функцій. При цьому коефіцієнти Фур'є обчислюються за допомогою проекцій, що надходять з комп'ютерного томографа.

Список літератури: **1.** *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 2. – М. : Наука, 1974. – 655 с. **2.** *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. – М. : Наука, 1966, – 656 с. **3.** *Литвин О. М., Першина Ю. І.* Наближення розривної функції за допомогою розривних сплайнів // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський, 2010. – Вип. 3. – С. 122 – 131. **4.** *Литвин О. Н., Першина Ю. І., Сергиенко И. В.* Восстановление разрывных функций двух переменных, когда линии разрыва неизвестны (прямоугольные элементы) // Кибернетика и системный анализ. – № 4. – 2014. – С. 126 – 134. **5.** *Литвин О. М., Литвин О. Г.* Реконструкція зображень з використанням скінченних сум Фур'є та Фейєра // Тези конфер. ІСН. – 2016, ПУЕТ, Полтава 10 – 11.03.2016. **6.** *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – К. : Наукова думка, 2002. – 544 с.

References: **1.** Smirnov, V. I. *Kurs vyisshey matematiki. T. 2.* [Course in Higher Mathematics. Vol. 2]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 655 p. **2.** Fihtengol'ts, G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. T. 3.* [Course in differential and integral calculus. Vol. 3]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 656 p. **3.** Litvin, O. M. and Pershina, Yu. I. Nablyzhennya rozryvnoyi funktsiyi za dopomogoyu rozryvnyh splayniv [Approximating discontinuous functions by discontinuous splines]. *Matematychne ta komp"yuterne modelyuvannya. Seriya: Fizyko-matematychni nauky: zb. nauk. prats'* [Mathematical and computer modeling. Ser.: Physical and Mathematical Sciences. Collected works]. Kam"yanets'-Podil's'kyiy, 2010, vol. 3, pp. 122–131. **4.** Litvin, O. N., Pershina, Yu. I. and Sergienko, I. V. Vosstanovlenie razryivnyikh funktsiy dvukh peremennyikh, kogda linii razryiva neizvestnyi (pryamougol'nyie elementyi) [Recovering discontinuous functions of two variables with unknown discontinuity lines (rectangular elements)]. *Kibernetika i sistemniyiy analiz* [Cybernetics and system analysis]. 2014, no. 4, pp. 126–134. **5.** Litvin, O. M. and Litvin, O. G. Rekonstruktsiya zobrazhen' z vykorystannyam skinchennyh sum Fur"e ta Feyera [Recovering images using finite Fourier and Fejer sums]. *Tezy konfer. ISN.* Poltava, PUET Publ., 2016. **6.** Litvin, O. M. *Interlinatsiya funktsiy ta deyaki yiyi zastosuvannya* [Function interlineation and its applications]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2002. 544 p

Надійшла (received) 06.04.2016

Відомості про автора / Сведения об авторе / Information about author

Литвин Олег Миколайович – доктор фізико-математичних наук, професор, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (066) 135-96-33; e-mail: academ_mail@ukr.net.

Литвин Олег Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (066) 135-96-33; e-mail: academ_mail@ukr.net.

Litvin Oleg Nikolaevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (066) 135-96-33; e-mail: academ_mail@ukr.net.

УДК 519.6

О. М. ЛИТВИН, О. О. ЛИТВИН, Ф. Ф. КОВАЛЬ, О. С. ЧОРНА

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОСТОРОВОГО РОЗПОДІЛУ ВМІСТУ ДЕЯКОЇ СУКУПНОСТІ КОРИСНИХ КОПАЛИН В КОРІ ЗА ДАНИМИ З КЕРНІВ СВЕРДЛОВИН МЕТОДОМ ІНТЕРЛІНАЦІЇ ФУНКЦІЙ

Розглянуто задачу про відновлення в кожній точці між заданою системою свердловин (взагалі кажучи, похилих) скінченої множини елементів періодичної таблиці або їх сполук лінійної щільності на заданій глибині. Тобто, ми обмежуємося не всіма елементами періодичної таблиці, а лише n – вибраними елементами або їх сполуками. Запропоновано метод побудови інтерлінаційного оператора матричних функцій, кожна компонента якої залежить від трьох змінних на системі кривих, тобто співпадає з наближуваною матричною функцією у всіх свердловинах на заданій глибині, та дозволяє обчислювати значення цієї матричної функції в кожній точці між свердловинами по заданій глибині. Наведений метод побудови математичних моделей просторового розподілу корисних копалин між похилими свердловинами дозволяє будувати математичні моделі структури кори Землі з використанням всіх сполук кернів похилих свердловин, які призведуть до створення ефективних методів розвідки корисних копалин та розробки родовищ. Також розглянуто перспективи подальших досліджень.

