

Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2222-0631.

О движении математического маятника / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 81 – 86. Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2222-0631.

On the motion of mathematical pendulum / V. P. Olshanskiy, S. V. Olshanskiy // Bulletin of National Technical University «KhPI». Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 30 (1252). – pp. 81 – 86. Bibliog.: 10 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ольшанський Василь Павлович – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Ольшанский Василий Павлович – доктор физико-математических наук, профессор, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени П. Василенко, г. Харьков; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Olshanskiy Vasily Pavlovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture, Kharkov; tel.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Ольшанський Станіслав Васильович – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

Ольшанский Станислав Васильевич – кандидат физико-математических наук, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени П. Василенко, г. Харьков; тел.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

Olshanskiy Stanislav Vasilevich – PhD in Physics and Mathematics, Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture, Kharkov; tel.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

УДК 539.3; 534.1

В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСЬКИЙ

ПРО ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ОСЦИЛЯТОРА З КУБІЧНО НЕЛІНІЙНОЮ СИЛОВОЮ ХАРАКТЕРИСТИКОЮ

Описано нелінійні коливання системи з одним ступенем вільності, що має лінійну (від'ємну) і кубічну (додатну) складові у виразі силової характеристики, при позитивному переміщенні системи. Розглянуто три можливих режими руху, в залежності від наданої амплітуди коливань в момент початку руху. Два з них проходять відносно центру, в положенні стійкої рівноваги, а третій – відносно сідлової точки, в положенні нестійкої рівноваги. Побудовано замкнуті аналітичні розв'язки нелінійної задачі Коші, з використанням періодичних еліптичних функцій. Запропоновано наближені подання вказаних спеціальних функцій комбінацією елементарних функцій, що спрощує використання аналітичних розв'язків. Наведено чисельні приклади розрахунків, де показано, що результати обчислень на підставі одержаних розв'язків добре узгоджуються з результатами числового комп'ютерного інтегрування рівняння руху.

Ключові слова: вільні коливання, нелінійне диференціальне рівняння руху, аналітичний розв'язок, періодичні еліптичні функції.

Описаны нелинейные колебания системы с одной степенью свободы, которая имеет линейную (отрицательную) и кубическую (положительную) составляющие в выражении силовой характеристики при позитивном перемещении системы. Рассмотрены три возможных режима движения в зависимости от приданной амплитуды колебаний в момент начала движения. Два из них проходят относительно центра, в положении устойчивого равновесия, а третий – относительно седловой точки, в положении неустойчивого равновесия. Построены замкнутые аналитические решения нелинейной задачи Коши, с использованием периодических эллиптических функций. Предложены приближенные представления указанных специальных функций комбинацией элементарных функций, что упрощает применение аналитических решений в расчётах. Приведены численные примеры расчётов, в которых показано, что результаты расчётов на основе полученных решений хорошо согласуются с результатами численного компьютерного интегрирования уравнения движения.

Ключевые слова: свободные колебания, нелинейное дифференциальное уравнение движения, аналитическое решение, периодические эллиптические функции.

The paper deals with nonlinear oscillations of a system with one degree of freedom having a linear (negative) and a cubic (positive) components in the power characteristic under the positive motion of the system. Three possible motion modes depending on the oscillation amplitude communicated at the beginning of the motion are considered. Two of the motion modes are at the vicinity of the center, which is a stable equilibrium point, and the third one is at the vicinity of the saddle point, which is a point of unstable equilibrium. Closed analytical solutions for the nonlinear Cauchy problem are obtained using periodic elliptic functions. Approximations of the elliptic functions by a combination of elementary functions are presented which simplifies applying the analytical solutions in computations. The examples of numerical computations given in the paper confirm good compliance of the computational results based on the obtained solutions with the results of numerical computer integration of the equation of motion.

Key words: free oscillations, nonlinear differential equation of motion, analytical solution, periodic elliptic function.

