

**Петухов Вадим Михайлович** – кандидат технических наук, доцент, Украинский государственный университет железнодорожного транспорта, г. Харьков; тел.: (057) 730-10-52; e-mail: hiitwagen@gmail.com.

**Petukhov Vadim Mykhaylovych** – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, Ukrainian State University of Railway Transport, Kharkov; tel.: (057) 730-10-52; e-mail: hiitwagen@gmail.com.

**Аксёнова Наталья Анатольевна** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Український державний університет залізничного транспорту, м. Харків; тел.: (057) 730-10-52; e-mail: naavoneska@gmail.com.

**Aksёnova Natalya Anatolyevna** – кандидат физико-математических наук, доцент, Украинский государственный университет железнодорожного транспорта, г. Харьков; тел.: (057) 730-10-52; e-mail: naavoneska@gmail.com.

**Aksenova Natalya Anatolyevna** – Candidate of Physico-mathematical Sciences, Associate Professor, Ukrainian State University of Railway Transport, Kharkov; tel.: (057) 730-10-52; e-mail: naavoneska@gmail.com.

УДК 621.43.001.4

**И. С. РЕВЕЛЮК**

### **КОНТИНУАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ СИНФАЗНОГО ТЕЧЕНИЯ СИЛИКОНОВОГО МАСЛА ПО КОЛЬЦЕВЫМ КАНАЛАМ ДЕМПФЕРОВ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВАЛА ДИЗЕЛЯ**

Досліджуються динамічні характеристики в дослідних конструкціях демпферів крутильних коливань колінчастого вала дизеля, у яких для накопичення і розсіювання енергії резонансних коливань вала використовуються синфазні течії силіконового масла середньої в'язкості по кільцевих каналах круглого або прямокутного перерізу. На основі рівнянь нестационарного руху нестискуваної рідини складені математичні моделі зазначених течій і, при використанні перетворення Лапласа для перехідного процесу або методу комплексних амплітуд для сталих коливань, знайдені аналітичні рішення цих рівнянь (у вигляді сум відповідного функціонального ряду). Вказані механічні моделі механізмів, що замінюють, з фрикційними зв'язками, які відповідають цим моделям. Отримано аналітичні вирази для коефіцієнта в'язкого демпфування і приведенного моменту інерції, що залежать від частоти усталених коливань вала. Виконано порівняння динамічних характеристик для демпферів крутильних коливань, обладнаних рідким (силіконовим) і твердим (сталевим) маховиком.

**Ключові слова:** демпфування крутильних коливань, маховик з фрикційним зв'язком, нестационарні течії по каналу, в'язка нестискувана рідина, властивості силіконового масла.

Исследуются динамические характеристики в опытных конструкциях демпферов крутильных колебаний коленчатого вала дизеля, у которых для накопления и рассеивания энергии резонансных колебаний вала используются синфазные течения силиконового масла средней вязкости по кольцевым каналам круглого или прямоугольного сечения. На основе уравнений нестационарного движения несжимаемой жидкости составлены математические модели указанных течений и, при использовании преобразования Лапласа для переходного процесса или метода комплексных амплитуд для установившихся колебаний, найдены аналитические решения этих уравнений (в виде сум соответствующего функционального ряда). Указаны механические модели заменяющих механизмов с фрикционными связями, отвечающие этим моделям. Получены аналитические выражения для коэффициента вязкого демпфирования и приведенного момента инерции, зависящих от частоты установившихся колебаний вала. Выполнено сравнение динамических характеристик для демпферов крутильных колебаний, снабженных жидким (силиконовым) и твердым (стальным) маховиком.

**Ключевые слова:** демпфирование крутильных колебаний, маховик с фрикционной связью, нестационарные течения по каналу, вязкая несжимаемая жидкость, свойства силиконового масла.

Dynamic characteristics in experimental designs of torsional vibration dampers of a diesel engine crankshaft, in which an in-phase flow of silicone oil of medium viscosity along annular channels of circular or rectangular cross-section is used to accumulate and dissipate the energy of resonant vibration of the shaft, are studied. On the basis of the equations of nonstationary motion of incompressible fluid, mathematical models of these flows are compiled. Analytical solutions of these equations are found (in the form of the sums of the corresponding functional series) using the Laplace transform for transient or complex amplitude method for steady-state vibration. Mechanical models of the replacement mechanisms with frictional bonds, corresponding to these models, are indicated. Analytical expressions are obtained for the coefficient of viscous damping and the reduced moment of inertia, which depend on the frequency of the steady vibration of the shaft. Dynamic characteristics for torsional vibration dampers equipped with a liquid (silicone) and a solid (steel) flywheel are compared.

**Key words:** damping of torsional vibrations, flywheel with frictional coupling, nonstationary flow along a channel, viscous incompressible fluid, properties of silicone oil.

**Введение и постановка задачи.** Демпфер крутильных колебаний, показанный на рис. 1, применяется в конструкциях большинства современных высокооборотных дизелей. Устройство устанавливается на носок коленчатого вала, где, как правило, наблюдается максимальная амплитуда колебаний. Шлицевое соединение обеспечивает совместное вращение вала и корпуса демпфера. Фрикционная связь между маховиком и корпусом осуществляется через узкие кольцевые каналы плоской формы, заполненные силиконовым маслом высокой вязкости, а точнее, специально синтезированной для решения подобных задач полиметилсилоксановой жидкостью (ПМС), имеющей длинные молекулы. Выбор рабочего тела вызван положительными качествами ПМС, а именно относительно слабой зависимостью её вязкости от температуры [1].

