

А. М. НАЗАРЕНКО

## МЕТОД ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИФРАКЦИИ УПРУГИХ ВОЛН

Предлагаются хорошо обусловленные алгоритмы, основанные на методе энергетического моделирования дифракции упругих волн на конечных и периодических решётках и сводящиеся к решению сингулярных интегральных уравнений на замкнутых и разомкнутых контурах. Интегральные представления перемещений дифрагированного волнового поля строятся исходя из теоремы взаимности работ для двух различных состояний механической системы. Предложен эффективный метод выделения сингулярных ядер, который значительно ускоряет сходимость возникающих функциональных рядов в случае периодической системы неоднородностей. Численная реализация решения сингулярных интегральных уравнений (СИУ) проведена методами дискретных особенностей и механических квадратур.

**Ключевые слова:** метод энергетического моделирования, дифракция упругих волн, конечная и периодическая решётки, сингулярные интегральные уравнения, метод дискретных особенностей, метод механических квадратур.

**Введение.** Многие научные и технические проблемы связаны с исследованием волновых процессов в упругих телах. Присутствующие в телах дифракционные элементы являются не только концентраторами напряжений, но и широко используются как композитные материалы, рассеиватели волн различного происхождения. Поэтому моделирование динамических систем с усложнёнными свойствами приобретает особую актуальность. Такие задачи требуют привлечения сложного математического аппарата и разработки новых методов решения различных краевых задач динамики неоднородных сред. Особое значение здесь приобретают вычислительные методы, которые базируются на хорошо обусловленных алгоритмах и позволяют гибко перенастраивать систему в зависимости от изменения элементов конструкции.

Представленные в работе модели являются развитием широко известных методов СИУ решения дифракционных задач. Метод энергетического моделирования дифракции упругих волн, предложенный в данной работе, показал свою эффективность при решении конкретных задач дифракции  $SH$ -,  $SV$ -, и  $P$ -волн, а также изгибных волн в тонких пластинках на жестких и упругих включениях, полостях и криволинейных дефектах типа трещин и жестких включений.

**Анализ существующих методов исследования.** Наибольшие математические и вычислительные трудности в задачах дифракции возникают, если длина возбуждающей волны соизмерима с характерными размерами препятствий. В этом случае длинно- и коротковолновые приближения [1] не применимы [2]. Методы конечных разностей [3], конечных элементов [4],  $R$ -функций [5] сталкиваются с трудностями в случае неоднородностей с усложненной формой границы; в бесконечных и полубесконечных областях здесь приходится вводить вспомогательную границу, что приводит к значительному увеличению вычислительных ресурсов (память, быстродействие). Метод разделения переменных и его обобщения [6, 7] не применимы в случае нескольких рассеивателей произвольного расположения; в полубесконечных средах трудности возникают в удовлетворении одновременно условий на прямой границе полуплоскости и на криволинейной границе препятствия, которые характеризуются различными системами координат. МГЭ эффективен, если граничные элементы однотипны [8], поэтому при усложнении формы границы этот метод становится эквивалентным методу дискретных особенностей (МДО), однако, в отличие от МДО, он не чувствует специфику ядер интегральных уравнений и не позволяет выделять сингулярные члены.

МДО и родственные методы, которые базируются на численной реализации интегральных уравнений с помощью интерполяционных полиномов, в последнее время показали высокую вычислительную эффективность, устойчивость и адекватность [9 – 11]. Методы интегральных уравнений понижают на единицу размерность краевой задачи, записанной в дифференциальной форме, обеспечивают единственность решения и выполнение условий излучения на бесконечности. Основная проблема, которая здесь возникает, заключается в построении интегральных представлений решений рассматриваемой краевой задачи.

При установившихся колебаниях в условиях плоской деформации используются подходы, основанные на построении интегральных представлений волновых потенциалов, которые удовлетворяют уравнениям Гельмгольца. Амплитуды перемещений и напряжений выражаются здесь через потенциалы с помощью операции дифференцирования по координатным переменным. В случае радиальных дефектов получил распространение метод разрывных решений, согласно которому строятся представления потенциалов плоской деформации в виде интегралов по контурам разрезов, содержащих комбинации фундаментальных решений [12]; плотностями этих потенциалов являются скачки амплитуд перемещений и напряжений на прямолинейных дефектах. В [13] использованы специальные интегральные представления потенциалов продольной и поперечной волн, которые содержат по три неизвестные плотности (всего 6 функций). Из свойств потенциалов вытекает, что 4 плотности выражаются через скачки перемещений и их производные по дуговой координате на контуре трещины-разреза, а оставшиеся две плотности выбираются так, чтобы в выражениях для перемещений и напряжений отсутствовала расходящаяся часть. В результате на контурах трещин получается система интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных скачков перемещений. В [14] этот подход распространен на случай дифракции

плоской гармонической волны на упругом включении в бесконечной среде. Интегральные представления потенциалов в матрице и включении содержат по 4 плотности; далее реализуется идея, согласно которой расходящиеся члены в потенциальной и вихревой частях решения должны взаимно уничтожаться. В результате получены интегральные представления потенциалов с двумя неизвестными плотностями в матрице и включении. Удовлетворение граничных условий типа склейки на контуре упругого включения сводит краевую задачу к системе четырех СИУ.

Описанные подходы являются специфическими, требуют определенных навыков и большого объема предварительных вычислений для получения корректных интегральных представлений решений краевых задач. В [15, 16] предложен эффективный метод исследования дифракционных задач, основанный на построении интегральных представлений не для волновых потенциалов, а для перемещений, используя известную *теорему взаимности работ* для двух различных состояний механической системы. Использование этой теоремы определяет механическую интерпретацию плотностей интегральных представлений, которые являются скачками напряжений в случае дифракции плоских волн на криволинейных жестких включениях и скачками перемещений в случае криволинейных трещин-разрезов. В [17] теорема взаимности работ использована при дифракции изгибных волн на криволинейных дефектах в тонких пластинах, а в [18] она распространена на случай дифракции плоских гармонических волн на периодической системе криволинейных дефектов типа трещин и жестких включений.

В [19] указанный подход впервые использовался для исследования дифракции волн сдвига на полости и упругом включении произвольной формы в полупространстве, в [20] строятся интегральные представления амплитуд перемещений дифрагированного волнового поля в случае упругих включений в рамках плоской деформации, а в [21] реализованы задачи дифракции плоских гармонических волн на периодических системах неоднородностей различных типов. В [22, 23] этот метод распространен на случай конечных решеток, составленных из однотипных объектов. Применение параллельных вычислений показало эффективность данного подхода к исследованию волновых полей перемещений и напряжений. Численные эксперименты свидетельствуют, что сходимость решений системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) – дискретных аналогов возникающих СИУ практически не зависит от количества рассеивателей в решетке. Аналогичные выводы получены в [24], где рассчитывались решетки, составленные из трех эллиптических и ромбических отверстий в случае плоской деформации.