Вступ. Вивченню нелінійних механічних коливань приділялась і продовжує приділятися значна увага дослідників. Свідченням тому є не тільки численні наукові статті, а і монографічні видання, серед яких, з публікацій останніх років, виділимо [1 – 4]. В них є відповідні огляди літературних джерел та списки літератури. Зазначимо, що силова характеристика з кубічною нелінійністю найбільш часто використовується в наукових дослідженнях нелінійних коливань. Це, в першу чергу, стосується її варіантів, що мають лише один центр в положенні стійкої рівноваги. Значно менше досліджень присвячено випадку, коли силова характеристика має два центри. Про неї, зокрема, йдеться в довіднику [5], де побудовано фазові портрети руху, що мають два центри і одну сідлову точку. Але в довіднику не приведено аналітичних розв'язків цієї задачі для обчислення переміщення системи і періоду коливань. Особливості руху згаданої коливальної системи числовими методами досліджували також в [6]. Тут, на відміну від відомих публікацій, робимо наголос на побудові аналітичних розв'язків, з використанням спеціальних функцій, які відносяться до затабульованих.

Метою статті є побудова та апробація нових формул для обчислення переміщень і періодів коливань у різних режимах руху осцилятора з кубічною нелінійністю, коли на фазовому портреті є три особливих точки: два центри і одна сідлова точка.

Постановка задачі та її розв'язки. Переміщення осцилятора $x(t)$ у часі t описуємо диференціальним рівнянням

$$m\ddot{x} - c_1x + c_2x^3 = 0, \quad (1)$$

у якому m – маса рухомої матеріальної точки; $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ – коефіцієнти, що визначають силову характеристику з кубічною нелінійністю; крапка над x означає похідну по t .

Замість (1) далі будемо розв'язувати рівняння

$$\ddot{x} - \alpha x + \beta x^3 = 0, \quad (2)$$

увівши позначення: $\alpha = c_1/m > 0$, $\beta = c_2/m > 0$.

Його доповнюємо початковими умовами:

$$x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad (3)$$

де $a > 0$ – відхилення системи вправо від положення нестійкої рівноваги $x = 0$ – чим спричинений рух осцилятора.

Згідно з (2) маємо два положення стійкої рівноваги:

$$x_* = \pm\sqrt{\alpha/\beta}.$$

В залежності від значення a буде три режими руху. Тому ставиться задача знайти розв'язки задачі (2), (3), які описують ці режими.

Перший режим руху. Він характеризується тим, що $0 < a < x_*$, $a \leq x \leq \sqrt{2x_*^2 - a^2}$. Для інтегрування (2) подамо його у вигляді:

$$\dot{x} \frac{dx}{dx} = \alpha x - \beta x^3. \quad (4)$$

Провівши інтегрування, з урахуванням (3), отримуємо:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{\beta}{2}} \sqrt{(x^2 - a^2)(2x_*^2 - a^2 - x^2)}.$$

Тому переміщення осцилятора визначається виразом:

$$\int_a^x \frac{du}{\sqrt{(u^2 - a^2)(b^2 - u^2)}} = \sqrt{\frac{\beta}{2}} t, \quad (5)$$

у якому $b^2 = 2x_*^2 - a^2$.

Ліва частина в (5) зводиться до неповного еліптичного інтеграла першого роду $F(\chi, k)$. Так, згідно з [7, с. 260], вираз (5) набуває вигляд:

$$\frac{1}{b} F(\chi, k) = \sqrt{\frac{\beta}{2}} t, \quad (6)$$

$$\text{де } \chi = \arcsin\left(\frac{b}{x} \sqrt{\frac{x^2 - a^2}{b^2 - a^2}}\right), \quad k = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}.$$

Із (6) впливає розв'язок поставленої задачі:

$$x = \frac{a}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\tau, k)}}, \quad (7)$$

у якому $\tau = b\sqrt{\frac{\beta}{2}}t$; $sn(\tau, k)$ – еліптичний синус Якобі.

Для обчислення періоду коливань одержуємо формулу:

$$T = \frac{2\sqrt{2}}{b\sqrt{\beta}} K(k).$$

Тут $K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$ – повний еліптичний інтеграл першого роду, таблиці якого надруковано в [8, с. 114].

Згідно з (7):

при $\tau \rightarrow 0$, $sn(\tau, k) \rightarrow 0$, $x \rightarrow a$;

при $\tau \rightarrow T/2$, $sn(\tau, k) \rightarrow 1$, $x \rightarrow b$;

при $\tau \rightarrow T$, $sn(\tau, k) \rightarrow 0$, $x \rightarrow a$.

Отже розв’язок (7) описує періодичні коливання осцилятора в околі правого положення стійкої рівноваги $x = x_* = \sqrt{\alpha/\beta}$.