На установившемся режиме маховик вращается вместе с валом, но при появлении угловых ускорений на стенках каналов возникают касательные напряжения, пытающиеся сохранить угловую скорость неизменной. При этом указанные напряжения оказываются одинаковыми во всех поперечных сечениях канала, поэтому жидкость в канале колеблется *синфазно*. Гидродинамический расчет этих напряжений не вызывает больших проблем и основывается на том предположении, что эпюра скоростей жидкости в зазоре не отличается от её формы

при установившемся вращении стенок маховика и корпуса и ламинарном установившемся течении жидкости. Если принять, что угловые скорости вращения равняются  $\omega_I$  и  $\omega_{II}$ , средний радиус течения равен  $r$ , ширина зазора  $2h$ , кинематическая вязкость и плотность ПМС составляют  $\nu_c, \rho_c$ , то локальные касательные напряжения на стенке оцениваются формулой

$$\tau = \rho_c \cdot \nu_c \cdot (\omega_I - \omega_{II}) \cdot r / (2h) . \tag{1}$$

Далее выражение для плотности  $\tau \cdot r$  интегрируется по площади стенки  $\Omega_c$ , и получаем момент сопротивления

$$M_c = b \cdot (\omega_I - \omega_{II}) .$$

где  $b$  – это коэффициент вязкого трения, вычисляемый по формуле

$$b = \rho_c \cdot \iint_{\Omega_c} \nu_c \cdot r^2 / (2h) dS , \tag{2}$$

или, если зазор и вязкость считать постоянными, то

$$b = J_c \cdot \nu_c / (2h)^2 , \tag{3}$$

$J_c$  – суммарный момент инерции силиконового масла в зазорах демпфера.

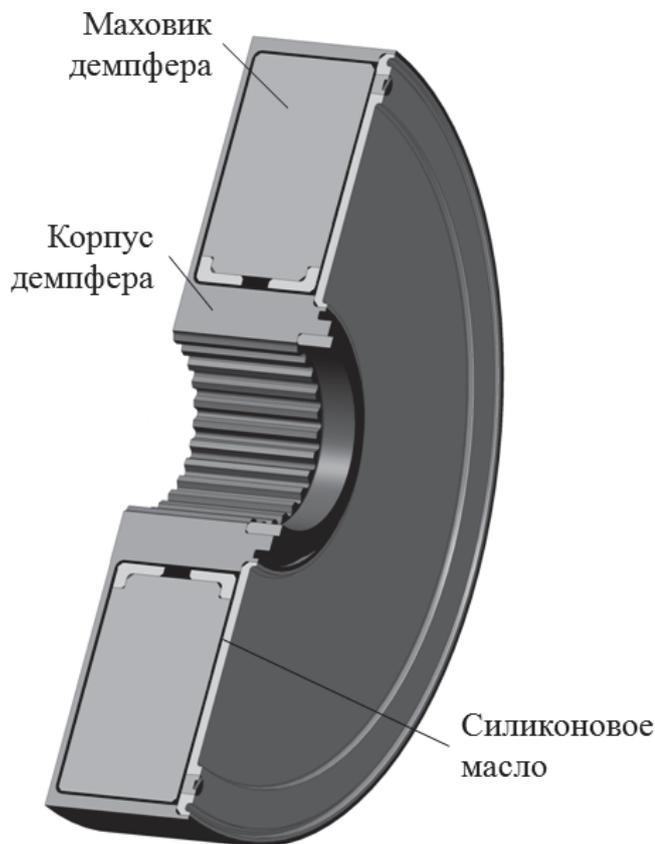


Рис. 1 – Конструкция демпфера с фрикционной связью и стальным маховиком.

Коэффициент  $b$  присутствует в системе уравнений

$$\left\{ J_{кр} d\omega_I / dt + b \cdot (\omega_I - \omega_{II}) + b_0 \cdot \omega_I + Z_{кр} \varphi_I = M_{кр} ; J_M d\omega_{II} / dt + b \cdot (\omega_{II} - \omega_I) = 0 , \tag{4}$$

посредством которой моделируют связанные вынужденные колебания носка коленчатого вала и демпфера.

Здесь  $J_{кр}, Z_{кр}$  – приведенные момент инерции и крутильная жесткость вала при соответствующей форме собственных колебаний (одноузловой или двух узловой), связанные соотношением

$$Z_{кр} / J_{кр} = (2\pi\nu_p)^2 ,$$

$\nu_p$  – соответствующая резонансная частота свободных колебаний вала;  $\varphi_I$  – угол закручивания носка вала относительно маховика;  $J_M$  – момент инерции маховика;  $M_{кр}$  – суммарный крутящий момент от кривошипов многоцилиндрового двигателя, приведенный к носку вала по правилу, описанному в [1];  $b_0$  – суммарный коэф-

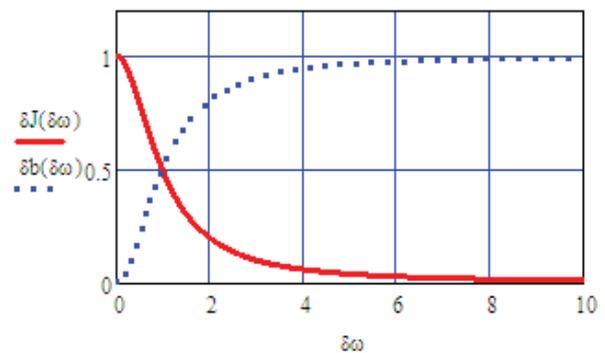


Рис. 2 – Зависимость характеристик демпфера от частоты вращения коленчатого вала.

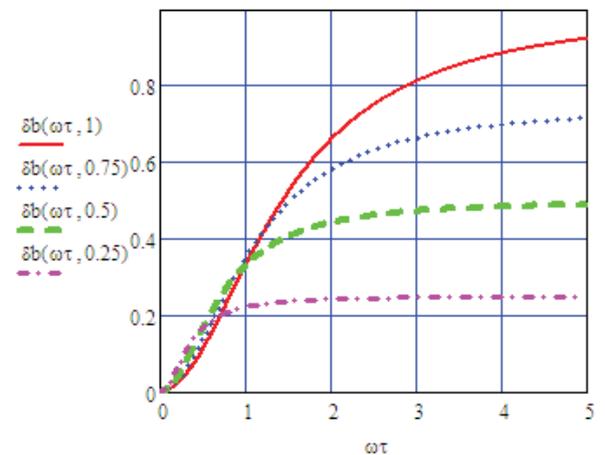


Рис. 3 – Зависимости коэффициентов демпфирования от вязкости ПМС (в скобках указан уровень вязкости).