**Краткая характеристика метода энергетического моделирования.** В данной работе метод исследования дифракционных задач, основанный на построении интегральных представлений перемещений дифрагированного волнового поля с помощью теоремы взаимности работ, будем называть *методом энергетического моделирования* (МЭМ) дифракции упругих волн. Его можно использовать в задачах стационарной теории упругости в случае решеток, в которых одновременно присутствуют неоднородности различных типов (полости, жесткие и упругие включения, криволинейные дефекты типа трещин и жестких включений). Основное преимущество МЭМ по сравнению с другими методами [12, 13, 25] заключается в том, что ядра построенных интегральных представлений допускают простую механическую интерпретацию: они представляют собой перемещения или напряжения вспомогательных фундаментальных состояний, которые обладают всеми желательными свойствами. Это обстоятельство обеспечивает сведение краевых задач к системам СИУ первого и второго рода. Для получения характерных сингулярностей предлагается метод выделения в явном виде перемещений вспомогательных фундаментальных состояний соответствующей статической задачи, что особенно важно в случае периодических решеток. Благодаря этому успешно решаются возникающие при исследовании периодических задач проблемы [26], поскольку такой подход не только обеспечивает эффективное сведение краевой задачи к системе СИУ, но и позволяет значительно ускорить сходимость присутствующих функциональных рядов.

**Постановка краевых задач.** В данной работе исследуются двумерные задачи дифракции стационарных упругих волн на совокупности замкнутых и разомкнутых неоднородностей (без общих точек) произвольной формы и произвольного расположения в изотропной среде (рис. 1).

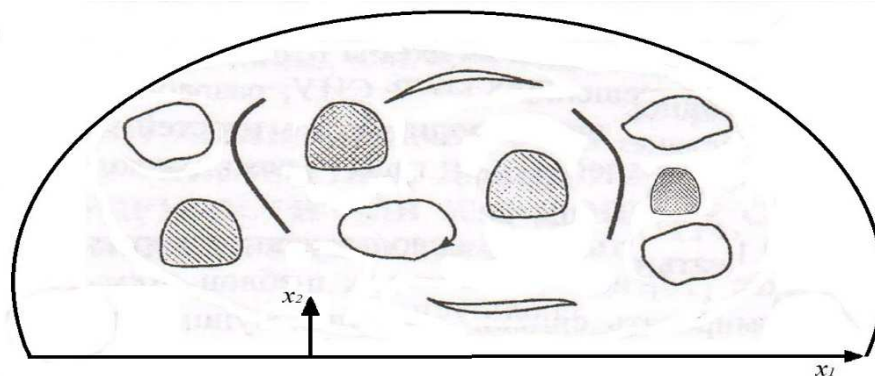


Рис. 1 – Система неоднородностей в упругой среде.

В качестве замкнутых неоднородностей выступали полости, упругие и жесткие подвижные включения, а в качестве разомкнутых неоднородностей рассматривались криволинейные дефекты двух типов: жесткие включения и трещины-разрезы. При постановке задачи использовались следующие сообщения.

1. В случае упругих включений на границе раздела двух сред моделировались условия типа склейки, которые предполагают непрерывность перемещений и напряжений при переходе через границу включения.

2. Если в упругой среде имеются полости, то они свободны от сил, и на их границе выполняются равенства нулю напряжений.

3. Граничные условия на контурах жестких включений вытекают из уравнений движения абсолютно жесткого тела. Фигурирующие здесь неизвестные постоянные характеризуют поступательное и вращательное движения включений и определяются из соответствующих дополнительных условий.

4. Берега трещин предполагаются свободными от сил; перемещения здесь претерпевают скачки, которые обращаются в нуль на концах разрезов.

В качестве возбуждающего воздействия рассматриваются монохроматические волны, излучающиеся из бесконечности, а также сосредоточенные гармонические источники заданной интенсивности (зависимость от времени  $t$  выражается множителем  $e^{-i\omega t}$ ,  $\omega$  – это частота колебаний).

Пусть  $L$  – это совокупность контуров (замкнутых и разомкнутых), изображенных на рис. 1. Положительное направление обхода выбиралось так, чтобы при движении вдоль  $L$  внешняя область (матрица) оставалась слева. В общем случае совокупность  $L$  включает следующие совокупности:

- $L^{(1)}$  – контуров упругих включений;
- $L^{(2)}$  – контуров полостей;
- $L^{(3)}$  – контуров жестких подвижных включений (замкнутых и разомкнутых);
- $L^{(4)}$  – контуров криволинейных трещин – разрезов.

При решении конкретной краевой задачи динамической теории упругости метод энергетического моделирования дифракции упругих волн заключается в построении интегральных представлений перемещений дифрагированного волнового поля, автоматически удовлетворяющих уравнениям движения, условиям излучения на бесконечности и обеспечивающих желательные свойства решений на контурах неоднородностей. Все указанные требования можно выполнить, используя известную теорему взаимности работ:

*если есть два различных состояния механической системы, то работа сил второго состояния на перемещениях первого равна работе сил первого состояния на перемещениях второго.*

Применяя эту теорему, можно получать интегральные представления перемещений в случае разнообразных постановок задач дифракции упругих волн на различных неоднородностях.

Рассмотрим метод энергетического моделирования дифракции упругих волн на некоторых примерах.

**Дифракция стационарных изгибных волн на криволинейных дефектах в тонких пластинках.** В случае изгибных колебаний тонкой пластинки (в рамках модели Кирхгофа-Лява), ослабленной криволинейными дефектами типа жестких подвижных включений и трещин-разрезов, дифрагированное волновое поле, характеризующее прогиб пластинки, удовлетворяет дифференциальному уравнению [17]

$$\Delta^2 W^{(1)} - \gamma^4 W^{(1)} = 0, \quad \gamma^4 = \rho h \omega^2 / D. \tag{1}$$

Сформулируем граничные условия на контурах криволинейных дефектов.

