Belianska Alexandra Rostislavovna – Candidate of Engineering Sciences, Senior Lecturer, Department of Chemical Technology of Inorganic Substances, Dniprovsky State Technical University, Kamenskoe; tel.: (097) 517-57-67; e-mail: belyans@ukr.net.

Волошин Микола Дмитрович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри Хімічна технологія неорганічних речовин Дніпровського державного технічного університету, м. Кам'янське; тел.: (097) 517-57-67; e-mail: voloshin@ua.fm.

Волошин Николай Дмитриевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедры Химическая технология неорганических веществ Днепровского государственного технического университета, г. Каменское; тел.: (097) 517-57-67; e-mail: voloshin@ua.fm.

Voloshin Nikolai Dmitrievich – Doctor of Engineering Sciences, Professor, Head of the Department of Chemistry of Inorganic Substances, Dniprovsky State Technical University, Kamenskoe; tel.: (097) 517-57-67; e-mail: voloshin@ua.fm.

УДК 519.6

В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСЬКИЙ

ПРО РУХ МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА

З використанням періодичних еліптичних функцій Якобі одержано два варіанти аналітичного розв'язку нелінійного диференціального рівняння руху. Виведено замкнені формули для обчислення переміщень маятника у часі та періодів коливань, спричинених початковим відхиленням маятника від вертикального положення або наданою йому в цьому положенні початковою швидкістю. Наведено приклади розрахунків, де показано, що результати обчислень переміщень за виведеними формулами добре узгоджуються з результатами числового розв'язку задачі Коші на комп'ютері.

Ключові слова: математичний маятник, пружний осцилятор, вільні коливання, задача Коші, аналітичні розв'язки, еліптичні функції.

С использованием периодических эллиптических функций Якоби получены два варианта аналитического решения нелинейного дифференциального уравнения движения. Выведены замкнутые формулы для вычисления перемещений маятника во времени и периодов колебаний, вызванных начальным отклонением маятника от вертикального положения или данной ему в этом положении начальной скоростью. Приведены примеры расчётов, в которых показано, что результаты вычисления перемещений по выведенным формулам хорошо согласуются с результатами численного решения задачи Коши на компьютере.

Ключевые слова: математический маятник, упругий осциллятор, свободные колебания, задача Коши, аналитические решения, эллиптические функции.

Two variants of the analytical solution to the nonlinear differential equation of motion are obtained using Jacobi periodic elliptic functions. Closed formula for computing the displacements of the pendulum in time and the periods of its oscillations, induced by the initial deflection from the vertical position or initial velocity communicated to the pendulum in this position, are derived. The computational examples are given. The results of calculating the displacements using the derived formula are in close agreement with the numerical results of solving the Cauchy problem using computer.

Key words: mathematical pendulum, elastic oscillator, frees oscillations, Cauchy problem, analytical solutions, elliptic functions.

Вступ. Задача руху математичного маятника відноситься до класичних в теорії нелінійних механічних коливань. Їй приділялась значна увага не тільки в науковій, а і в навчальній літературі. Рівняння руху математичного маятника має точний аналітичний розв'язок, який традиційно використовують для визначення похибок різних наближених аналітичних методів механіки, зокрема при визначенні залежності періоду і частоти від амплітуди коливань нелінійної системи [1 – 3]. При цьому значно менше уваги приділялося дослідженню самого руху, тобто аналізу переміщення маятника як функції часу.

Для розрахунку переміщень часто використовують лінійний варіант теорії так званих *малих* коливань, коли похибки наближення зростають при збільшенні амплітуд коливань маятника [1, 4 – 7]. Зустрічаються роботи, де математичний маятник ототожнюють з фізичним маятником, рухи яких описуються однотипними диференційними рівняннями, що відрізняються лише сталими коефіцієнтами. Але для фізичного маятника не потрібні такі обмеження на амплітуди коливань, які доводиться вводити для математичного маятника, щоб забезпечувалась його стійкість руху. Тому заслуговує уваги черговий аналіз зазначеної класичної задачі.

Метою статті є виведення замкнутих розрахункових формул для обчислення переміщень математичного маятника у часі, перевірка їх вірогідності та доведення можливості використання для аналізу руху нелінійного механічного осцилятора, коли він є пружним аналогом математичного маятника. У математичного маятника роль відновлюючої сили виконує сила гравітації, тоді як у його аналога такою є сила пружності пружини.