При застосуванні формули (7), для обчислення еліптичного синуса, можна використовувати його апроксимацію:

$$sn(\tau, k) = \sin[\theta(\tau, k)], \tag{8}$$

в якій

$$\theta(\tau, k) = \frac{\pi\tau}{2K} + \frac{2q}{1+q^2} \sin \frac{\pi\tau}{K}; \quad q = \exp\left(-\pi \frac{K_*}{K}\right); \quad K_* = K(\sqrt{1-k^2}), \tag{9}$$

причому K і K_* затабульовані в [8].

Для аналізу точності реалізації аналітичного розв’язку у вигляді (7), (8), (9), розглянемо приклад.

Приклад 1. Розрахунок проводимо при $\alpha = 8\text{с}^{-2}$; $\alpha/\beta = 10^{-4}\text{м}^2$; $x_* = 0,01$ м; $a = 0,005$ м. Цим даним відповідає: $b = 0,01323$ м; $K = 2,4118$; $K_* = 1,6319$; $q = 0,1193$; $\tau = 2,646t$. Одержані відношення x/a , для різних t , запишемо в табл. 1. Там же, для порівняння, записано $(x/a)_r$, до яких призводить числове комп’ютерне інтегрування рівняння (2).

Таблиця 1 – Одержані двома способами x/a при $a = 0,005$ м

t	τ	$\theta(\tau, k)$	x/a	$(x/a)_r$
0,1	0,2646	0,2519	1,028	1,030
0,3	0,7938	0,7193	1,262	1,273
0,6	1,5876	1,2409	2,072	2,045
0,9	2,3814	1,5603	2,645	2,645

Як бачимо, використання формул (7), (8), (9) дає результати, близькі до результатів числового інтегрування рівняння (2). Розбіжність спричинена апроксимацією (9), яка створює можливість обійтись без таблиць еліптичних функцій.

Про вплив a на характер руху осцилятора надано інформацію на рис. 1. Зі збільшенням a зменшуються амплітуди і період коливань. Осцилятор нерухомий, коли $a = x_*$.

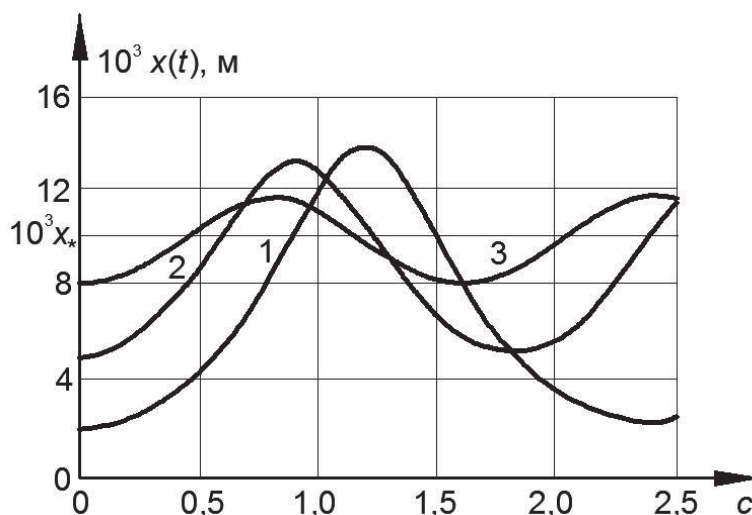


Рис. 1 – Графіки $x(t)$ при різних a : 1 – $a = 0,002$ м; 2 – $a = 0,005$ м; 3 – $a = 0,008$ м.

Другий режим руху. Він також проходить в околі положення $x = x_* = \sqrt{\alpha/\beta}$ і характеризується тим, що $x_* < a < \sqrt{2x_*}$; $\sqrt{2x_*^2 - a^2} < x < a$. У цьому випадку, проінтегрувавши (4), з урахуванням (3), отримуємо:

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{\beta}{2}} \sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 - b^2)}.$$

Подальше інтегрування цього виразу дає:

$$\int_x^a \frac{du}{\sqrt{(a^2 - u^2)(u^2 - b^2)}} = \sqrt{\frac{\beta}{2}} t. \quad (10)$$

Ліва частина в (10) теж зводиться до неповного еліптичного інтеграла першого роду. Користуючись довідником [7, с. 260], замість (10) одержимо:

$$\frac{1}{a} F(\lambda, r) = \sqrt{\frac{\beta}{2}} t.$$

$$\text{Тут } \lambda = \arcsin \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 - b^2}}; \quad r = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

У підсумку приходимо до розв'язку:

$$x = a \sqrt{1 - r^2 \operatorname{sn}^2(\xi, r)}, \quad (11)$$

$$\text{де } \xi = a \sqrt{\frac{\beta}{2}} t.$$

При цьому період коливань становить:

$$T = \frac{2\sqrt{2}}{a\sqrt{\beta}} K(r).$$

Для перевірки формули (11) розглянемо приклад 2.