1. Если  $L^{(3)}$  – совокупность жестких включений  $L_j, j = \overline{1, M}$ , то считаем, что каждое из них перемещается как абсолютно жесткое тело, и на  $L_j$  граничные условия имеют вид

$$\varphi_1^\pm = A_j, \quad \varphi_2^\pm = B_j, \quad j = \overline{1, M}. \tag{2}$$

Отметим, из (2) вытекает, что на контуре  $L_j$  будет выполняться соотношение:

$$W^\pm = C_j - A_j \xi - B_j \eta, \quad \zeta = \xi + i\eta \in L_j, \quad j = \overline{1, M}. \tag{3}$$

Для определения неизвестных постоянных  $A_j, B_j$  и  $C_j (j = \overline{1, M})$  на каждом контуре  $L_j, j = \overline{1, M}$  необходимо задать главный вектор  $F^{(j)}$  и главные моменты  $M_1^{(j)}, M_2^{(j)}$  сил, действующих на включение  $L_j, j = \overline{1, M}$ .

2. Если  $L^{(4)}$  – совокупность трещин – разрезов  $L_j, j = \overline{1, K}$ , то считаем, что на берегах  $L$  заданы амплитуды самоуравновешенных изгибающего момента и обобщенной поперечной силы:

$$M_n^\pm = m(s), \quad N_n^\pm = m(s), \quad s \in L. \tag{4}$$

Взаимодействуя с дефектами, проходящая волна порождает сингулярное волновое поле вблизи дефектов. В результате кинематические и силовые величины, вообще говоря, претерпевают разрывы на  $L$ .

С помощью теоремы взаимности работ для амплитуд прогиба  $W^{(1)}(x_1, x_2)$  возмущенного волнового поля получено следующее интегральное представление

$$W^{(1)}(P) \int_{L^{(3)}} \left( \frac{F}{l} G + f_1(s) \varphi_s^G + f_2(s) \varphi_n^G \right) ds - \int_{L^{(4)}} (g_1(s) F_n^G + g_2(s) M_n^G) ds. \quad (5)$$

Здесь  $G(P, Q)$  – фундаментальное решение уравнения (1);  $\varphi_s^G$  и  $\varphi_n^G$  – соответствующие прогибу  $G$  углы поворота;  $F_n^G$  и  $M_n^G$  – интеграл (от 0 до  $s$ ) обобщенной поперечной силы  $N_n^G$  и изгибающий момент;  $F$  – главный вектор сил, действующих на жесткое включение совокупности  $L^{(3)}$  длины  $l$ .

Непосредственной проверкой можно убедиться, что интегральные представления (2) обеспечивают необходимые скачки силовых и кинематических величин на  $L^{(3)}$  и  $L^{(4)}$ . На криволинейном жестком включении – скачки обобщенной поперечной силы  $N_n$  и изгибающего момента  $M_n$ :

$$f_1(s) = \int_0^s [N_n] ds - \frac{F}{l} s, \quad f_2(s) = [M_n], \quad (6)$$

а в случае криволинейной трещины – скачки углов поворота  $\varphi_s$  и  $\varphi_n$ :

$$g_1(s) = [\varphi_s], \quad g_2(s) = [\varphi_n]. \quad (7)$$

Для определения решения – прогиба  $G$  бесконечной пластинки в точке  $P(x_1, x_2)$  от действия гармонической распределенной поперечной нагрузки, сосредоточенной в точке  $Q(\xi, \eta)$ , рассмотрим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция  $G$ . Из (1) получаем ( $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака)

$$\Delta^2 G - \gamma^4 G = \delta(x_1 - \xi, x_2 - \eta). \quad (8)$$

Введем функции

$$G_1(P, Q) = \Delta G + \gamma^2 G, \quad G_2(P, Q) = \Delta G + \gamma^2 G. \quad (9)$$

Тогда из (8) вытекает, что  $G_1$  и  $G_2$  являются фундаментальными решениями уравнений Гельмгольца

$$\Delta G_1 - \gamma^2 G_1 = \delta(x_1 - \xi, x_2 - \eta), \quad \Delta G_2 - \gamma^2 G_2 = \delta(x_1 - \xi, x_2 - \eta) \quad (10)$$

и, следовательно,

$$G_1(P, Q) = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(i\gamma r), \quad G_2(P, Q) = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(\gamma r), \quad (11)$$

$r = |z - \zeta|$ ,  $z = x_1 + ix_2$ ,  $\zeta = \xi + i\eta$ .

Если определены функции  $G_1$  и  $G_2$  (11), то из (9) можно найти функцию  $G$ . Имеем

$$G(P, Q) = \frac{1}{8i\gamma^2} (H_0^{(1)}(i\gamma r) - H_0^{(1)}(\gamma r)). \quad (12)$$

Здесь и далее  $H_m^{(1)}(x)$  – функция Ханкеля первого рода  $m$ -го порядка [11].

Точечный источник возбуждает в неограниченной пластинке гармонические изгибные колебания, которые затухают на бесконечности. Это вытекает из условий излучения, которым удовлетворяет на бесконечности функция  $G$  (12):

$$G = O(1/\sqrt{r}), \quad \frac{\partial G}{\partial r} - i\gamma r = O(1/r\sqrt{r}), \quad r \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Теперь, выбирая совокупность контуров-разрезов  $L^{(3)}$  и  $L^{(4)}$ , можно моделировать тонкую пластинку с заданной системой дефектов и рассматривать дифракцию изгибной волны на выбранной системе контуров. Удовлетворение граничных условий (2) на контурах жестких включений и (4) на трещинах-разрезах (второе граничное условие интегрируется по дуговой координате  $s$ ) сводит поставленную краевую задачу к системе СИУ первого рода. Необходимые дополнительные условия для однозначной разрешимости этих уравнений (и определения неизвестных постоянных интегрирования на контурах трещин) вытекают из равенства нулю на каждом жестком включении главного вектора сил и главных моментов сил, действующих на этом включении, а в случае трещины предполагаем равенство нулю скачков прогиба в концах этой трещины.

**Дифракция стационарных волн сдвига на системе неоднородностей в полупространстве.** В условиях *антиплоской деформации* рассмотрим полупространство  $x_2 \geq 0$  с заземленной ( $A=1$ ) или свободной от сил ( $A=-1$ ) границей  $x_2=0$ , в случае неограниченного пространства принимаем  $A=0$ . Источники возбуждающего волнового поля полагаем заданными вне неоднородностей (область  $D_1$ ). В качестве такого источника может

быть излучающаяся из бесконечности гармоническая волна сдвига

$$W_0 = \tau e^{-i\gamma_1(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)}, \quad \tau = const, \quad (14)$$

где  $\theta$  – угол между нормалью к фронту волны и осью  $Ox_1$ ,  $\gamma_1 = \omega / c_1$  – волновое число,  $c_1$  – скорость распространения волны сдвига в области  $D_1$ .