Постановка задачі. Математичним маятником тут вважаємо таку коливальну систему з одним ступенем вільності, що традиційно визначена в теоретичній механіці, а саме конструктивно це невагома нерозтяжна нитка, один кінець якої закріплено в нерухомому циліндричному шарнірі, а на другому кінці прикріплена вагома матеріальна точка [3 – 5].

Рух такого маятника описуємо загальновідомим диференціальним рівнянням:

$$\ddot{\Theta}+\frac{g}{l}\sin\Theta=0\,, \tag{1}$$

у якому Θ – кут відхилення розтягнутої нитки від вертикалі $\Theta=0$; g – прискорення вільного падіння; l – довжина нитки; крапка означає похідну за часом t.

Оскільки нитка не чинить опору стисканню, то кут Θ повинен задовольняти нерівності:

$$\left|\Theta\right|\le\pi/2\,. \tag{2}$$

У супротивному випадку на деяких ділянках, біля кінців траєкторії, нитка не буде розтягнутою складовою сили гравітації та відцентровою силою, а тому вся траєкторія вже не буде дугою кола радіуса l, і порушиться стійкість руху математичного маятника та втратить чинність рівняння (1). Про це йдеться в [3], де визначають умови злипання нитки.

Далі ставимо задачу одержати точні аналітичні розв'язки рівняння (1) для двох варіантів початкових умов:

$$1)\ \Theta(0)=\Theta_0,\ \dot{\Theta}(0)=0;\qquad 2)\ \Theta(0)=0,\ \dot{\Theta}(0)=\dot{\Theta}_0=v_0/l. \tag{3}$$

У першому випадку рух спричинено початковим відхиленням маятника на кут Θ_0 від вертикального положення, а в другому – наданою йому в цьому положенні кутовою швидкістю $\dot{\Theta}_0$ або лінійною швидкістю v_0 кінця маятника (матеріальної точки).

Перша форма розв'язку задачі Коші. Для інтегрування рівняння (1) йому надаємо форму:

$$\dot{\Theta}\frac{d\dot{\Theta}}{d\Theta}=-\frac{g}{l}\sin\Theta. \tag{4}$$

Інтеграл рівняння (4), з точністю до сталої c, має вигляд:

$$\frac{d\Theta}{dt}=\dot{\Theta}=\pm\frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{l}}\sqrt{\cos\Theta+c}. \tag{5}$$

У випадку початкових умов 1) в (3) стала c приймає значення $c=-\cos\Theta_0$ і, згідно з (5), кутова швидкість руху описується виразом:

$$\frac{d\Theta}{dt}=-\frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{l}}\sqrt{\cos\Theta-\cos\Theta_0}.$$

Тому другим інтегралом рівняння руху є

$$\int_{\Theta}^{\Theta_0}\frac{d\Theta}{\sqrt{\cos\Theta-\cos\Theta_0}}=\frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{l}}t \tag{6}$$

або

$$\int_{\Theta}^{\Theta_0}\frac{d\Theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\Theta_0}{2}-\sin^2\frac{\Theta}{2}}}=2\sqrt{\frac{g}{l}}t\,. \tag{7}$$

Далі, користуючись формулами

$$\sin\frac{\Theta}{2}=u\sin\frac{\Theta_0}{2},\ \ d\Theta=2\sin\frac{\Theta_0}{2}\frac{du}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\Theta}{2}}}=\frac{2du}{\sqrt{\sin^{-2}\frac{\Theta_0}{2}-u^2}},$$

перейдемо до нової змінної інтегрування і в (7). Тоді:

$$\int_{z}^{1}\frac{du}{\sqrt{\left(1-u^2\right)\left(\sin^{-2}\frac{\Theta_0}{2}-u^2\right)}}=\sqrt{\sin\frac{\Theta_0}{2}}\sqrt{\frac{g}{l}}t, \tag{8}$$

де $z=\dfrac{\sin\left(\Theta/2\right)}{\sin\left(\Theta_0/2\right)}$.