коэффициент вязкого трения в деталях кривошипно-шатунных механизмов, приведенный к носку вала по данным [2], где используется приближенная формула Хольцера,

$$b_0 = 0.04 \cdot J_{кр} \cdot \omega_l.$$

Анализируя систему уравнений (4) на резонансной частоте вращения вала, замечаем, что:

- амплитуда колебаний носка вала выше амплитуды колебаний маховика демпфера;
- для снижения этих амплитуд колебаний значения момента  $J_M$  и коэффициента  $b$  нужно увеличивать.

На других частотах вращения устройства сочетает в себе свойства маховика, повышая момент инерции вала на дополнительную величину  $J_0 = J_M \cdot \delta J$ , и вязкого демпфера с коэффициентом демпфирования  $b_0 = b \cdot \delta b$ ; в итоге уравнение крутильных колебаний получает простейший классический вид:

$$(J_{кр} + J_{к.д} + J_0) d^2 \varphi_l / dt^2 + (b_0 + b) \cdot d\varphi_l / dt + Z_{кр} \varphi_l = M_{кр},$$

где  $J_{к.д}$  – момент инерции корпуса демпфера.

Характер изменения величин  $J_0$  и  $b_0$  показан на рис. 2, где *относительная*  $\delta\omega$  и *демпферная*  $\omega_0$  частоты определяются равенствами

$$\delta\omega = \omega / \omega_0, \quad \omega_0 = b / J_M.$$

Демпферная частота примерно отвечает середине диапазона частот, на котором происходит включение устройства в работу, то есть из маховика, создающего дополнительную инерционность, он постепенно трансформируется в вязкий демпфер, установленный между колеблющимся коленчатым валом и маховиком, вращающимся (на высоких частотах) без колебаний.

Как видим, значение  $b$  – это наибольший коэффициент демпфирования крутильных колебаний, который обеспечивает данное устройство при высоких частотах.

Причем, для получения приемлемой для практики точности расчета этого коэффициента в формулах (2), (3) приходится учитывать зависимость вязкости от температуры  $T_c$  жидкости, определяемую в силу линейности функции  $\lg \nu_c(T_c)$ , использованной в [3], по экспоненциальной формуле

$$\nu_c(T_c) = \nu_c(20) \cdot \exp(-(T_c - 20) / \Delta T_c), \quad (5)$$

где  $\nu_c(20)$  – это вязкость масла при температуре 20° С;  $\Delta T_c$  – *характерная температура*, для ПМС эта величина составляет приблизительно 55° С.

А при вычислении интеграла (2) учитывается зависимость вязкости ПМС от градиента  $\gamma$  изменения скорости,  $\gamma = (\omega_1 - \omega_2) \cdot r / (2h)$ ; по данным из [4] она описывается равенством

$$\nu_c = \nu_c(T_c) / \sqrt{1 + 0.12 \cdot \nu_c(T_c) \cdot \gamma}, \quad (6)$$

и при больших градиентах изначально высокая вязкость ПМС снижается в 2 и более раз.

Вязкость ПМС оказывает сильное влияние на динамические характеристики демпфера (рис. 3).

Кроме того, при градиентах  $\gamma > 250 \text{ с}^{-1}$  по данным работы [5] в ПМС высокой вязкости (большей, чем 1000 сСт) происходят необратимые разрывы длинных молекул (называемые *дилатансией* [1]), что ограничивает срок службы этого масла. С другой стороны, чтобы обеспечить эффективное демпфирование вязкость силиконового масла в этом устройстве, как правило, превышает 20000 сСт, а зазор  $2h$  составляет десятки доли миллиметра. Что, в силу влияния неизбежных технологических погрешностей изготовления и действия температурных деформаций приводит к соударениям боковых поверхностей маховика с корпусом демпфера и образованию металлической стружки, загрязняющей ПМС.

Поэтому, конструкция демпфера крутильных колебаний коленчатого вала, показанная на рис. 1, не является идеальной, и инженеры предпринимали неоднократные попытки её изменения. В результате, например, был разработан и внедрен на некоторых автотракторных дизелях демпфер с упругой связью между маховиком и валом [1]. В данной работе анализируется другое техническое решение, в котором стальной маховик отсутствует, а его роль выполняет силиконовое масло ПМС, имеющее среднюю вязкость (порядка 1000 сСт). Варианты конструктивного решения показаны на рис. 4; кольцевые канавки выполнены на боковых поверхностях пластин, которые запрессованы в корпус демпфера.

Значительное снижение начального уровня вязкости ПМС и увеличение зазоров уменьшает коэффициент вязкого демпфирования, но данное уменьшение компенсируется в этих устройствах тремя факторами:

- значительным увеличением площади жидкостного трения, что повторяет принцип работы вискомуфты [6];
- отсутствием зависимости вязкости от напряжений сдвига и ослабленным влиянием температуры на вязкость, которым, в данном случае, допустимо пренебречь;
- уменьшенным влиянием погрешности изготовления зазоров, которой также допустимо пренебречь.

**Важнейшим преимуществом исследуемого демпфера является возможность длительной работы устройства без замены масла.** Но имеется и очевидный недостаток: в силу меньшей плотности силикона (по сравнению со сталью) диаметр его корпуса, для обеспечения необходимого момента инерции  $J_M$  придется увеличить.