Приклад 2. Зберігаючи попередні α, β, x_* , обчислення x/a проводимо при $a = 0,012$ м. Маємо: $b = 0,00748$ м; $r = 0,7820$; $K = 1,9623$; $K_* = 1,7697$; $q = 0,0588$. Одержані x/a з використанням формул (8), (9) і (11) заносимо в табл. 2, де також вказано $(x/a)_r$, отримані числовим інтегруванням рівняння руху.

Таблиця 2 – Значення x/a , обчислені двома способами, при $a = 0,012$ м

t	ξ	$\theta(\xi, k)$	x/a	$(x/a)_r$
0,0	0,000	0,000	1,000	1,000
0,2	0,480	0,466	0,936	0,935
0,4	0,960	0,886	0,796	0,796
0,6	1,440	1,240	0,673	0,674
0,8	1,920	1,545	0,624	0,324

У цій таблиці теж спостерігається гарна узгодженість результатів розрахунків двома способами.

Графіки коливань, що відповідають другому режиму руху, для двох значень a , наведено на рис. 2.

Тут збільшення a супроводжується збільшенням амплітуд і періодів коливань.

Як і в першому режимі руху, час знаходження осцилятора в положенні $x > x_*$ значно менший, ніж у положенні $x < x_*$, внаслідок несиметричності силової характеристики відносно $x = x_*$.

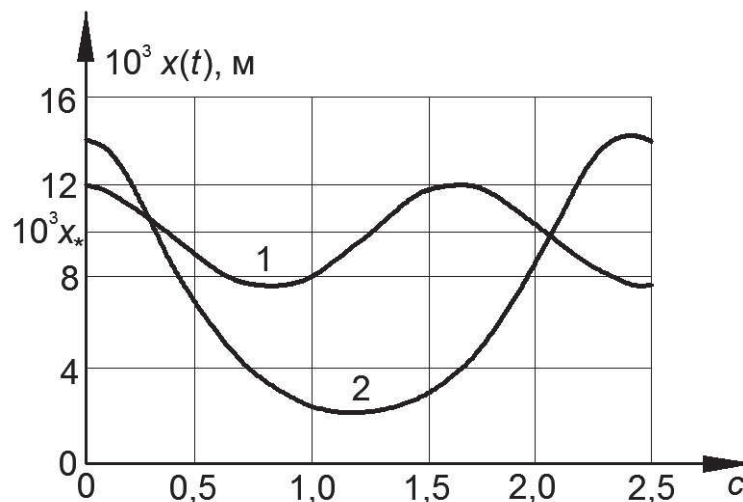


Рис. 2 – Графіки переміщень при $x_* < a < \sqrt{2x_*}$: 1 – $a = 0,012$ м; 2 – $a = 0,015$ м.

Третій режим руху. Він виникає при $a > \sqrt{2}x_*$ і відбувається навколо положення нестійкої рівноваги $x = 0$. При цьому переміщення осцилятора задовольняють нерівності $|x| \leq a$.

У третьому режимі руху переміщення визначається інтегралом:

$$\int_x^a \frac{du}{\sqrt{(a^2 - u^2)(u^2 + c^2)}} = \sqrt{\frac{\beta}{2}} t, \tag{12}$$

де $c^2 = a^2 - 2x_*^2$.

Ліва частина в (12) теж зводиться до неповного еліптичного інтеграла першого роду. Використовуючи [7, с. 259], виразу (12) надаємо вигляд:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + c^2}} F(\delta, s) = \sqrt{\frac{\beta}{2}} t, \tag{13}$$

причому $\delta = \arccos \frac{x}{a}$; $s = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}$.

В результаті із (13) отримуємо розв'язок

$$x = a \cdot \text{cn}(\eta, s), \tag{14}$$

у якому $\eta = \sqrt{a^2 + c^2} \sqrt{\frac{\beta}{2}} t$; $\text{cn}(\eta, s)$ – еліптичний косинус Якобі.