Ліва частина одержаного співвідношення зводиться до неповного інтеграла першого роду $F(\varphi,k)$, бо згідно з [8, стор. 260]

$$\int_{z}^{b}\frac{dy}{\sqrt{(a^2-y^2)(b^2-y^2)}}=\frac{1}{a}F(\varphi,k). \tag{9}$$

Тут $a>b\ge y\ge 0;\ \ \varphi=\arcsin\dfrac{a}{b}\sqrt{\dfrac{b^2-z^2}{a^2-z^2}},\ \ k=\dfrac{b}{a}.$

Тому, поклавши в (8) і (9): $b=1,\ a=1/\sin\frac{\Theta_0}{2}$, отримуємо

$$F\left(\varphi,\sin\frac{\Theta_0}{2}\right)=\tau=\sqrt{\frac{g}{l}}t;\ \ z=\frac{\sin\Theta/2}{\sin\Theta_0/2}=\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\sin^2(\Theta_0/2)\sin^2\varphi}}. \tag{10}$$

Звідки випливає, що

$$\Theta(t)=2\arcsin\frac{\sin\frac{\Theta_0}{2}cn\left(\tau,\sin\frac{\Theta_0}{2}\right)}{\sqrt{\cos^2\frac{\Theta_0}{2}+\left[\sin\frac{\Theta_0}{2}cn\left(\tau,\sin\frac{\Theta_0}{2}\right)\right]^2}}, \tag{11}$$

де $cn\left(\tau,\sin\frac{\Theta_0}{2}\right)$ – відповідне значення *еліптичного косинуса Якобі.*

Формула (11) описує рух маятника у першій чверті циклу коливань з періодом T, що легко поширити і на більші значення t.

У околах граничних точок вказаного проміжку маємо:

$$\tau\to 0,\ cn\left(\tau,\sin\frac{\Theta_0}{2}\right)\to 1,\ \Theta\to\Theta_0;\quad \tau\to T/4,\ cn\left(\tau,\sin\frac{\Theta_0}{2}\right)\to 0,\ \Theta\to 0.$$

Поклавши в (10) $t=T/4;\ \varphi=90^\circ$, одержуємо формулу для обчислення періоду коливань:

$$T=4\sqrt{\frac{l}{g}}F\left(90^\circ,\sin\frac{\Theta_0}{2}\right)=4\sqrt{\frac{l}{g}}K\left(\sin\frac{\Theta_0}{2}\right). \tag{12}$$

Тут $K\left(\sin\frac{\Theta_0}{2}\right)$ – відповідне значення повного *еліптичного інтеграла першого роду*, затабульованого в [9, стор. 114]. Тому, при визначенні періоду коливань, зручно використовувати вказану таблицю.

Для малих амплітуд Θ_0: $cn\left(\tau,\sin\frac{\Theta_0}{2}\right)\to\cos\tau,\ \sin\frac{\Theta_0}{2}\to\frac{\Theta_0}{2}$ і (11) наближено переходить у рівність

$$\Theta(t)=\Theta_0\cdot\cos\tau, \tag{13}$$

що відповідає лінійній теорії *малих* коливань маятника [4, 7].

Побудуємо далі аналітичний розв'язок рівняння (1) при початкових умовах 2) в (3). Щоб виконувалась нерівність (2), вводимо обмеження і на швидкість v_0, а саме приймаємо:

$$0<v_0\le\sqrt{2gl}\ .$$

Швидкості v_0 відповідає амплітуда коливань

$$\Theta_0=\arccos\left(1-\frac{v_0^2}{2gl}\right). \tag{14}$$

Тому, аналогічно з (7), другий інтеграл рівняння руху має вигляд:

$$\int_0^z\frac{du}{\sqrt{\left(1-u^2\right)\left(\sin^{-2}\frac{\Theta_0}{2}-u^2\right)}}=\sqrt{\sin\frac{\Theta_0}{2}}\sqrt{\frac{g}{l}}t. \tag{15}$$

Ліва частина цього виразу теж зводиться до неповного еліптичного інтеграла першого роду. Згідно з [8, стор. 260]

$$\int_0^z\frac{dy}{\sqrt{\left(a^2-y^2\right)\left(b^2-y^2\right)}}=\frac{1}{a}F\left(\varphi_1,k\right), \tag{16}$$

причому $a>b\ge y\ge 0;\ \varphi_1=\arcsin\frac{z}{b}$.

Поклавши в (16) $b=1,\ a=\sin^{-1}\frac{\Theta_0}{2}$, отримуємо:

$$F\left(\varphi_1,\sin\frac{\Theta_0}{2}\right)=\tau,\ \ \frac{\sin\Theta/2}{\sin\Theta_0/2}=\sin\varphi_1.$$

Звідки випливає, що

$$\Theta(t) = 2\arcsin\left[\sin\frac{\Theta_0}{2} sn\left(\tau, \sin\frac{\Theta_0}{2}\right)\right]. \tag{17}$$

Тут $sn\left(\tau, \sin\frac{\Theta_0}{2}\right)$ –відповідне значення *еліптичного синуса Якобі*, а Θ_0 пов'язано з v_0 залежністю (14).