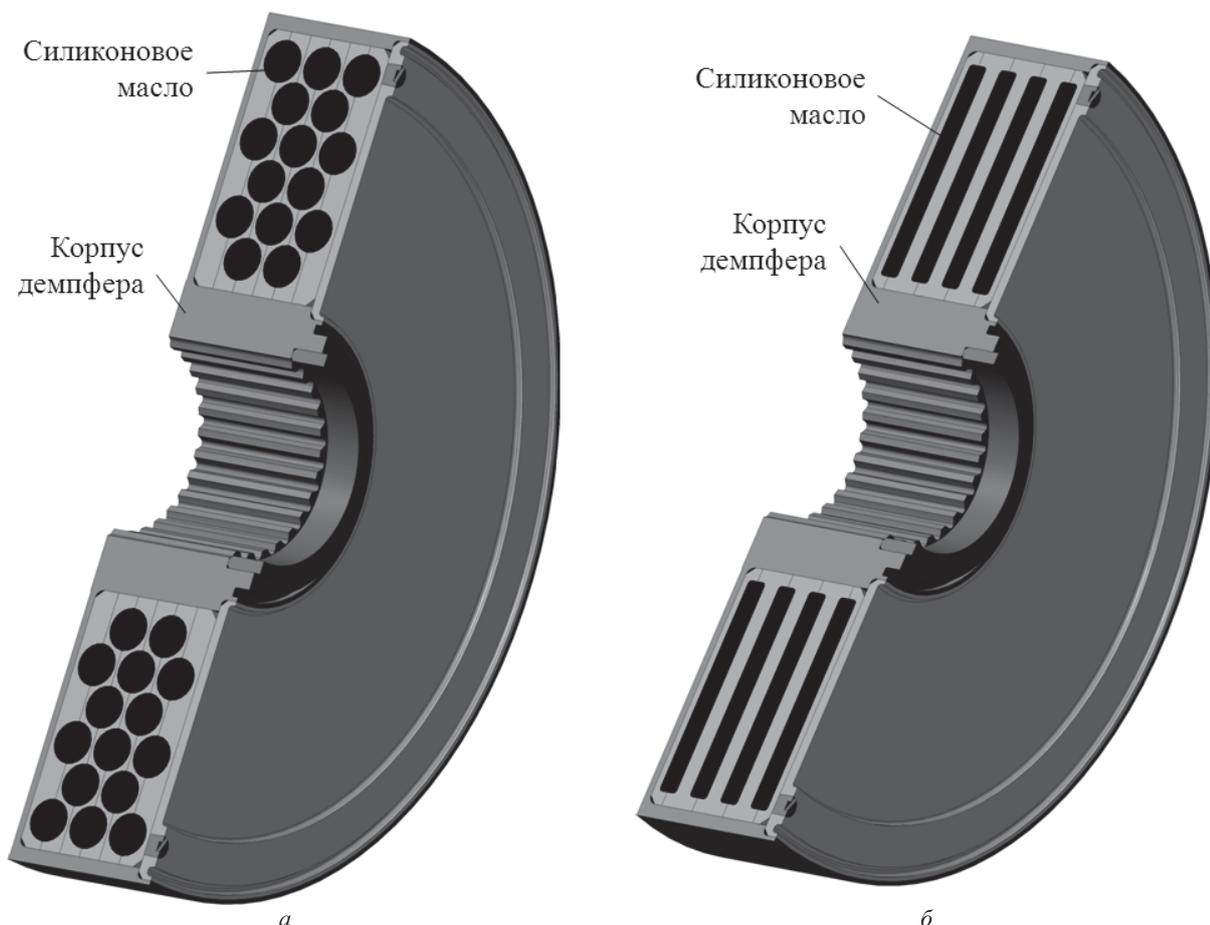


Рис. 4 – Конструкции демпферов с жидким маховиком в форме кольцевых каналов:  
 а – круглого сечения; б – прямоугольного сечения.

Целью данной работы являлось составление математических моделей течения вязкого силиконового масла по кольцевым каналам демпфера с жидким маховиком и получение динамических характеристик демпфера. Кроме того, предстояло выяснить, насколько правомерным является использование при расчетах колебаний демпфера с твердым маховиком соотношений установившегося течения ПМС по его зазорам, в которых колебания угловых скоростей стенок канала не учитываются.

Если судить по открытым литературным источникам, такие задачи решаются впервые.

**Обзор дискретных моделей течения.** Рассмотрим демпфер, показанный на рис. 4, а. Укажем основные предположения, используемые при его моделировании:

- поток жидкости – осесимметричный, и зависит от двух координат – времени  $t$  и расстояния до оси  $r$ ;
- давление во всех сечениях одинаково (гравитационной составляющей и зависимостью от температуры пренебрегаем).

Базовая модель отвечает теории Пуазейля [7], когда поле скоростей определяется графиком рис. 5 и формулой

$$V(r, t) = 2 \cdot V_{cp}(t) \cdot (1 - (r/r_k)^2).$$

По существу, эту модель следует считать одномассовой, потому что сила трения на стенке

$$F_{mp} = 2\pi r_k \rho_c (4\nu_c / r_k^2) (V_{cp} - V_{стен}) L_k,$$

где  $L_k = 2\pi R_{oc}$  – длина канала;  $V_{cp}$ ,  $V_{стен}$  – средняя тангенциальная скорость жидкости и тангенциальная скорость стенки, причем скорость  $V_{cp}$  удовлетворяет уравнению:

$$m_{сст} \cdot dV_{cp} / dt = -F_{mp}.$$

Недостатком модели, на что обращается внимание в [7], является значительное занижение силы трения при больших ускорениях. Реальный профиль скорости имеет более крутые фронты у стенки (рис. 6).

Ситуацию можно исправить, если перейти к многомассовым моделям, которые применительно к этому объекту можно назвать *телескопическими*. Здесь круглое поперечное сечение разбивают на  $n$  колец, напр., одинаковой толщины (рис. 7).

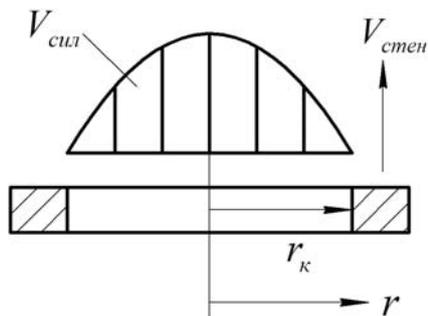


Рис. 5 – Эпюра скоростей для параболы Пуазейля.