Ключові слова: математична модель, інтерлінація функцій, просторовий розподіл, керни свердловин.

Вступ. Математичне моделювання займає провідне місце в гірничо-економічному аналізі. Цей метод дає можливість вибирати оптимальні режими роботи гірничотехнічного устаткування, визначати найкращі параметри реконструкції тих, що діють, і будівництва нових гірничодобувних підприємств, вирішувати завдання комплексного розвитку гірничодобувних регіонів. Застосування теорії інтерлінації функцій 3-х змінних до розв'язання технічних задач таких, як відновлення в кожній точці (x, y, z) між заданою системою свердловин (прямих або похилих)

$$\Gamma_k(z) = \{(x, y, z) : x = X_k(z), y = Y_k(z), -H \le z \le 0\}$$

скінченої множини елементів періодичної таблиці або їх сполук за даними матриці-функції за змінною z, де z – глибини свердловин, $\gamma_{k,i}(z), k = \overline{1, M}$, $i = \overline{1, n}$, та знаходження оцінки запасів корисних копалин на основі результатів свердловинного буріння має велике практичне значення на сьогоднішній день.

Аналіз останніх досліджень. Очевидними стали відсутність простих рішень цієї задачі моделювання, недостатність жорстких, нехай навіть розгорнутих, багаторівневих схем моделювання. У такій ситуації доцільніше виробити системний підхід – спробувати знайти і зафіксувати не каркас майбутньої моделі, а основні принципи її побудови, створити єдине середовище моделювання, здатне вмістити те цінне, що вже є або з'явиться в окремих технологічних моделях [1]. Загально відомим є метод розвідки корисних копалин, що грунтується на аналізі вмісту кернів свердловин, просвердлених в різних точках поверхні даного регіону. В роботі [2] запропоновано і досліджено загальний метод побудови математичних моделей просторового розподілу корисних копалин на основі даних вмісту кернів вертикальних свердловин та інтерлінації функцій трьох змінних $f(x,y,z)$ – невідомого розподілу корисних копалин в кожній точці (x,y,z). У вказаних роботах істотно використовувалось припущення про те, що всі свердловини вертикальні. Випадок використання даних для побудови математичних моделей просторового розподілу корисних копалин із кернів похилих свердловин у зазначеній монографії та інших джерелах в ній не досліджувалися.

Враховуючи викладене вище, актуальною є задача побудови матричної математичної моделі просторового розподілу фіксованої сукупності корисних копалин в корі за даними з кернів свердловин методами інтерлінації функцій.

Постановка задачі. В даній роботі розглядається задача про відновлення в кожній точці (x,y,z) між заданою системою свердловин (взагалі кажучи, похилих)

$$\Gamma_k(z)=\{(x,y,z): x=X_k(z), y=Y_k(z), -H\le z\le 0\}$$

скінченої множини корисних копалин або їх сполук за даними $\gamma_{k,i}(z), k=\overline{1,M}$, $i=\overline{1,n}$, $n-$ кількість сполук лінійної щільності $i-$го елемента в $k-$ій свердловині на глибині z, $-H\le z\le 0$. Тобто, ми обмежуємося не всіма елементами періодичної таблиці, а лише n вибраними елементами.

Математична модель. Введемо позначення:

$$\rho(x,y,z)=\left[\rho_1(x,y,z) \quad \ldots \quad \rho_n(x,y,z)\right]^T,\ \gamma_{k,i}(z)=\rho_i\left(X_k(z),Y_k(z),z\right),\ k=\overline{1,M},\ i=\overline{1,n},$$

де $\rho(x,y,z)$ – матриця-функція, що описує просторовий розподіл всієї сукупності досліджуваних нами корисних копалин, кожний стовпець має компоненти, які означають розподіл $i-$ої корисної копалини; $\gamma_{k,i}(z)$ – розподіл $i-$ої корисної копалини в $k-$ій свердловині,

$$\gamma_{k,i}(z)=\left[\gamma_{k,1}(z) \quad \ldots \quad \gamma_{k,n}(z)\right]^T,$$

$\rho_i(x,y,z)$, $i=\overline{1,n}$ – щільність $i-$ої корисної копалини.