Формула (17) описує рух математичного маятника в першій чверті циклу коливань, що потім легко поширити і на більші t .

У околах граничних точок вказаного проміжку маємо:

$$\tau \to 0,\ \sin\left(\tau, \sin\frac{\Theta_0}{2}\right) \to 0,\ \Theta \to 0;\ \ \tau \to T/4,\ \sin\left(\tau, \sin\frac{\Theta_0}{2}\right) \to 1,\ \Theta \to \Theta_0.$$

Період коливань залежить від v_0 і визначається за формулою (12), в якій

$$\sin\frac{\Theta_0}{2} = \frac{v_0}{2\sqrt{gl}} \text{ або } \Theta_0 = 2\arcsin\frac{v_0}{2\sqrt{gl}}.$$

При малих амплітудах коливань $sn\left(\tau, \sin\frac{\Theta_0}{2}\right) \to \sin\tau,\ \sin\frac{\Theta_0}{2} \to \frac{\Theta_0}{2}$, і формула (17) має наближення

$$\Theta(t) = \Theta_0 \cdot \sin\tau, \tag{18}$$

що відповідає лінійній теорії коливань маятника [4, 7].

В рамках лінійної теорії $K\left(\sin\frac{\Theta_0}{2}\right) \to \frac{\pi}{2}$ і, згідно з (12), $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, що теж є загальновідомим результатом.

Друга форма розв'язку задачі Коші. Її одержимо, використовуючи табличні інтеграли [8, стор.168] або [10, стор. 197], де

$$\int_0^{\omega} \frac{dy}{\sqrt{\cos y - a}} = \sqrt{2}F(\varphi_*, k_*),\ \ \varphi_* = \arcsin\sqrt{\frac{1-\cos\omega}{1-a}},\ \ k_* = \sqrt{\frac{1-a}{2}},\ \ |a| \le 1. \tag{19}$$

Для початкових умов 1) в (3), згідно з (6), (19), маємо:

$$\int_{\Theta}^{\Theta_0} \frac{d\Theta}{\sqrt{\cos\Theta - \cos\Theta_0}} = \int_0^{\Theta_0} \frac{d\Theta}{\sqrt{\cos\Theta - \cos\Theta_0}} - \int_0^{\Theta} \frac{d\Theta}{\sqrt{\cos\Theta - \cos\Theta_0}} = \sqrt{2}F\left(90^\circ, k_*\right) - \sqrt{2}F(\varphi_*, k_*) = \sqrt{2}\sqrt{\frac{g}{l}}t. \tag{20}$$

Оскільки $a = \cos\Theta_0$, то $k_* = k = \sin\frac{\Theta_0}{2}$. Тому вираз (20) набуває форму:

$$F\left(\varphi_*, \sin\frac{\Theta_0}{2}\right) = \tau_* = K\left(\sin\frac{\Theta_0}{2}\right) - \tau.$$

Звідки випливає, що

$$\Theta(t) = \arccos\left[1 - 2\sin^2\frac{\Theta_0}{2} sn^2\left(\tau_*, \sin\frac{\Theta_0}{2}\right)\right]. \tag{21}$$

Зазначимо, що розв'язки (11) і (21) рівнозначні. Вони приводять до однакових числових результатів.

Період коливань T , як і раніше, визначається за формулою (12).

У випадку початкових умов 2) в (3), згідно з (15) і (19), маємо:

$$\Theta(t) = \arccos\left[1 - \frac{v_0^2}{2gl} sn^2(\tau, k_*)\right], \tag{22}$$

де $k_* = \frac{v_0}{2\sqrt{gl}}$.

Період коливань теж залежить від v_0 і визначається за формулами (12), (14).

Розв'язок (22) рівносильний розв'язку (17).

Приклади розрахунків.

Приклад 1. Обчислимо значення Θ для заданих t , якщо коливання маятника спричинені початковим відхиленням від вертикального положення на кут $\Theta_0 = 80^\circ$. Для такого початкового відхилення в таблиці [9, стор. 114] $K(\sin 40^\circ) = 1,7868$. Тому, задаючи $\tau = \sqrt{g/l}t$, легко знайти τ_* , а потім по таблиці неповного еліптичного інтеграла першого роду методом лінійної інтерполяції визначити і $sn(\tau_*, \sin 40^\circ)$. Одержані числові результати занесено до табл. 1.