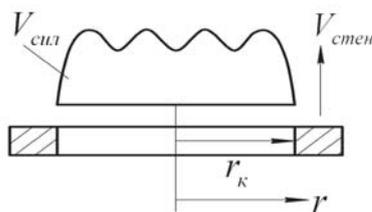


Рис. 6 – Эпюра скоростей для нестационарного течения жидкости.

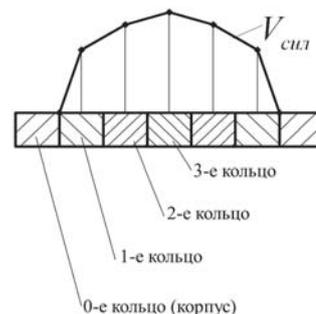


Рис. 7 – Телескопическая модель течения жидкости для канала круглого сечения.

Кольца связаны между собой фрикционными связями, а угловые скорости вращения удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} = f_1 (\omega_0 - \omega_1) + f_2 (\omega_2 - \omega_1); J_2 \frac{d\omega_2}{dt} = f_2 (\omega_1 - \omega_2) + f_3 (\omega_3 - \omega_2); \dots; J_n \frac{d\omega_n}{dt} = f_n (\omega_{n-1} - \omega_n),$$

где  $J_n$  – моменты инерции;  $\omega_n$  – угловые скорости вращения;  $f_n$  – фрикционные коэффициенты.

Недостаток телескопической модели – чтобы получить высокие силы трения, ширину кольца у стенки нужно делать малой, что неоправданно увеличивает  $n$  и затрудняет расчет. Понятно, что нужно использовать неравномерное распределение ширины слоев, но какое именно – пока неясно.

**Континуальная модель течения.** Чтобы разобраться с этим вопросом, необходимо использовать континуальную модель течения, в которой число колец изначально равно  $\infty$ . Тем более, что для аналогичных (но других) случаев поступали именно так [8, 9]. А затем, после использования континуальной модели, можно будет вернуться к дискретной модели, рекомендуемой для выполнения реальных расчетов. Но, как будет показано далее, распределение слоев в этой модели уже не будет телескопическим.

Радиус канала обозначим  $r_k$  (рис. 8), радиус оси канала –  $R_{oc}$ , кинематическая вязкость силиконового масла –  $\nu_c$ , плотность силикона –  $\rho_c$ . Угловую скорость вращения демфера обозначим  $\dot{\varphi}$ , угловое ускорение –  $\ddot{\varphi}$ , “.” – это дифференцирование по  $t$ . Тангенциальную скорость демфера обозначим  $U_{oc} = R_{oc} \cdot \dot{\varphi}$ , тангенциальное ускорение –  $a_{oc} = R_{oc} \cdot \ddot{\varphi}$  – это скорость и ускорение стенки.

Силиконовое масло имеет тангенциальную скорость

$$V(r, t) + U_{oc}(t),$$

где  $r$  – радиальная координата сечения,  $V$  – относительная скорость жидкости (если стенку считать неподвижной). Выполняется условие прилипания:

$$V(r_k, t) = 0.$$

Во всех сечениях кольца (рис. 9) поле скоростей  $V(r, t)$  одинаково, поэтому давление жидкости также одинаково,

$$(d/d\varphi)P(\varphi, r, t) = 0,$$

то есть давление во всех точках жидкости одинаково и не влияет на ее движение.

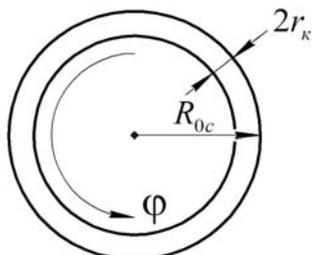


Рис. 8 – Кольцевой канал круглого сечения.

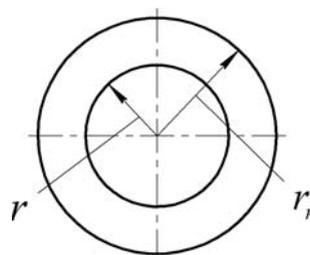


Рис. 9 – Поперечное сечение кольцевого канала круглого сечения.

Движение жидкости принимаем ламинарным. Для этого случая число Рейнольдса следует находить по формуле:

$$Re = V_{cp} \cdot (2r_k) / \nu_c,$$

где  $V_{cp} = \frac{1}{\pi r_k^2} \int_0^{r_k} V(r) \cdot 2\pi r dr$  – средняя относительная скорость.

Для примера, если  $V_{cp} = 10$  м/с;  $2r_k = 10$  мм,  $v_c = 100$  сСт, то  $R_e = 1000 < R_{exp} = 2320$ . На самом деле,  $V_{cp} \ll 10$  м/с, а  $v_c \gg 100$  сСт, и по этому допущению имеем большой запас.

Уравнение нестационарного движения жидкости [7] принимает следующий вид

$$\frac{d}{dt}(V(r,t) + U_{oc}(t)) - v_c \cdot \left( \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt}V(r,t) - v_c \left( \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \right) = -\frac{d}{dt}U_{oc}(t). \tag{7}$$

В этом уравнении (7) ускорение  $a_{oc}(t) = dU_{oc}(t)/dt$  является причиной движения.

Для решения уравнения (7), как и в других подобных методах расчета, используем операционное исчисление:

$$sV(r,s) - v_c \left( \frac{\partial^2 V(r,s)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V(r,s)}{\partial r} \right) = -a_{oc}(s),$$

где  $s$  – переменная Лапласа.

Это дифференциальное уравнение Бесселя. Искомое решение выражается через обобщенные цилиндрические функции  $I_0(x)$  и имеет следующий вид:

$$V(r,s) = \left[ \frac{I_0(\sqrt{s/v_c} r)}{I_0(\sqrt{s/v_c} r_k)} - 1 \right] \cdot \frac{a_{oc}(s)}{s}. \tag{8}$$

Если подставить  $r = r_k$ , то получим

$$V(r_k,s) = \left[ \frac{I_0(\sqrt{s/v_c} r_k)}{I_0(\sqrt{s/v_c} r_k)} - 1 \right] \cdot \frac{a_{oc}(s)}{s} \equiv 0,$$

то есть условие прилипания выполнено.