В случае периодической задачи рассматривается нормально падающая волна ( $\theta = 0$ ).

Тогда при взаимодействии с границей полупространства  $x_2 = 0$  возникает отраженная волна с амплитудой

$$U_0 = \tau e^{-i\gamma_1(x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta)}. \quad (15)$$

Возбуждающее волновое поле в матрице может быть также вызвано действием сосредоточенного в некоторой точке  $Q(x_q, y_q)$  гармонического источника, для которого положим

$$f = \tau \mu_1 \delta(x_1 - x_q, x_2 - y_q). \quad (16)$$

Тогда амплитуда падающей волны  $W_0$  удовлетворяет уравнению ( $\mu_1$  – модуль сдвига,  $\rho_1$  – плотность матрицы)

$$\Delta W_0 + \gamma_1^2 W_0 = -\tau \delta(x_1 - x_q, x_2 - y_q). \quad (17)$$

Здесь решение уравнения (17) будем задавать в виде

$$W_0 = -\frac{\tau}{4i} H_0^{(1)}(\gamma_1 r_q), \quad r_q = |z - z_q|, \quad z = x_1 + ix_2, \quad z_q = x_q + iy_q. \quad (18)$$

Тогда отраженная от границы полупространства  $x_2 = 0$  волна имеет амплитуду

$$U_0 = -\frac{\tau}{4i} H_0^{(1)}(\gamma_1 r_q^*), \quad r_q^* = |z - \bar{z}_q|, \quad \bar{z}_q = x_q - iy_q. \quad (19)$$

При отсутствии неоднородностей общее волновое поле в полупространстве  $x_2 \geq 0$  равно

$$V_0 = W_0 - AU_0. \quad (20)$$

Сформулируем граничные условия на контурах неоднородностей.

1. В случае упругих включений, на контурах будем требовать выполнения условий сопряжения, вытекающих из непрерывности амплитуд перемещений и сдвиговых напряжений на границе раздела двух сред. В этом случае граничные условия на кривой  $L_j$  (рис. 1) таковы ( $n_0$  – положительная нормаль к  $L_j$ ):

$$W_1 + V_0 = W_2, \quad \mu_1 \frac{\partial}{\partial n_0}(W_1 + V_0) = \mu_2 \frac{\partial W_2}{\partial n_0}. \quad (21)$$

Соотношения (21) следует понимать как равенства граничных значений соответствующих величин при стремлении точки наблюдения к кривой  $L_j$  из области  $D_1$  или  $D_2$ .

2. В случае неподвижных включений на границе каждого включения будем требовать равенство нулю перемещения, то есть выполнения условия

$$W_1 + V_0 = 0. \quad (22)$$

3. Если цилиндр  $D_2^j$  перемещается как абсолютно жесткое тело, то на границе жесткого включения общее перемещение удовлетворяет следующему условию:

$$W_1 + V_0 = B_j \text{ на } L_j, \quad (23)$$

где  $B_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ) – неизвестные комплексные постоянные.

В случае разомкнутого криволинейного жесткого включения  $L_j$  граничное условие также имеет вид (23).

Дополнительные условия, необходимые для определения неизвестных постоянных, фигурирующих в (23), вытекают из закона Ньютона, описывающего движение каждого включения как абсолютно жесткого тела. В случае замкнутых жестких включений уравнение движения включения  $D_2^j$  имеет вид ( $\rho_e$  – плотность,  $S_e^j$  – площадь  $j$ -го включения).

$$\mu_1 \int_{L_j} \frac{\partial}{\partial n_0}(W_1 + W_0) ds_0 = -\rho_e S_e^j \omega^2 B_j, \quad j = \overline{1, M}, \quad (24)$$

а в случае разомкнутого жесткого включения  $L_j$  будем требовать равенство нулю главного вектора сил, действующих на этом включении.

4. На контуре каждой полости граничное условие имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}_0} (W_1 + V_0) = 0. \quad (25)$$

Краевое условие (25) имеет место также на контуре криволинейной трещины разреза  $L_j$ .

В результате взаимодействия падающей и отраженной от границы полупространства волн с неоднородностями (постановка краевых задач предполагает рассмотрение как конечных, так и периодических решеток) возникает отраженное  $W_1$  и проходящее  $W_2$  внутрь упругих включений (в случае присутствия упругих волокон в полупространстве) волновые поля перемещений, которые удовлетворяют в соответствующих областях уравнениям Гельмгольца

$$\Delta W_k + \gamma_k^2 W_k = 0, \quad \gamma_k = \omega c_k, \quad c_k = \sqrt{\mu_k / \rho_k}, \quad k = 1, 2. \quad (26)$$

Итак, решение *антиплоской задачи динамической теории упругости* о дифракции гармонической волны сдвига на конечной системе неоднородностей (рис. 1) сводится к решению уравнений Гельмгольца (26) с заданными краевыми условиями на границе неоднородностей. Отметим, что в области  $D_1$  решение уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее указанным граничным условиям, неоднозначно. Единственность решения обеспечивается удовлетворением рассеянной волной  $W_1$  условий излучения на бесконечности.

При моделировании дифрагированного поля в полупространстве будем использовать *метод зеркальных отображений*, сущность которого применительно к некоторому криволинейному контуру отражена на рис. 2.

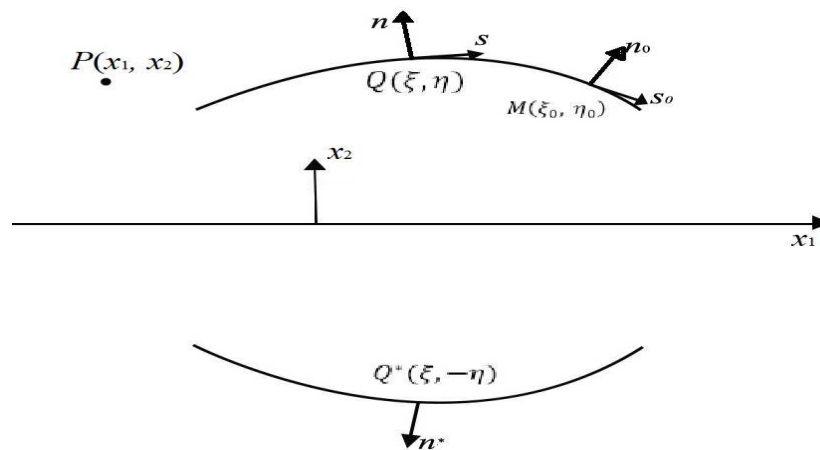


Рис. 2 – Метод зеркальных отображений в полупространстве.