Обчислення періоду коливань зводяться до використання формули:

$$T = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\beta(a^2 + c^2)}} K(s).$$

Збільшення a супроводжується зменшенням періоду коливань, що властиво нелінійним системам з жорсткою характеристикою пружності.

Розв'язок (14) описує рух осцилятора на першому напівциклі коливань $t \in [0; 0,5T]$, що потім легко поширити і на більші t .

Згідно з (14):

при $\tau \rightarrow 0$, $\text{cn}(\eta, s) \rightarrow 1$, $x \rightarrow a$;

при $\tau \rightarrow 0,5T$, $\text{cn}(\tau, k) \rightarrow -1$, $x \rightarrow -a$.

При використанні (14), еліптичний косинус можна наближено обчислювати за формулою:

$$\text{cn}(\eta, s) = \cos[\theta(\eta, s)], \tag{15}$$

де $\theta(\eta, s)$ – подається виразом (9)

Щоб з'ясувати похибки такого способу розрахунку, розглянемо приклад 3.

Приклад 3. Зберігаючи попередні значення α, β, x_* , обчислення x/a проводимо при $a = 0,016$ м. Маємо: $c = 0,00748$ м; $s = 0,9059$; $K = 2,3069$; $K_* = 1,6494$; $q = 0,1058$; $\eta = 3,5324 \cdot t$. Одержані x/a заносимо до

Таблиця 3 – Значення x/a , обчислених двома способами, при $a = 0,016$ м

t	η	$\theta(\eta, s)$	x/a	$(x/a)_r$
0,15	0,5299	0,4991	0,878	0,872
0,30	1,0597	0,9291	0,599	0,597
0,45	1,5896	1,2558	0,310	0,319
0,60	2,1194	1,4960	0,075	0,079
0,65	2,2961	1,5665	0,004	0,004

табл. 3, де поряд також вказано $(x/a)_r$, які дає числовий метод.

Як бачимо, розбіжності переміщень, обчислених двома способами, і в третьому режимі руху несуттєві.

Точність аналітичного способу розрахунку можна підвищити, якщо замість (9) використати формулу:

$$\theta(\tau, k) = \frac{\pi\tau}{2K} + \frac{2q}{1+q^2} \sin\left(\frac{\pi\tau}{K}\right) + \frac{q^2}{1+q^4} \sin\left(\frac{2\pi\tau}{K}\right). \tag{16}$$

Це підтверджують результати обчислень x/a за формулами (14), (15), (16), записані в табл. 4.

Таблиця 4 – Уточнені значення $\theta(\eta, s)$ і x/a

t	0,15	0,30	0,45	0,60	0,65
$\theta(\eta, s)$	0,5102	0,9319	1,2454	1,4905	1,5662
x/a	0,873	0,596	0,320	0,080	0,004

Про вплив відхилення a на амплітуду і період коливань надана інформація на рис. 3, де зображено графіки $x(t)$, одержані при $a = 0,015$ м і $a = 0,017$ м.

Збільшення a приводить до збільшення

амплітуд коливань і зменшення їх періоду.

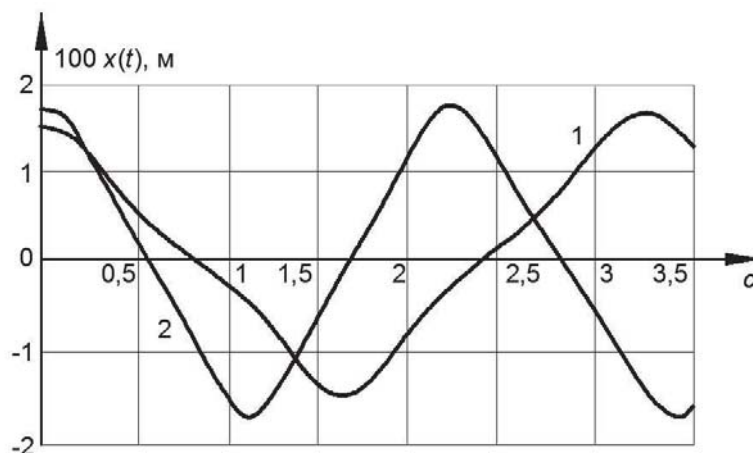


Рис. 3 – Графіки коливань при $a > \sqrt{2}x_*$: 1 – $a = 0,015$ м; 2 – $a = 0,017$ м.