Силу сопротивления демпфера создают касательные напряжения на стенке трубы,

$$\tau_{кас} = -\rho_c \cdot v_c \cdot \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=r_k} = -\rho_c v_c \cdot \frac{I_0'(\sqrt{s/v_c} r_k) \sqrt{s/v_c}}{I_0(\sqrt{s/v_c} r_k)} \cdot \frac{a_{oc}}{s} = -\rho_c r_k \cdot \frac{I_0'(\sqrt{s/v_c} r_k) / (\sqrt{s/v_c} r_k)}{I_0(\sqrt{s/v_c} r_k)} \cdot a_{oc}.$$

Внутренняя поверхность трубы имеет площадь:  $f_{вн} = 2\pi r_k \cdot (2\pi R_{oc})$ .

Следовательно, сила сопротивления равна:

$$F_{comp}(s) = -f_{вн} \cdot \tau_{кас} = (2\pi R_{oc}) \cdot \pi r_k^2 \rho_c \cdot \frac{2I_0'(\sqrt{s/v_c} r_k) / (\sqrt{s/v_c} r_k)}{I_0(\sqrt{s/v_c} r_k)} \cdot a_{oc}(s)$$

или

$$F_{comp}(s) = m_c \cdot \frac{2I_1(\sqrt{s/v_c} r_k) / (\sqrt{s/v_c} r_k)}{I_0(\sqrt{s/v_c} r_k)} \cdot a_o(s), \tag{9}$$

где  $m_c$  – это масса силикона в трубке; кроме того, использовано тождество  $I_0'(x) = I_1(x)$ .

Учтем, что демпфер используется для крутильных колебаний, и перепишем (9) в эквивалентной форме:

$$M_{comp}(s) = m_c \cdot R_{oc}^2 \cdot \psi(\sqrt{s/v_c} r_k) \cdot \ddot{\varphi}(s), \tag{10}$$

где  $\psi(x) = \frac{2I_1(x)/(x)}{I_0(x)}$ ;  $\ddot{\varphi}(x)$  – изображение по Лапласу для углового ускорения.

При малых значениях  $x$ :  $\psi(x) \approx 1 - x^2/8 \approx 1$ , и вместо (10) получаем приближенное равенство

$$M_{comp}(t) \approx m_c \cdot R_{oc}^2 \cdot \ddot{\varphi}(t),$$

то есть момент сопротивления совпадает с моментом инерции силикона, если он движется вместе со стенкой. Но это выполняется только при очень медленном изменении углового ускорения  $\ddot{\varphi}(t)$ .

В общем случае применим формулу (10) к каждой из  $N$  трубок демпфера и получим:

$$M_{\text{сomp.сум}}(s) = \left( \sum_{j=1}^N m_{c,j} R_{oc,j}^2 \right) \psi(\sqrt{s/v_c} r_k) \varphi'' , 3$$

или

$$M_{\text{сomp.сум}}(s) = I_{\text{сил}} \cdot \psi(\sqrt{s/v_c} r_k) \ddot{\phi}(s) , \quad (11)$$

где  $I_{\text{сил}} = \sum_{j=1}^N m_{c,j} \cdot R_{oc,j}^2$  – это суммарный момент инерции силикона.

Далее обозначение  $M_{\text{сomp.сум}}$  будем сокращать до  $M_c$ .

Пусть изображение  $\psi(\sqrt{s/v_c} r_k)$  имеет оригинал  $\psi(t)$ ; тогда по теореме о свертке

$$M_c = J_{\text{сил}} \cdot \int_0^t \psi(t-\tau) \cdot \ddot{\phi}(\tau) d\tau . \quad (12)$$

Далее будет удобно работать в масштабе безразмерного времени  $\tau$ , когда величина

$$\frac{r_k^2}{v_c} = 1, \text{ то есть } \tau = t/t_c, \text{ где } t_c = \frac{r_k^2}{v_c} .$$

Тогда формула для передаточной функции и ее изображение по Лапласу выглядит проще:

$$\psi(s) = \frac{2I_1(\sqrt{s})/\sqrt{s}}{I_0(\sqrt{s})} .$$

Поскольку  $I_0(z) = J_0(iz)$ , то эта функция имеет простые полюса в точках

$$s_j = -x_j^2, \quad j = 1, 2, \dots, n ,$$

где  $x_j$  – положительный корень функции Бесселя  $I_0(x)$ ;  $i = \sqrt{-1}$  – мнимая единица.

Вычислим вычеты в полюсах:

$$\begin{aligned} \text{res}[\psi(s)e^{s\tau}] &= \lim_{s \rightarrow s_j} [2I_1(\sqrt{s})/\sqrt{s} e^{s\tau}] , \\ \frac{(s-s_j)}{I_0(\sqrt{s})} &= e^{-s_j\tau} (2I_1(\sqrt{s_j})/\sqrt{s_j}) \cdot \lim_{s \rightarrow s_j} \frac{(s-s_j)}{I_0(\sqrt{s})} = e^{-s_j\tau} (2I_1(\sqrt{s_j})/\sqrt{s_j}) \cdot \frac{1}{2I_1(\sqrt{s_j})/(2\sqrt{s_j})} = 4e^{-s_j\tau} = 4e^{-x_j^2\tau} . \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\psi(\tau) = 4 \sum_{j=1}^{\infty} e^{-x_j^2\tau} .$$

Если вернуться к масштабному (то есть обычному) времени  $t$ , то

$$\psi(t) = \frac{4v_c}{r_k^2} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-x_j^2 \frac{v_c t}{r_k^2}} , \quad (13)$$