Интегральные представления амплитуд перемещений  $W_1$  и  $W_2$  в матрице и внутри упругих включений (область  $D_2$ ), соответственно, запишем в виде

$$W_k(P) = \int_{L^1} f_k(s)(G_k(P, Q) - A\delta_{1k}G_k(P, Q^*))ds + \\ + \delta_{1k} \left( \int_{L^{(2,3)}} f(s)(G_1(P, Q) - AG_1(P, Q^*))ds - \int_{L^{(4)}} g(s) \left( \frac{\partial G_1}{\partial \vec{n}}(P, Q) - A \frac{\partial G_1}{\partial \vec{n}^*}(P, Q^*) \right) ds \right). \quad (27)$$

Здесь  $G_k(P, Q)$  – фундаментальное решение уравнения Гельмгольца (26) в соответствующей области ( $k = 1, 2$ ), что обеспечивает все желательные свойства функции  $W_k(P)$ .

Если рассматривается некоторая дифракционная краевая задача, то необходимо выбрать соответствующие интегральные представления амплитуд перемещений дифрагированного волнового поля и выполнить сформулированные граничные условия на совокупности  $L$  выбранных контуров. В результате будут получены интегральные уравнения данной краевой задачи. Далее следует определить тип этих уравнений на каждом контуре совокупности  $L$  и присоединить к ним, в случае необходимости, дополнительные условия, с помощью которых должны быть получены единственные решения исследуемой задачи.

Решение возникающих краевых задач показывает, что каждому неподвижному и подвижному жесткому включению, а также каждой трещине, отвечает СИУ первого рода. Каждой полости соответствует *интегральное уравнение Фредгольма второго рода*, а в случае упругого включения получается система СИУ первого рода и уравнение Фредгольма второго рода.

В качестве примера рассмотрим дифракцию гармонической волны сдвига (14) при  $\theta = 0$  на периодической

системе замкнутых неоднородностей. Периодическую функцию источника в полупространстве будем представлять с учетом выделения главной особенности (логарифмической), которая соответствует статическому случаю ( $\omega = 0$ ). Имеем [11]:

$$G_k(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| 2 \sin \frac{\pi(z - \zeta)}{2d} \right| + \frac{1}{2d} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ f_l^k(x_2 - \eta) - \delta_{lk} A g_l^k(x_2 + \eta) \right\} \cos \alpha_l (x_1 - \xi),$$

$$f_0^{(k)}(t) = \frac{e^{i\gamma_k |t|}}{2i\gamma_k} - \frac{|t|}{2}, \quad g_0^{(k)}(t) = \frac{e^{i\gamma_k t}}{2i\gamma_k}, \quad f_l^{(k)}(t) = \frac{e^{i\lambda_{kl}|t|}}{i\lambda_{kl}} + \frac{e^{-\alpha_l |t|}}{\alpha_l}, \quad g_l^{(k)}(t) = \frac{e^{i\lambda_{kl}t}}{i\lambda_{kl}}, \quad l \neq 0,$$

$$\lambda_{kl} = \sqrt{\gamma_k^2 - \alpha_l^2}, \quad \gamma_k > \alpha_l; \quad \lambda_{kl} = i\sqrt{\alpha_l^2 - \gamma_k^2}, \quad \gamma_k < \alpha_l. \tag{28}$$

Если до выделения статического члена в точке  $P = Q$  функциональный ряд, соответствующий функции  $G_k$ , расходился (общий член ряда ведёт себя как  $1/l$ ), то фигурирующий в (28) ряд сходится равномерно и абсолютно: при  $P \neq Q$  в силу присутствия затухающих экспонент, а при  $P = Q$  общий член ряда ведет себя как  $1/l^3$ . Действительно, в случае  $P = Q$  при больших  $l$  имеем

$$\frac{1}{\alpha_l} - \frac{1}{\sqrt{\alpha_l^2 - \gamma^2}} = \frac{\sqrt{\alpha_l^2 - \gamma^2} - \alpha_l}{\alpha_l \sqrt{\alpha_l^2 - \gamma^2}} = \frac{-\gamma^2}{\alpha_l \sqrt{\alpha_l^2 - \gamma^2} (\sqrt{\alpha_l^2 - \gamma^2} + \alpha_l)} \approx -\frac{\gamma^2}{2\alpha_l^3}. \tag{29}$$

Итак, при  $P = Q$  периодическая функция источника уравнения Гельмгольца имеет логарифмическую особенность, соответствующую периодической функции источника уравнения Лапласа (случай  $\omega = 0$ ).

С целью исследования сходимости построенных алгоритмов рассматривалась периодическая система однородных эллиптических неоднородностей (рис. 3).

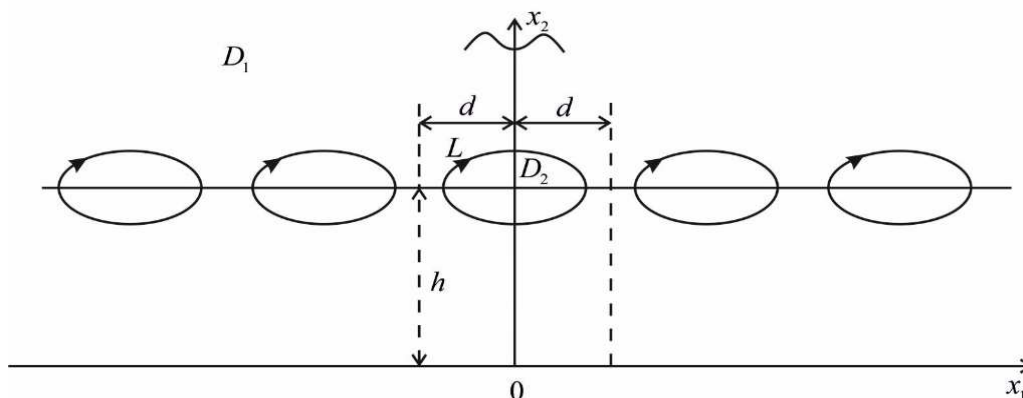


Рис. 3 – Периодическая система неоднородностей в полупространстве.

В ходе численной реализации на контурах эллипсов вычислялись безразмерные напряжения  $\sigma_n$  и  $\sigma_s$  путем деления соответствующих напряжений на  $\tau\epsilon_1$ . Численная реализация проводилась методами дискретных особенностей и механических квадратур. Численные эксперименты показали, что оба метода имеют приблизительно одинаковую эффективность. Точность вычислений, которая проверялась сравнением результатов при различных значениях узлов коллокации  $N$ , достигается приблизительно при одном и том же  $N$ . Причем замена метода никак не отражается на потере вычислительных ресурсов (память, быстродействие).