Висновки. Для різних значень початкових відхилень виділено три режими коливань осцилятора, які описуються різними аналітичними виразами. Порівняльний аналіз показав, що результати розрахунків, з використанням одержаних аналітичних розв'язків і запропонованих апроксимацій еліптичних функцій, добре узгоджуються з результатами числового інтегрування рівняння руху на комп'ютері, чим підтверджена вірогідність виведення розрахункових формул.

Список літератури

1. Аврамов К. В., Михлин Ю. В. Нелинейная динамика упругих систем. Том 1: Модели, методы, явления. – Москва – Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2010. – 704 с.
2. Митропольский Ю. А. Избранные труды в двух томах. – Киев : Наукова думка, 2012. – 504 с.
3. Пукач П. Я. Якісні методи дослідження нелінійних коливальних систем. – Львів : Львівська політехніка, 2014. – 288 с.
4. Шатохин В. М. Анализ и параметрический синтез нелинейных силовых передач машин. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2008. – 456 с.
5. Вибрации в технике : Справочник в 6-ти томах. Т. 2. Колебания нелинейных механических систем. – Москва : Машиностроение, 1979. – 351 с.
6. Бондарь Н. Г. Устойчивость и колебания упругих систем в современной технике (конструкции с прощёлками). – Киев : Вища школа, 1987. – 200 с.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва : Наука, 1962. – 1100 с.
8. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. – Москва : Наука, 1977. – 344 с.

References (transliterated)

1. Avramov K. V. *Nelineynaya dinamika uprugikh system. Tom 1: Modeli, metody, yavleniya* [Nonlinear dynamics of elastic systems. Volume 1: Models, methods, phenomena]. Moscow – Izhevsk, Institut komp'yuternykh issledovaniy Publ., 2010. 704 p.
2. Mitropol'skiy Yu. A. *Izbrannyye trudy v dvukh tomakh* [Selected works in two volumes]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2012. 504 p.
3. Pukach P. Ya. *Yakisni metody doslidzhennya nelineynykh kolyval'nykh system* [Qualitative methods for studying nonlinear oscillatory systems]. Lviv, L'vivs'ka politekhnika Publ., 2014. 288 p.
4. Shatokhin V. M. *Analiz i parametricheskii sintez nelineynykh silovykh peredach mashin* [Analysis and parametric synthesis of nonlinear power transmission machines]. Kharkov, NTU «KhPI» Publ., 2008. 456 p.
5. *Vibratsii v tekhnike : Spravochnik v 6-ti tomakh. Tom 2. Kolebaniya nelineynykh mekhanicheskikh sistem* [Vibrations in technics: Reference book in 6 volumes. Vol. 2: Oscillations of nonlinear mechanical systems]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1979. 351 p.
6. Bondar' N. G. *Ustoychivost' i kolebaniya uprugikh sistem v sovremennoy tekhnike (konstruktsii s proshcholkivaniyem)* [Stability and oscillations of elastic system in modern engineering (snap-through structures)]. Kyiv, Vyshsha shkola Publ., 1987. 200 p.
7. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Tables of Integrals, Sums, Series, and Products]. Moscow, Nauka Publ., 1962. 1100 p.
8. Yanke E., Emde F., Lesh F. *Spetsial'nye funktsii* [Special Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 344 p.

Надійшла (received) 06.11.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Про вільні коливання осцилятора з кубічно нелінійною силовою характеристикою / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський // Вісник НТУ «ХПИ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПИ», 2017. – № 30 (1252). – С. 86 – 92. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.

О свободных колебаниях осциллятора с кубической нелинейной силовой характеристикой / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // Вісник НТУ «ХПИ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПИ», 2017. – № 30 (1252). – С. 86 – 92. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.