и

$$M_c = J_{\text{сил}} \cdot \frac{4v_c}{r_k^2} \int_0^t \sum_{j=1}^{\infty} e^{-x_j^2 \frac{v_c}{r_k^2} (t-\tau)} \cdot \ddot{\phi}(\tau) d\tau . \quad (14)$$

Особая (экспоненциальная) форма ядра интеграла (14) позволяет предложить простой способ вычисления момента сопротивления  $M_c$ . Представим общий момент  $M_c$  в виде суммы парциальных моментов  $M_{c,j}$ ,

$$M_c = \sum_{j=1}^N M_{c,j} , \quad (15)$$

отвечающих отдельным членам ряда, то есть

$$M_{c,j} = J_{\text{сил}} \frac{4v_c}{r_k^2} \int_0^t e^{-x_j^2 \frac{v_c}{r_k^2} (t-\tau)} \cdot \ddot{\phi}(\tau) d\tau .$$

Такой момент, как несложно проверить, является решением обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{d}{dt} M_{c,j}(t) + \left( x_j^2 \frac{V_c}{r_k^2} \right) \cdot M_{c,j}(t) = J_{\text{сил}} \frac{4V_c}{r_k^2} \ddot{\varphi}(t). \quad (16)$$

Поскольку ряд (13) очень быстро сходится, на практике достаточно использовать не более 10 уравнений вида (16). Эти уравнения вместе с равенством (15) и образуют метод расчета сопротивления силиконового демпфера.

**Пример.** Рассмотрим простейшую динамическую систему, включающую вращающуюся массу  $m_{\text{вп}}$ , связанную жесткостью  $z_{\text{кп}}$  с остальным валом и нагруженную моментом сопротивления  $M_c$  и моментом возмущения  $M_{\text{ов}}$ .

Уравнения вращения имеют вид:

$$J_{\text{вп}} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \varphi + Z_{\text{кп}} \varphi = M_{\text{ов}}(t) - M_c(t); M_c = \sum_{j=1} M_{c,j}; \left. \frac{d}{dt} M_{c,j} + x_j^2 \frac{V_c}{r_k^2} M_{c,j} = J_{\text{сил}} \frac{4V_c}{r_k^2} \ddot{\varphi}, j = 1, \dots, n \right\}. \quad (17)$$

где  $J_{\text{вп}}$  – момент инерции массы  $m_{\text{вп}}$ ,  $\varphi$  – угловая деформация системы.

Систему (17) можно использовать для описания переходного процесса; тогда начальные условия выглядят так:

$$\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0; M_{c,j}(0) = 0, j = 1, \dots, n.$$

Если возмущающий момент  $M_{\text{ов}}(t)$  известный, то компьютер легко решит эту задачу.

**Заменяющая дискретная схема.** Уравнениям системы (17) полезно дать иную форму, возвращающую первоначальный механический смысл.

Обозначим

$$\dot{\varphi}(t) = \omega_0 t; M_{c,j} = -J_{\text{сил}} \left( 4V_c / r_k^2 \right) (\omega_j - \omega_0),$$

где  $\omega_j$  – круговая частота вращения некоторой части силикона.

Подставим эти замены в (16):

$$\frac{4V_c}{r_k^2} J_{\text{сил}} \frac{dV_c}{r_k^2} (\dot{\omega}_0 - \dot{\omega}_j) + x_j^2 \frac{V_c}{r_k^2} J_{\text{сил}} \frac{4V_c}{r_k^2} (\omega_0 - \omega_j) = J_{\text{сил}} \frac{4V_c}{r_k^2} \omega_0.$$

После сокращения слагаемых, содержащих  $\dot{\omega}_0$ :

$$-J_{\text{сил}} \frac{4V_c}{r_k^2} \dot{\omega}_j + x_j^2 \frac{V_c}{r_k^2} J_{\text{сил}} \frac{4V_c}{r_k^2} (\omega_0 - \omega_j) = 0.$$

Теперь разделим на  $-\frac{V_c}{r_k^2} x_j^2$  и получим уравнение:

$$\left( J_{\text{сил}} \frac{4}{x_j^2} \right) \dot{\omega}_j + J_{\text{сил}} \frac{4V_c}{r_k^2} (\omega_j - \omega_0) = 0.$$

Учтем, что  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{4}{x_j^2} = 1$ , и обозначим  $J_{c,j} = J_{\text{сил}} \frac{4}{x_j^2}$  – это парциальный момент инерции силикона;

$$\sum_{j=1}^{\infty} J_{c,j} = J_{\text{сил}}.$$

Постоянную величину  $J_{\text{сил}} \frac{4V_c}{r_k^2}$  обозначим  $K$  – это фрикционный коэффициент связи. Получим:

$$\left\{ M_c(t) = \sum_{j=1}^n K (\omega_j - \omega_0), J_{c,j} \dot{\omega}_j + K (\omega_j - \omega_0) = 0. \right. \quad (18)$$

Уравнения (18) отвечают схеме, показанной на рис. 10 (фрикционная связь коленчатого вала с корпусом двигателя, возникающая в подшипниках, а также при трении боковой поверхности поршней и втулок, здесь не показана).

Уравнение вращения вала:

$$J_{\text{вп}} \ddot{\varphi} + \sum_{j=1}^n K (\dot{\varphi} - \omega_j) + Z_{\text{кп}} \varphi = M_{\text{ов}}(t),$$

где, напомним,  $\dot{\varphi} = \omega_0$ .

Рассмотрим случай установившихся колебаний, происходящих с круговой частотой  $\omega = 2\pi\nu$ . Тогда начальные условия заменяются условиями периодичности, а для решения системы (17) удобно применить метод комплексных амплитуд.