Введемо також до розгляду *допоміжні функції* $H_k(x,y,z)$, що розглянуті у працях [3 – 5].

Допоміжні функції $H_k(x,y,z)$, $k=\overline{1,M}$, мають властивості $H_k(X_p(z),Y_p(z),z)=\delta_{k,p}$, $1\le k,p\le M$.

Тоді математичною моделлю просторового розподілу сукупності a_n фіксованих корисних копалин між вибраною системою похилих свердловин будемо називати оператор

$$O\rho(x,y,z)=\sum_{k=1}^{M}H_k(x,y,z)\rho_k(z). \tag{1}$$

Введемо і дослідимо також оператори сплайн-інтерлінації матричної функцій трьох змінних $\rho(x,y,z)$ на системі похилих свердловин $\Gamma_k=\{(x,y,z): x=X_k(z), y=Y_k(z), -H\le z\le 0\}$.

Введемо M допоміжних функцій $h_k(t)\in C[0,1]$, $k=\overline{1,M}$, з властивостями $h_k(0)=0, h_k(1)=1$, $k=\overline{1,M}$, та оператори

$$O_\mu\rho(x,y,z)=\rho_{\mu_1}(z)h_{\mu_1}\left(\frac{\phi_{\mu_2,\mu_3}(x,y,z)}{\Delta_{\mu_1,\mu_2,\mu 3}(z)}\right)+\rho_{\mu_2}(z)h_{\mu_2}\left(\frac{\phi_{\mu_1,\mu_3}(x,y,z)}{\Delta_{\mu_1,\mu_2,\mu 3}(z)}\right)+\rho_{\mu_3}(z)h_{\mu_3}\left(\frac{\phi_{\mu_1,\mu_2}(x,y,z)}{\Delta_{\mu_1,\mu_2,\mu 3}(z)}\right),$$
$$(x,y,z)\in T_\mu\subset D,\ z\in[-H,0].$$

Теорема 1. *Оператор* $O_\mu\rho(x,y,z)$ *має наступні властивості:*

а) він є оператором інтерлінації функцій трьох змінних на системі кривих Γ_k, *тобто дозволяє обчислювати значення цієї матричної функції*

$$O_\mu\rho\left(X_k(z),Y_k(z),z\right)=\gamma_k(z),\ -H\le z\le 0, k=\overline{1,M};$$

б) $\rho(x,y,z)\in C\left(\bigcup_\mu T_\mu\times[-H,0]\right)\mathrm{T}_\mu\subset D\Rightarrow\ O_\mu\rho(x,y,z)\in C\left(\bigcup_\mu T_\mu\times[-H,0]\right);$

в) якщо деякі (або всі) функції $\rho_i(x,y,z)$, $i=\overline{1,n}$ *мають розв'язок в заданій системі точок* z_k, $k=\overline{1,M}$, *то і* $O_\mu\rho(x,y,z)$ *буде мати розв'язок.*

Доведення. Інтерлінаційні властивості «а» випливають з наступної властивості детермінантів: детермінант з двома однаковими рядками дорівнює нулю. Тому, якщо $p\in\{\mu_1,\mu_2,\mu_3\}$, то

$$O_\mu\rho(x,y,z)=\rho_{\mu_1}(z)h_{\mu 1}\frac{\phi_{\mu_2,\mu_3}(x,y,z)}{\Delta_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}(z)}+\rho_{\mu_2}(z)h_{\mu 2}\frac{\phi_{\mu_1,\mu_3}(x,y,z)}{\Delta_{\mu_2,\mu_1,\mu_3}(z)}+$$

$$+\rho_{\mu_3}(z)h_{\mu 3}\frac{\phi_{\mu_1,\mu_2}(x,y,z)}{\Delta_{\mu_3,\mu_1,\mu_2}(z)}=\rho_\kappa(z),\ (x,y,z)\in T_\mu,\ z\in[-H,0],\ p\in\{\mu_1,\mu_2,\mu_3\}.$$