Влияние границы полупространства на распределения напряжений на контуре центрального эллипса (с полуосями  $a$  и  $b$ ) в случае периодической решетки, иллюстрируется на рис. 4 – 5. Выбраны такие геометрические параметры:  $a/b = 2h$ ;  $h/b = 4$ . На всех рисунках кривая 1 соответствует заземленному полупространству ( $A = 1$ ); кривая 2 – полупространству с границей, свободной от сил ( $A = -1$ ); кривая 3 – неограниченной среде ( $A = 0$ ). Во всех случаях полагалось  $\gamma_1 d = 4,5$  и отсчет угла  $\beta$  осуществлялся от теневой точки (ближайшей к прямой  $x_2 = 0$ ).

На рис. 4 приведены графики сдвигового напряжения  $\sigma_n$  на контуре центрального эллиптического неподвижного и подвижного жесткого ( $\rho_e / \rho_1 = 2$ ) включений в случае решеток, составленных из соответствующих включений.

Расчеты показывают, что жесткость включения понижает значение напряжения  $\sigma_n$ , если сравнивать с соответствующим значением в случае неподвижного включения. Анализ кривых распределения свидетельствует о существенном влиянии границы полупространства на значения напряжения  $\sigma_n$ . Особенно это проявляется в случае решетки, составленной из жестких эллиптических включений (рис. 4, b).



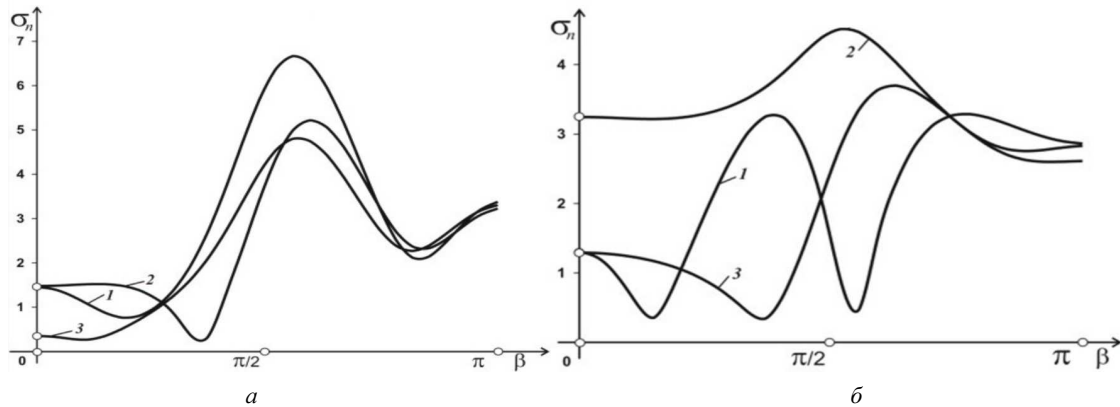


Рис. 4 – Напряжения  $\sigma_n$  на контуре в полупространстве: *a* – центрального неподвижного эллиптического включения; *б* – жесткого эллиптического включения.

На рис. 5 показаны кривые распределения сдвигового напряжения  $\sigma_s$  на границе центральной полости в случае периодической решетки, составленной из эллиптических полостей. Видно, что наиболее сильно напряжение  $\sigma_s$  проявляет себя в заземленном полупространстве. Как и в случае неограниченной среды ( $A = 0$ ), в полупространстве ( $A = \pm 1$ ) значения  $\sigma_s$  вблизи теневой и лобовой точек близки к нулю.

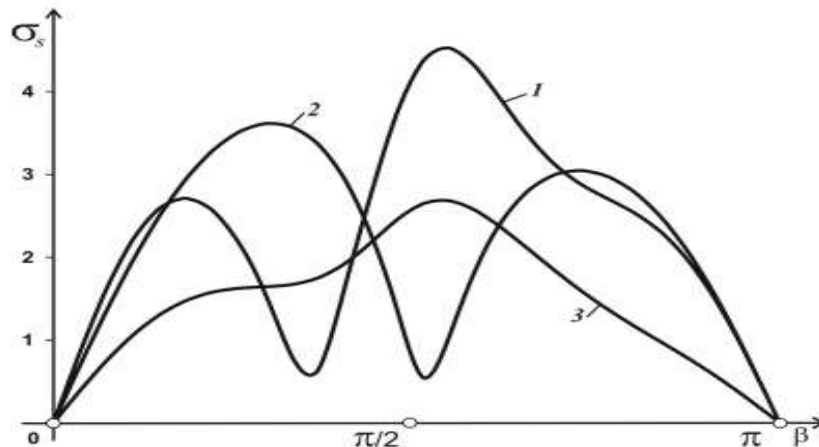


Рис. 5 – Распределение напряжения  $\sigma_s$  на контуре центрального эллиптического отверстия в полупространстве.

**Выводы.** В данной статье предложен новый метод энергетического моделирования дифракции упругих волн на неоднородностях различных типов, который основан на построении интегральных представлений перемещений дифрагированного волнового поля с помощью теоремы взаимности работ. Возникающие краевые задачи сводятся к системе интегральных уравнений, которые в совокупности с дополнительными условиями реализуются численно методами дискретных особенностей и механических квадратур.