Таблиця 1 – Значення $\Theta(t)$, обчислені різними способами при $\Theta_0 = 80^\circ$

τ	τ_*	Θ , град., формула (21)	Θ , град., числовий метод	Θ , град., формула (13)
0,0000	1,7868	80	80,002	80
0,4496	1,3372	74,317	74,318	72,050
0,8695	0,9173	58,997	58,997	51,617
1,2534	0,5334	37,494	37,494	24,968
1,6119	0,1749	12,817	12,817	-3,287
1,7868	0,0000	0,0000	0,0000	-17,146

В табл. 1 результати обчислень за формулою (21) добре узгоджуються з результатами числового інтегрування рівняння (1) на комп'ютері, тоді як лінійна теорія, формула (13), дає суттєві похибки.

Приклад 2. Обчислимо $\Theta(t)$ для значення t, при коливаннях маятника довжиною $l = 2$ м, спричинених лінійною початковою швидкістю $v_0 = 5,081$ м/с . Результати обчислень за формулою (22) та іншими способами, записано в табл. 2

Таблиця 2 – Значення Θ , обчислені різними способами при $v_0 = 5,081$ м/с

τ	Θ , град., формула (22)	Θ , град., числовий метод	Θ , град., формула (18)
0,0000	0,000	0,0000	0,000
0,3514	22,625	22,626	24,095
0,7162	43,267	43,264	45,957
1,1049	59,565	59,565	62,539
1,5187	68,781	68,783	69,905
1,7312	69,996	69,998	69,101

Тут результати обчислень за формулою (22) теж добре узгоджуються з результатами числового комп'ютерного інтегрування рівняння (1), а лінійна теорія, формула (18), дає менші похибки, ніж у першому прикладі, бо коливання мають меншу амплітуду.

Висновки. Встановлено існування різних форм аналітичного розв'язку рівняння руху математичного маятника, які призводять до однакових числових результатів. Виведені формули дають можливість оцінювати похибки лінійного наближення в задачі руху математичного маятника.

Список літератури

1. *Бабаков И. М.* Теория колебаний. – М. : Дрофа, 2004. – 591 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М. : Наука, 1974. – 504 с.
3. *Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Н.* Курс теоретической механики. Т. 2 : Динамика. – М. : Наука, 1985. – 496 с.
4. *Старжинский В. М.* Теоретическая механика. – М. : Наука, 1980. – 464 с.
5. *Кошляков В. Н.* Краткий курс теоретической механики. – Киев : Вища школа, 1993. – 311 с.
6. *Лойцянский Л. Г., Лурье А. И.* Курс теоретической механики : Т. 2. – М. : Дрофа, 2006. – 720 с.
7. *Кузьо І. В., Зінько Я. А., Ванькович Т.-Н. М.* Теоретична механіка. – Харків : Фоліо, 2017. – 780 с.
8. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М. : Наука, 1962. – 1100 с.
9. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. – М. : Наука, 1977. – 344 с.
10. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М. : Наука, 1981. – 800 с.

References (transliterated)

1. Babakov I. M. *Teoriya kolebaniy* [Oscillation Theory]. Moscow, Drofa Publ., 2004. 591 p.
2. Bogolyubov N. N., Mitropol'skiy Yu. A. *Asimptoticheskie metody v teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic Methods in Nonlinear Oscillation Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 504 p.
3. Butenin N. V., Lunts Ya. L., Merkin D. R. *Kurs teoreticheskoy mekhaniki. Vol. 2 : Dinamika* [Course in Theoretical Mechanics. Vol. 2: Dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 496 p.
4. Starginskiy V. M. *Teoreticheskaya mekhanika* [Theoretical Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 464 p.
5. Koshlyakov V. N. *Kratkiy kurs teoreticheskoy mekhaniki* [Short Course in Theoretical Mechanics]. Kyiv, Vyscha shkola Publ., 1993. 311 p.
6. Loytsyanskiy L. G., Lur'e A. I. *Kurs teoreticheskoy mekhaniki : Vol. 2* [Cource in Theoretical Mechanics: Vol. 2]. Moscow, Drofa Publ., 2006. 720 p.
7. Kuz'o I. V., Zin'ko Ya. A., Van'kovych T.-N. M. *Teoretychna mekhanika* [Theoretical Mechanics]. Kharkiv, Folio Publ., 2017. 780 p.
8. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Tables of Integrals, Sums, Series, and Products]. Moscow, Nauka Publ., 1962. 1100 p.
9. Yanke E., Emde F., Lesh F. *Spetsial'nye funktsii* [Special Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 344 p.
10. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integraly i ryady. Yelementarnye funktsii* [Integrals and Series. Elementary Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 800 p.