Тут враховано, що

$$\varphi_{\mu_2,\mu_3}\left(X_{\mu_1}(z),Y_{\mu_1}(z)\right)=1,\ \varphi_{\mu_2,\mu_3}\left(X_{\mu_2}(z),Y_{\mu_2}(z)\right)=0,\ \varphi_{\mu_2,\mu_3}\left(X_{\mu_3}(z),Y_{\mu_3}(z)\right)=0,$$

$$\varphi_{\mu_1,\mu_3}\left(X_{\mu_2}(z),Y_{\mu_2}(z)\right)=1,\ \varphi_{\mu_1,\mu_3}\left(X_{\mu_1}(z),Y_{\mu_1}(z)\right)=0,\ \varphi_{\mu_1,\mu_3}\left(X_{\mu_3}(z),Y_{\mu_3}(z)\right)=0,$$

$$\varphi_{\mu_1,\mu_2}\left(X_{\mu_3}(z),Y_{\mu_3}(z)\right)=1,\ \varphi_{\mu_1,\mu_2}\left(X_{\mu_1}(z),Y_{\mu_1}(z)\right)=0,\ \varphi_{\mu_1,\mu_2}\left(X_{\mu_2}(z),Y_{\mu_2}(z)\right)=0.$$

Іншими словами, оператор $O_M\rho(x,y,z)$ є оператором інтерлінації матричної функцій, кожна компонента якої залежить від трьох змінних на системі кривих Γ_k, тобто співпадає з наближуваною матричною функцією у всіх свердловинах по глибині z, $-H\le z\le 0$, та дозволяє обчислювати значення цієї матричної функції в кожній точці (x,y,z) між свердловинами по глибині z [3].

Для доведення того, що

$$O_M\rho(x,y,z)\in C\left(\bigcup_\mu T_\mu\times[-H,0]\right),$$

досить зазначити, що функції $O_{p,q,r}\rho(x,y,z)$ та $O_{p,q,r'}\rho(x,y,z)$ на спільній стороні обох трикутників, які розміщені на площині, зі свердловинами $\Gamma_p(z)$ та $\Gamma_q(z)$ мають однакові сліди. Тобто функція $\mathrm{P}(x,y,z)=$ $=O_M\rho(x,y,z)$ при переході від тригранної призми з ребрами $\Gamma_p(z),\Gamma_q(z),\Gamma_r(z)$ до тригранної призми з ребрами $\Gamma_p(z),\Gamma_q(z),\Gamma_{r'}(z)$ зберігає неперервність. Те, що для неперервних слідів $\rho_p(z)\in C[-H,0]$, $p=\overline{1,m}$ функції $\mathrm{P}_\mu(x,y,z)=O_\mu\rho(x,y,z)$ теж будуть неперервними, випливає з формули для операторів $O_\mu\rho(x,y,z)$ і відомої властивості неперервних функцій, а саме: сума неперервних матричних функцій є неперервною матричною функцією.

Теорема 1 доведена.

Зауваження 1. Зокрема, в якості $h_k(t)$ $\forall k=\overline{1,M}$ можна взяти t^r, $r=1,2$ і при цьому отриманий оператор $O_M\rho(x,y,z)$ буде оператором інтерлінації матричної функцій $\rho(x,y,z)$, який дозволяє між заданою системою свердловин відновлювати матричну функцію $\rho(x,y,z)$ в кожній точці від (x,y,z).

Зауваження 2. Якщо одна або всі компоненти матриці $\rho(x,y,z)$ мають розриви першого роду на деяких глибинах, то оператор $O_M\rho(x,y,z)$ буде представляти також розривну функцію від (x,y,z).

Розглянемо для довільної функції $\rho(x,y,z)\in C(R^3)$ інтерлінаційні оператори

$$O_{M,\lambda}(\rho;x,y,z)=\sum_{k=1}^{M}\rho_k(z)\ell_{M,k,\lambda}(x,y,z),\ \lambda\ge 1,\ M=2,3,...,$$

з глобальними допоміжними функціями

$$\ell_{M,k,\lambda}(x,y,z)=\prod_{i=1,i\ne k}^{M}\frac{d_i(x,y,z)^\lambda}{d_{i,k}^\lambda}=\frac{\prod\limits_{i=1,i\ne k}^{M}d_i(x,y,z)^\lambda}{\prod\limits_{i=1,i\ne k}^{M}d_{i,k}^\lambda},\ \ d_i(x,y,z)=\sqrt{\left(X_i(z)-x\right)^2+\left(Y_i(z)-y\right)^2};$$

$$d_{i,k}=\sqrt{\left(X_i(z)-X_k(z)\right)^2+\left(Y_i(z)-Y_k(z)\right)^2}\ \ [4].$$