**Список литературы:** 1. Подильчук Ю. Н., Рубцов Ю. К. Применение лучевых методов в задачах распространения и рассеивания волн (обзор) // Прикл. механика. – 1996. – Вып. 32. – № 12. – С. 3 – 27. 2. Крайцов Ю. А., Орлов Ю. И. О границах применимости метода геометрической оптики // Современные проблемы распространения и рассеивания волн. – 1979. – С. 76 – 195. 3. Гладкий А. В., Сергиенко И. В., Скопецкий В. В. Численно-аналитические методы исследования волновых процессов. – К.: Наукова думка, 2001. – 453 с. 4. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 318 с. 5. Гуляев Ю. В., Кравченко В. Ф., Рвачев В. Л., Сизова Н. Д. Исследование дифракции упругих волн на пластинах, ослабленных двумя отверстиями произвольной формы // ДАН. Математическая физика – 1996. – Вып. 349. – № 2. – С. 175 – 179. 6. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. – К.: Наукова думка, 1978. – 307 с. 7. Шульга Н. А., Колодий В. И. Дифракция волн сдвига на упругом включении некруговой цилиндрической формы // Механика композитных материалов. – 1981. – №1. – С. 153 – 156. 8. Feng Y., Wang Y., Zhang Z. Time domain BEM analysis of cylinder embedded in soil with frictional slip at the interface // Soil Dyn. Earthquake Eng. – 2003. – Vol. 23. – № 4. – P. 303 – 311. 9. Гандель Ю. В., Душкин В. Д. Математические методы двумерных задач дифракции: сингулярные интегральные уравнения и численные методы дискретных особенностей. – X.: АВВ МВСУ, 2012. – 544 с. 10. Довгий С. А., Лифанов И. К. Методы решения интегральных уравнений. Теория и приложения. – К.: Наукова думка, 2002. – 343 с. 11. Назаренко А. М. Вычислительные методы в задачах дифракции упругих волн на системах неоднородностей на базе сингулярных интегральных уравнений. – Сумы: СумДУ, 2015. – 220 с. 12. Попов В. Г. Взаимодействие плоских упругих волн с системами радиальных дефектов // Механика твердого тела. – 1999. – № 4. – С. 118 – 129. 13. Фильшитинский Л. А. Дифракция упругих волн на трещинах, отверстиях и включениях в изотропной среде // Механика твердого тела. – 1991. – № 4. – С. 119 – 127. 14. Фильшитинский Л. А., Москаленко Е. И. Исследование упругих волновых полей в неограниченной изотропной среде с включениями // Теор. и прикл. механика. – 2007. – Вып. 43. – С. 124 – 129. 15. Назаренко А. М., Фильшитинский Л. А. Взаимодействие волн напряжений с жесткими вставками в полупространстве (плоская деформация) // Механика твердого тела. – 1985. – № 4. – С. 95 – 102. 16. Назаренко А. М., Фильшитинский Л. А. Взаимодействие упругих волн с криволинейной трещиной в полуплоскости // Теор. и прикл. механика. – 1988. – Вып. 19. – С. 77 – 82. 17. Назаренко А. М., Острик В. И. Дифракция изгибных волн на криволинейной трещине и тонком включении в бесконечной пластинке // Проблемы машиностроения. – 1990. – Вып. 33. – С. 43 – 48. 18. Назаренко А. М. Моделирование взаимодействия гармонических  $P$ - и  $SV$ -с периодической сис-



темой криволинейных разрезов // Вестник ХНУ. – 2013. – Вып. 22. – № 1063. – С. 125 – 135. **19.** Назаренко А. М. Дифракция волн сдвига на цилиндрических включениях и полостях в упругом полупространстве // Проблемы прочности. – 1990. – №11. – С. 90 – 94. **20.** Назаренко А. М. Дифракция гармонических волн на цилиндрическом упругом включении в условиях плоской деформации // Динамические системы. – 2005. – Вып. 19. – С. 54 – 60. **21.** Ложкин О. М., Назаренко О. М. Дифракция пружных хвиль на периодических системах цилиндрических порожнин та жорстких включень // Акустичний вісник. – 2006. – Вып. 9. – №4. – С. 35 – 42. **22.** Назаренко А. М., Панченко Б. Е. Схема параллельных вычислений в задачах дифракции волн сдвига на системе отверстий в бесконечной изотропной среде // Проблемы программирования. – 2010. – № 2 – 3. – С. 604 – 610. **23.** Панченко Б. Е., Назаренко А. М. Каркасный анализ предметной области : стационарные динамические задачи теории упругости для изотропных сред с произвольными неоднородностями // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – №1. – С. 172 – 187. **24.** Панченко Б. Е., Сайко И. Н. Высокоточные максимальные напряжения в задаче о взаимодействии упругих волн с системой цилиндрических полостей в условиях плоской деформации // Кибернетика и системный анализ. – 2015. – № 5. – С. 120 – 127. **25.** Shibahara M., Taniuchi Y. Application of the integral equation method to the elastodynamic boundary-value problems // Bull JSME. – 1983. – Vol. 26. – № 222. – P. 2054 – 2059. **26.** Scarpetta E., Sumbatyan M. In-plane wave propagation through elastic solids with a periodic array of rectangular defects // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2001. – Vol. 69. – № 2. – P. 179 – 188.