On free oscillations of oscillator with cubic nonlinear power characteristic / V. P. Olshanskiy, S. V. Olshanskiy // Bulletin of National Technical University «KhPI». Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 30 (1252). – pp. 86 – 92. Bibliog.: 8 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Ольшанський Василь Павлович – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Ольшанский Василий Павлович – доктор физико-математических наук, профессор, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени П. Василенко, г. Харьков; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Olshanskiy Vasily Pavlovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture, Kharkov; tel.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Ольшанський Станіслав Васильович – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

Ольшанский Станислав Васильевич – кандидат физико-математических наук, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени П. Василенко, г. Харьков; тел.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

Olshanskiy Stanislav Vasilevich – PhD in Physics and Mathematics, Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture, Kharkov; tel.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

УДК 531.16:629.4.067

В. М. ПЕТУХОВ, Н. А. АКСЁНОВА**КИНЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ КОЛЕСНОЙ ПАРЫ ПОСЛЕ СХОДА С РЕЛЬС**

Визначено траєкторію руху колісної пари вагону після її сходу з рейок. Побудовано кінематичну модель руху колеса по шпальній решітці. Виконано кінематичний аналіз руху колеса по шпалах. Отримано аналітичний вираз, що зв'язує рух колеса з параметрами верхньої будови колії. Показано, що амплітуда і частота коливань колісної пари при її сході залежать від діаметра колеса, ширини горизонтальної поверхні шпала і відстані між осями шпал. Визначено миттєві центри швидкостей колеса в характерних точках. Розроблена кінематична модель визначає основні діагностичні ознаки сходу вагонів з рейок. Це дозволить створити надійний алгоритм розпізнавання сходу для побудови апаратного і програмного забезпечення технічної системи контролю сходів вагонів з рейок.

Ключові слова: колесо, кінематичний аналіз, діагностична модель, траєкторія.

Определена траектория движения колесной пары вагона после ее схода с рельс. Построена кинематическая модель движения колеса по шпальной решетке. Выполнен кинематический анализ движения колеса по шпалам. Получено аналитическое выражение, связывающее движение колеса с параметрами верхнего строения пути. Показано, что амплитуда и частота колебаний колесной пары при ее сходе зависят от диаметра колеса, ширины горизонтальной поверхности шпала и расстояния между осями шпал. Определены мгновенные центры скоростей колеса в характерных точках. Разработанная кинематическая модель определяет основные диагностические признаки схода вагонов с рельс. Это позволит создать надежный алгоритм распознавания схода для построения аппаратного и программного обеспечения технической системы контроля сходо́в вагонов с рельс.

Ключевые слова: колесо, кинематический анализ, диагностическая модель, траектория.

Kinematic analysis of the movement of a wagon wheel pair after its derailment is performed. Based on the studies carried out, the following results were obtained. The trajectory of motion of the center of the wheel after its coming off the rail along the sleeper grating is determined graphically. The center of the wheel moves rectilinearly along the horizontal section of the sleeper and along the arc of the circle in the areas where the wheel rolls from a sleeper and hits the next one. Thus, the trajectory of motion looks like a cyclic combination of rectilinear segments and segments of circles. An analytic expression characterizing wagon derailment is obtained, which connects the parameters of the upper structure of the track (the sleeper grid) and the wheel. The motion of the center of the wheel is determined by different equations depending on the stages of motion. The law of motion is given by different functions corresponding to different motion stages. It is shown that the amplitude and frequency of oscillations of a wheel pair at its derailment depend on the diameter of the wheel, the width of the horizontal surface of the sleeper and the distance between the axes of the sleepers. Instantaneous centers of wheel velocities at characteristic points are determined. The development of a kinematic model of the movement of a wagon wheel pair after its derailment allows one to proceed constructing a dynamic model of such a motion. The ultimate goal of studying this process should be the construction of a diagnostic model for the derailment of wagons based on the presented kinematic and dynamic models. This will make it possible to create a reliable derailment recognition algorithm for constructing the hardware and software of a wagon derailment technical control system.

Key words: wheel, kinematic analysis, diagnostic model, trajectory.

Введение. Сход вагонов с рельс – наиболее опасный инцидент, приводящий к тяжелым последствиям. Его опасность заключается в том, что обнаружить его для своевременной остановки поезда довольно сложно.

Наиболее известный случай – крушение электропоезда ICE-1, которое произошло в 1998 году, когда на линии Ганновер – Гамбург у поезда лопнул бандаж колеса, в результате чего колесная пара сошла с рельсов. Поезд проследовал ещё более 6 километров пока не ударился об опоры автомобильного моста. В результате трагедии погиб 101 человек, 88 были ранены.

Также не менее актуальна эта проблема и для грузовых поездов, поскольку значительный ущерб от сходо́в