Теорема 2. *Для кожної* $\rho(x,y,z)\in C(R^3)$ *виконуються співвідношення*

$$O_{M,\lambda}(\rho;x,y,z)\in C\left(R^3\right);\ O_{M,\lambda}\left(\rho;X_p(z),Y_p(z),z\right)=\gamma_p(z),\ p=\overline{1,M},$$

Тобто кожна компонента матриці $\rho_i(x,y,z)\in C(R^3)$.

Доведення. Дослідимо властивості допоміжних функцій $\ell_{M,k,\lambda}(x,y,z)$. Перш за все зазначимо, що знаменники $\prod_{i=1,i\neq k}^{M} d_{i,k}^{\lambda}$ у формулах для $\ell_{M,k,\lambda}(x,y,z)$ – сталі величини і $d_{i,k}^{\lambda} > 0 \forall i,k \in \{1,...,M\}, i\neq k, \lambda>0$, а чисельник – невід'ємна функція $\prod_{i=1,i\neq k}^{M} d_i(x,y,z)^{\lambda} \geq 0$. Тому[4]

$$\ell_{M,k,\lambda}\left(x,y,z\right) \geq 0 \forall k=\overline{1,M}; \lambda>0 .$$

Крім того,

$$\ell_{M,k,\lambda}\left(X_p\left(z\right),Y_p\left(z\right),z\right)=\prod_{i=1,i\neq k}^{M}\frac{d_i\left(X_p\left(z\right),Y_p\left(z\right),z\right)^{\lambda}}{d_{i,k}^{\lambda}}=\frac{\prod_{i=1,i\neq k}^{M} d_i\left(X_p\left(z\right),Y_p\left(z\right),z\right)^{\lambda}}{\prod_{i=1,i\neq k}^{M} d_{i,k}^{\lambda}}=\frac{\prod_{i=1,i\neq k}^{M} d_{i,p}^{\lambda}}{\prod_{i=1,i\neq k}^{M} d_{i,k}^{\lambda}}=\delta_{k,p}, k,p=\overline{1,M},$$

оскільки

$$\frac{\prod_{i=1,i\neq k}^{M} d_{i,p}^{\lambda}}{\prod_{i=1,i\neq k}^{M} d_{i,k}^{\lambda}}=\begin{cases}1, \text{ якщо } p=k;\\ 0, \text{ якщо } p=i, \ p\in\{1,2,...,M\}, \ p\neq k.\end{cases}$$

Таким чином, $\ell_{M,k,\lambda}(X_p(z),Y_p(z),z)=\delta_{k,p}, \ k,p=\overline{1,M}.$ Враховуючи це, можна записати таку послідовність рівностей:

$$O_{M,\lambda}\left(\rho; X_p\left(z\right),Y_p\left(z\right),z\right)=\sum_{k=1}^{M}\gamma_k\left(z\right)\ell_{M,k,\lambda}\left(X_p\left(z\right),Y_p\left(z\right),z\right)=\sum_{k=1}^{M}\gamma_k\left(z\right)\delta_{k,p}=\gamma_p\left(z\right), \ p=\overline{1,M},$$

оскільки функції $\ell_{M,k,\lambda}(x,y,z)$ – скалярні, а $\rho_k(z)\ell_{M,k,\lambda}(x,y,z)$ – буде матричною функцією, отриманою перемноженням скалярної функції $\ell_{M,k,\lambda}(x,y,z)$ на матричну функцію $\rho_k(z)$.

Теорема 2 доведена.

Висновки. Таким чином, у даній роботі розглянуто задачу про відновлення в кожній точці (x,y,z) між заданою системою свердловин (взагалі кажучи, похилих) $\Gamma_k(z)=\{(x,y,z): x=X_k(z), y=Y_k(z), -H\leq z\leq 0\}$ скінченої множини деякої сукупності корисних копалин або їх сполук за даними про розподіл всіх компонентів цієї матриці-функції в даній системі свердловин $\gamma_{k,i}(z), k=\overline{1,M}, \ i=\overline{1,n}$, $n-$ кількість елементів сполук лінійної щільності $i-$го елемента в $k-$ій свердловині на глибині z, $-H\leq z\leq 0$. На основі запропонованих матричних математичних моделей можуть бути створені нові ефективні методи розвідки корисних копалин та розробки родовищ.