Надійшла (received) 31.08.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Про рух математичного маятника / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 81 – 86.

Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2222-0631.

О движении математического маятника / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 81 – 86. Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2222-0631.

On the motion of mathematical pendulum / V. P. Olshanskiy, S. V. Olshanskiy // Bulletin of National Technical University «KhPI». Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 30 (1252). – pp. 81 – 86. Bibliog.: 10 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ольшанський Василь Павлович – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Ольшанский Василий Павлович – доктор физико-математических наук, профессор, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени П. Василенко, г. Харьков; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Olshanskiy Vasiliy Pavlovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture, Kharkov; tel.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Ольшанський Станіслав Васильович – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

Ольшанский Станислав Васильевич – кандидат физико-математических наук, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени П. Василенко, г. Харьков; тел.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

Olshanskiy Stanislav Vasilevich – PhD in Physics and Mathematics, Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture, Kharkov; tel.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

УДК 539.3; 534.1

В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСЬКИЙ

ПРО ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ОСЦИЛЯТОРА З КУБІЧНО НЕЛІНІЙНОЮ СИЛОВОЮ ХАРАКТЕРИСТИКОЮ

Описано нелінійні коливання системи з одним ступенем вільності, що має лінійну (від’ємну) і кубічну (додатну) складові у виразі силової характеристики, при позитивному переміщенню системи. Розглянуто три можливих режими руху, в залежності від наданої амплітуди коливань в момент початку руху. Два з них проходять відносно центру, в положенні стійкої рівноваги, а третій – відносно сідлової точки, в положенні нестійкої рівноваги. Побудовано замкнуті аналітичні розв’язки нелінійної задачі Коші, з використанням періодичних еліптичних функцій. Запропоновано наближені подання вказаних спеціальних функцій комбінацією елементарних функцій, що спрощує використання аналітичних розв’язків. Наведено чисельні приклади розрахунків, де показано, що результати обчислень на підставі одержаних розв’язків добре узгоджуються з результатами числового комп’ютерного інтегрування рівняння руху.

Ключові слова: вільні коливання, нелінійне диференціальне рівняння руху, аналітичний розв’язок, періодичні еліптичні функції.

Описаны нелинейные колебания системы с одной степенью свободы, которая имеет линейную (отрицательную) и кубическую (положительную) составляющие в выражении силовой характеристики при позитивном перемещении системы. Рассмотрены три возможных режима движения в зависимости от приданной амплитуды колебаний в момент начала движения. Два из них проходят относительно центра, в положении устойчивого равновесия, а третий – относительно седловой точки, в положении неустойчивого равновесия. Построены замкнутые аналитические решения нелинейной задачи Коши, с использованием периодических эллиптических функций. Предложены приближённые представления указанных специальных функций комбинацией элементарных функций, что упрощает применение аналитических решений в расчётах. Приведены численные примеры расчётов, в которых показано, что результаты расчётов на основе полученных решений хорошо согласуются с результатами численного компьютерного интегрирования уравнения движения.

Ключевые слова: свободные колебания, нелинейное дифференциальное уравнение движения, аналитическое решение, периодические эллиптические функции.

The paper deals with nonlinear oscillations of a system with one degree of freedom having a linear (negative) and a cubic (positive) components in the power characteristic under the positive motion of the system. Three possible motion modes depending on the oscillation amplitude communicated at the beginning of the motion are considered. Two of the motion modes are at the vicinity of the center, which is a stable equilibrium point, and the third one is at the vicinity of the saddle point, which is a point of unstable equilibrium. Closed analytical solutions for the nonlinear Cauchy problem are obtained using periodic elliptic functions. Approximations of the elliptic functions by a combination of elementary functions are presented which simplifies applying the analytical solutions in computations. The examples of numerical computations given in the paper confirm good compliance of the computational results based on the obtained solutions with the results of numerical computer integration of the equation of motion.

Key words: free oscillations, nonlinear differential equation of motion, analytical solution, periodic elliptic function.