**References:** 1. Podil'chuk, Y. N. and Rubtsov, J. K. Primeneniye luchevykh metodov v zadachakh rasprostraneniya i rassevaniya voln (obzor) [The use of radiological methods in the problems of propagation and scattering of waves (review)]. *Prikladnaya mekhanika* [J. Appl. Mechanics]. 1996, vol. 32, no. 12, pp. 3–27. 2. Kravtsov, Y. A. and Orlov, Y. I. O granitsakh primenimosti metoda geometricheskoj optiki [Limits of applicability of geometrical optics method]. *Sovremennyye problemy rasprostraneniya i rassevaniya voln* [Modern problems of propagation and scattering of waves]. 1979, pp. 76–195. 3. Gladkiy, A. V., Sergienko, I. V. and Skopetsky, V. V. *Chislennno-analiticheskiye metody issledovaniya volnovykh protsessov* [Numerical and analytical methods of studying wave processes]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2001. 453 p. 4. Zenkevich, O. and Morgan, K. *Konechnyye yelementy i approksimatsii* [Finite Elements and Approximation]. Moscow, Mir Publ., 1986. 318 p. 5. Gulyaev, Y. V., Kravchenko, V. F., Rvachev, V.L. and Sizova, N. D. Issledovaniye difraktsii uprugikh voln na platinakh, oslablennykh dvumya otverstiyami proizvol'noy formy [Investigation of diffraction of elastic waves on plates weakened by two holes of arbitrary shape]. *DAN Matematicheskaya fizika* [DAN. Mathematical Physics]. 1996, vol. 349, no. 2, pp. 175–179. 6. Guz', A. N., Kubenko, V. D. and Cherevko, M. A. *Difraktsiya uprugikh voln* [Diffraction of elastic waves]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1978. 307 p. 7. Shul'ga, N. A. and Kolodiy, V. I. Difraktsiya voln sdviga na uprugom vkluchenii nekrugovoy tsilindricheskoj formy [Diffraction of shear waves on an elastic inclusion of non-circular cylindrical shape]. *Mekhanika kompozitnykh materialov* [Mechanics of Composite Materials]. 1981, no. 1, pp. 153–156. 8. Feng, Y., Wang, Y. and Zhang, Z. Time domain BEM analysis of cylinder embedded in soil with frictional slip at the interface. *Soil Dyn. Earthquake Eng.* 2003, vol. 23, no. 4, pp. 303–311. 9. Gandel', Y. V. and Dushkin, V. D. *Matematicheskiye metody dvumernykh zadach difraktsii: singulyarnyye integral'nyye uravneniya i chislennyye metody diskretnykh osobennostey* [Mathematical methods of two-dimensional diffraction problems: singular integral equations and numerical methods of discrete singularities]. Kharkov, ABB MVSU Publ., 2012. 544 p. 10. Dovgiy, S. A. and Lifanov, I. K. *Metody resheniya integral'nykh uravneniy. Teoriya i prilozheniya* [Methods for solving integral equations. Theory and Applications]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2002. 343 p. 11. Nazarenko, A. M. *Vychislitel'nyye metody v zadachakh difraktsii uprugikh voln na sistemakh neodnorodnostey na baze singulyarnykh integral'nykh uravneniy* [Computational methods in problems of diffraction of elastic waves on inhomogeneity systems based on singular integral equations]. Sumy, SumDU Publ., 2015. 220 p. 12. Popov, V. G. Vzaimodeystviye ploskikh uprugikh voln s sistemami radial'nykh defektov [Interaction of plane elastic waves with the systems of radial defects]. *Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids]. 1999, no. 4, pp. 118–129. 13. Fil'shtinskiy, L. A. Difraktsiya uprugikh voln na treshhinakh, otverstiyakh i vklucheniyyakh v izotropnoy srede [Diffraction of elastic waves on cracks, holes and inclusions in isotropic medium]. *Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids]. 1991, no. 4, pp. 119–127. 14. Fil'shtinskiy, L. A. and Moskalenko, E. I. Issledovaniye uprugikh volnovykh poley v neogranichennoy izotropnoy srede s vklucheniyyami [Study of elastic wave fields in an infinite isotropic medium with inclusions]. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika* [Theor. and Appl. Mechanics]. 2007, vol. 43, pp. 124–129. 15. Nazarenko, A. M. and Fil'shtinskiy, L. A. Vzaimodeystviye voln napryazheniy s zhyestkimi vstavkami v poluprostranstve (ploskaya deformatsiya) [Interaction of stress waves with rigid insertions in a half space (plane deformation)]. *Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids]. 1985, no. 4, pp. 95–102. 16. Nazarenko, A. M. and Fil'shtinskiy, L. A. Vzaimodeystviye uprugikh voln s krivolineynoy treshhinoy v poluploskosti [Interaction of elastic waves with a curvilinear crack in the half plane]. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika* [Theor. and Appl. Mechanics]. 1988, vol. 19, pp. 77–82. 17. Nazarenko, A. M. and Ostriuk, V. I. Difraktsiya izgibnykh voln na krivolineynoy treshhine i tonkom vkluchenii v beskonечноy platinke [Diffraction of flexural waves on curved crack and thin inclusion in an infinite plate]. *Problemy mashinostroeniya* [Problems of mechanical engineering]. 1990, vol. 33, pp. 43–48. 18. Nazarenko, A. M. Modelirovaniye vzaimodeystviya garmonicheskikh P- i SV - s periodicheskoy sistemoy krivolineynykh razrezov [Modeling the interaction of harmonic P- and SV - with periodic system of curvilinear sections]. *Vestnik KhNU* [Bulletin of KhNU]. 2013, vol. 22, no. 1063, pp. 125–135. 19. Nazarenko, A. M. Difraktsiya voln sdviga na tsilindricheskikh vklucheniyyakh i polostyakh v uprugom poluprostranstve [Shear waves diffraction on cylindrical cavities and inclusions in an elastic half-space]. *Problemy prochnosti* [Structural robustness problems]. 1990, no. 11, pp. 90–94. 20. Nazarenko, A. M. Difraktsiya garmonicheskikh voln na tsilindricheskom uprugom vkluchenii v usloviyakh ploskoy deformatsii [Diffraction of harmonic waves on cylindrical elastic inclusion under plane strain]. *Dinamicheskiye sistemy* [Dynamical Systems]. 2005, vol. 19, pp. 54 – 60. 21. Lozhkin, O. M. and Nazarenko, O. M. Difraktsiya pruzhnykh khvyl' na periodichnykh sistemakh tsilindrichnykh porozhnyn ta zhorstkykh vkluchen' [Diffraction of elastic waves on periodic systems of cylindrical cavities and rigid inclusions]. *Akustichnyy visnyk* [Acoustic Bulletin]. 2006, vol. 9, no. 4, pp. 35–42. 22. Nazarenko, A. M. and Panchenko, B. E. Skhema parallel'nykh vychisleniy v zadachakh difraktsii voln sdviga na sisteme otverstiy v beskonечноy izotropnoy srede [A scheme of parallel computations in the problems of diffraction of shear waves on a cavity system in an infinite isotropic medium]. *Problemy programmirovaniya* [Problems of programming]. 2010, no. 2–3, pp. 604–610. 23. Panchenko, B. E. and Nazarenko, A. M. Karkasnyy analiz predmetnoy oblasti: statsionarnyye dinamicheskiye zadachi teorii uprugosti dlya izotropnykh sred s proizvol'nymi neodnorodnostyami [Frame domain analysis: stationary dynamic problems of elasticity theory for isotropic media with random inhomogeneities]. *Kibernetika i sistemnyy analiz* [Cybernetics and System Analysis]. 2013, no. 1, pp. 172–187. 24. Panchenko, B. E. and Sayko, I. N. Vysokotochnyye maksimal'nyye napryazheniya v zadache o vzaimodeystviy uprugikh voln s sistemoy tsilindricheskikh polostey v usloviyakh ploskoy deformatsii [Precision maximum stresses in the problem of the interaction of elastic waves with cylindrical cavity system under plane strain]. *Kibernetika i sistemnyy analiz* [Cybernetics and System Analysis]. 2015, no. 5, pp. 120–127. 25. Shibahara, M. and Taniuchi, Y. Application of the integral equation method to the elastodynamic boundary-value problems. *Bull JSME*. 1983, vol. 26, no. 222, pp. 2054–2059. 26. Scarpetta, E. and Sumbatyan, M. In-plane wave propagation through elastic solids with a periodic array of rectangular defects. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 2001, vol. 69, no. 2, pp. 179–188.

Поступила (received) 27.03.2016

Відомості про автора / Сведения об авторе / Information about author

**Назаренко Олександр Максимович** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Сумський державний університет, м. Суми; тел.: (066) 921-55-34; e-mail: aleksandr-nazarenko54@mail.ru.

**Назаренко Александр Максимович** – кандидат физико-математических наук, доцент, Сумской государственной университет, г. Сумы; тел.: (066) 921-55-34; e-mail: aleksandr-nazarenko54@mail.ru.

**Nazarenko Aleksandr Maksimovich** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Sumy State University, Sumy; tel.: (066) 921-55-34; e-mail: aleksandr-nazarenko54@mail.ru.