Список літератури: 1. *Барон Ю. Л.* О проблеме тохнологического моделирования. Моделирование технологических процессов на угольных шахтах // Сборник докладов на научном семинаре. – Л. : Институт А.А. Скочинского. – 1993. С. 72 – 80. **2.** *Литвин О. М., Штепа Н. І., Литвин О. О.* Математичне моделювання розподілу корисних копалин методами інтерлінації та інтерфлетації функцій. – К. : Наукова думка, 2011. – 228 с. **3.** *Литвин О. О., Штепа Н. І., Кулик С. І., Чорна О. С.* Математичне моделювання розподілу корисних копалин між системою нерегулярно розміщених похилих свердловин методами сплайн-інтерлінації функцій // Журнал «Проблемы машиностроения», Т. 16. Вип. 1. – Харків, 2013. – С. 61 – 68. **4.** *Литвин О. О., Штепа Н. І., Кулик С. І., Чорна О. С.* Математичне моделювання 3d розподілу корисних копалин між системою нерегулярно розміщених похилих свердловин методами глобальної інтерлінації функцій // Журнал «Проблемы машиностроения», Т. 16. Вип. 4. – Харків, 2013. – С. 39 – 49. **5.** *Литвин О. О., Штепа Н. І., Кулик С. І., Чорна О. С.* Математичне моделювання розподілу корисних копалин за допомогою поліноміальних інтерлінантів на системі похилих свердловин // Журнал «Проблемы машиностроения», Т. 17. Вип. 2. – Харків, 2014. – С. 33 – 40.

References: 1. Baron, U. L. O probleme tekhnologicheskogo modelirovaniya. Modelirovanie tekhnologicheskikh protsessov na ugol'nykh shakhtakh [On an issue of technological simulation. Modeling of processes in coal mines]. *Sbornik dokladov na nauchnom ceminare*. Lyubertsy, Institut A. A. Skochinskogo Publ., 1993, pp. 72–80. **2.** Lytvyn, O. M., Lytvyn, O. O. and Shtepa, N. I. Matematychne modelyuvannya rozpodilu korysnykh kopalyn metodamy interlinatsiyi ta interfletatsiyi funktsiy [Mathematical modeling of mineral distribution by methods of function interlineation and interflatation]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2011. 228 p. **3.** Lytvyn, O. O., Shtepa, N. I., Kulyk, S. I., and Chorna, O. S. Matematychne modelyuvannya rozpodilu korysnykh kopalyn mizh systemoyu neregulyarno rozmischenyh pokhylykh sverdlovyn metodamy splain-interlinatsiyi funktsiy [Mathematical modeling of mineral distribution between system of irregularly placed inclined boreholes by method of spline-interlineation of functions]. *Zhurnal "Problemyi mashinostroeniya"* [Journal "Engineering problems"]. Kharkiv, 2013, Vol. 16, no. 1, pp. 61–68. **4.** Lytvyn, O. O., Shtepa, N. I., Kulyk, S. I. and Chorna, O. S. Matematychne modelyuvannya 3d rozpodilu korysnykh kopalyn mizh systemoyu neregulyarno rozmischenyh pokhylykh sverdlovyn metodamy global'noyi interlinatsiyi funktsiy [Mathematical modeling of 3d distribution of minerals around a set of irregularly spaced oblique boreholes by global interlineation of functions]. *Zhurnal "Problemy mashinostroeniya"* [Journal "Engineering problems"]. Kharkiv, 2014, Vol. 16, no. 4, pp. 39–49. **5.** Lytvyn, O. O., Shtepa, N. I., Kulyk, S. I. and Chorna, O. S. Matematychne modelyuvannya rozpodilu korysnykh kopalyn za dopomogoyu polinomial'nykh interlinantiv na systemi pokhylykh sverdlovyn [Mathematical modeling of mineral distribution on a set of oblique boreholes using polynomial interlineations]. *Zhurnal "Problemy mashinostroeniya"* [Journal "Engineering problems"]. Kharkiv, 2014, Vol. 17, no. 2, pp. 33–40.

Надійшла (received) 06.10.2015

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Литвин Олег Миколайович – доктор фізико-математичних наук, професор, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (066) 135-96-33; e-mail: academ_mail@ukr.net.

Литвин Олег Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (066) 135-96-33; e-mail: academ_mail@ukr.net.

Lytvyn Oleg Nikolaevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (066) 135-96-33; e-mail: academ_mail@ukr.net.

Литвин Олег Олегович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (050) 276-20-21; e-mail: loo71@bk.ru.

Литвин Олег Олегович – кандидат физико-математических наук, профессор, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (050) 276-20-21; e-mail: loo71@bk.ru.

Lytvyn Oleg Olegovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (050) 276-20-21; e-mail: loo71@bk.ru.

Коваль Федір Федорович – доктор фізико-математичних наук, керівник ООО "Магістр ЛТД", ИМК, м. Харків; тел.: (095) 357-85-27; e-mail: kffmagistr@mail.ru.

Коваль Федор Федорович – доктор физико-математичних наук, руководитель ООО "Магистр ЛТД", ИМК, г. Харьков; тел.: (095) 357-85-27; e-mail: kffmagistr@mail.ru.

Koval Fedor Fedorovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Kharkov; tel.: (095) 357-85-27; e-mail: kffmagistr@mail.ru.

Чорна Олена Сергіївна – асистент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (066) 350-05-91; e-mail: lena1402@ukr.net.

Черная Елена Сергеевна – ассистент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (066) 350-05-91; e-mail: lena1402@ukr.net.

Chorna Olena Sergiivna – assistant, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (066) 350-05-91; e-mail: lena1402@ukr.net.

УДК 519.6

О. М. ЛИТВИН, О. П. НЕЧУЙВІТЕР, Г. В. КАРГАПОЛЬЦЕВА

ОЦІНКА ПОВНОЇ ПОХИБКИ КУБАТУРНОЇ ФОРМУЛИ НАБЛИЖЕНОГО ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА ВІД ШВИДКООСЦИЛЮЮЧОЇ ФУНКЦІЇ ТРЬОХ ЗМІННИХ

Отримано оцінку повної абсолютної похибки кубатурної формули наближеного обчислення інтегралу від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних у випадку, коли інформація про функцію задавалась її слідами на взаємноперпендикулярних площинах наближено з заданою максимальною похибкою. Кубатурна формула будується з використанням оператора інтерфлетації, функція належить класу Ліпшиця з додатковими умовами. На конкретному прикладі продемонстрована справедливість теореми про оцінку похибки методу заокруглення розв'язків.

Ключові слова: інтеграли від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних, кубатурні формули, інтерфлетація, похибка методу, неусувна похибка, похибка заокруглення.

Вступ. Широке коло прикладних задач використовує засоби цифрової обробки багатовимірних сигналів. Це томографія, рентгенографія, телебачення, радіолокація, екологічний моніторинг та інші. Сфери застосування багатовимірних зображень обумовлюють необхідність використання при побудові та дослідженні математичних моделей різних типів задання інформації. Наприклад, інформація про функцію декількох змінних може задаватися не тільки значеннями функції в точках, а й її слідами на лініях, площинах, проекціями.

В сучасних моделях цифрової обробки сигналів та зображень все частіше розглядаються кубатурні формули наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій, які саме і використовують нові інформаційні оператори. Однак не так багато досліджень, які присвячені отриманню оцінки повної похибки для таких кубатурних формул.

В даній роботі досліджується повна похибка кубатурної формули наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних, яка в своїй побудові використовує сліди функції на площинах.

Аналіз останніх досліджень. В роботах [1 – 6] викладена теорія наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох змінних з використанням *операторів інтерлінації* у випадку, коли інформація про функцію задана слідами функції на взаємноперпендикулярних лініях та значеннями функції в точках. Для наближеного обчислення інтегралів від функцій, зокрема і від швидкоосцилюючих функцій, двох змінних в [7, 8] викладений алгоритм побудови та досліджена якість кубатурної формули, яка в своїй побудові використовує сліди функції на оптимально обраних лініях. Теорія наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних з використанням *операторів інтерфлетації* у випадку, коли інформація про функцію задана слідами функції на взаємноперпендикулярних площинах, лініях та значеннями функції в точках,