Пусть

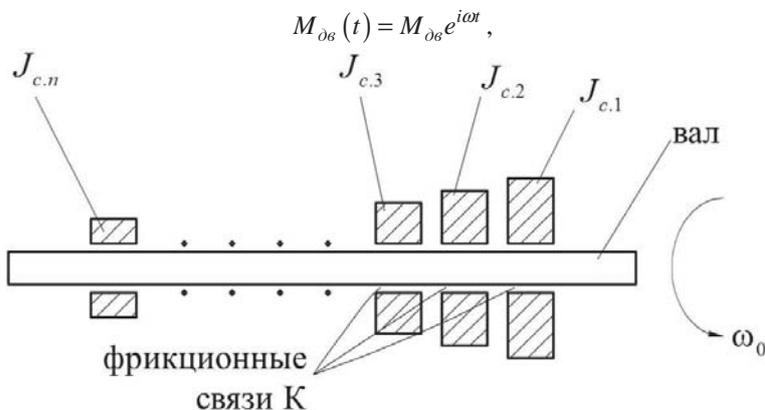


Рис. 10 – Заменяющая дискретная схема с фрикционными связями между вращающимися массами.

тогда

$$\varphi(t) = \bar{\varphi} \cdot e^{i\omega t}, \quad \ddot{\varphi} = -\omega^2 \cdot \varphi e^{i\omega t}$$

и

$$i\omega M_{c,j} + x_j^2 \frac{V_c}{r_k^2} M_{c,j} = J_c \frac{4V_c}{r_k^2} (-\omega^2 \varphi), \quad j=1, \dots, n$$

откуда

$$M_{c,j} = \frac{J_c \frac{4V_c}{r_k^2} (-\omega^2 \varphi)}{x_j^2 \frac{V_c}{r_k^2} + i\omega} = \frac{-4\omega^2 J_c \varphi}{x_j^2 + i\omega t_k},$$

где  $t_k = r_k^2 / V_c$ .

Получаем уравнение:

$$-\omega^2 J_{кр} \varphi + Z_{кр} \varphi - 4\omega^2 J_c \varphi \cdot \sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j^2 + i\omega t_k} = M_{дв},$$

то есть

$$\varphi = \frac{M_{дв}}{Z_{кр} - \omega^2 J_{кр} - 4\omega^2 J_c \cdot \sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j^2 + i\omega t_k}}.$$

На резонансной частоте  $\omega_p = \sqrt{Z_{кр} / J_{кр}}$  выражение упрощается:

$$\varphi_p = \frac{-M_{дв}}{4\omega^2 J_{сил} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j^2 + i\omega_p t_k}} = -\frac{M_{дв}}{Z_{кр}} \cdot \frac{J_{кр}}{J_{сил}} \cdot A(\omega_p),$$

где  $A(\omega) = 1 / \sum_{j=1}^n \frac{4}{x_j^2 + i\omega t_k}$ .

Функция  $A(\omega)$  позволяет, при необходимости, построить график т.н. коэффициента динамичности для вала с демпфером на резонансных частотах:

$$d(\omega_p) = 1 / \left| \sum_{j=1}^n \frac{4}{x_j^2 + i\omega_p t_k} \right|.$$

**Синфазное течение в тонком кольцевом зазоре.** Ширину зазора обозначим  $2h$ . Получим поле скоростей течения жидкости относительно стенки  $V(x, t)$ , удовлетворяющее уравнению:

$$\begin{cases} \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = v_c \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} + a(x,t), V(\pm h,t) = 0, \end{cases} \quad (19)$$

где  $a = \dot{U}$  – мгновенное ускорение стенки в точке контакта (это ускорение зависит от расстояния до оси вращения  $z$ ,  $a = z \cdot \dot{\omega}$ ).

Применим к задаче (19) преобразование Лапласа:

$$\begin{cases} sV(x,s) = v_c \frac{d^2 V(x,s)}{dx^2} = a(s); V(\pm h,s) = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Решение системы (20) имеет вид:

$$V = \left( 1 - \frac{ch(\sqrt{s/v_c} x)}{ch(\sqrt{s/v_c} h)} \right) \cdot \frac{a(s)}{s}. \quad (21)$$

Откуда изображение по Лапласу для касательного напряжения определяется формулой:

$$\tau = \rho_c v_c \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=h} = -\rho_c \frac{sh(\sqrt{s/v_c} h) \cdot \sqrt{s/v_c}}{ch(\sqrt{s/v_c} h)} \cdot \frac{v_c}{s} \cdot a(s) = -\rho_c h \frac{sh(\sqrt{s/v_c} h) / (\sqrt{s/v_c} h)}{ch(\sqrt{s/v_c} h)} \cdot a_c$$

Передаточная функция  $\psi(s) = \frac{sh(\sqrt{s})/\sqrt{s}}{ch\sqrt{s}}$  раскладывается в ряд:

$$\psi(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{s + y_j^2}, \quad (22)$$

где  $y_j = \pi(j-1/2)$ ,  $j = 1, 2, \dots$  – положительные корни косинуса.

Проинтегрируем касательные напряжения по площади стенки и получим момент сопротивления в виде суммы ряда:

$$M_{con} = \sum_{j=1}^{\infty} M_{c,j},$$

где парциальные моменты отвечают отдельным слагаемым (22) и удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d}{dt} M_{c,j} + \frac{v_c}{h^2} y_j^2 M_{c,j} = J_c \frac{2v_c}{h^2} \dot{\omega}; \quad (23)$$

$J_c$  – момент инерции силикона.

Пусть

$$M_{c,j} = J_c \frac{2h^2}{v_c} \frac{1}{y_j^2} \omega_j,$$

где  $\omega_j$  – некоторая условная угловая скорость вращения части силикона, имеющего момент инерции

$$J_c \cdot (2/y_j^2).$$

Поскольку  $\sum_{j=1}^{\infty} (2/y_j^2) = 1$ , то это соответствующая парциальная часть жидкости.

Тогда угловые скорости  $\omega_j$  можно найти из дифференциального уравнения

$$J_c \frac{2}{y_j^2} \frac{d\omega_j}{dt} + J_c \frac{2v_c}{h^2} (\omega_j - a_c) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

**Синфазное течение в зазоре между корпусом и маховиком.** В этом пункте статьи проводится проверка правомочности использования простейшей (квазистационарной) модели течения ПМС, использованной в формуле (1) для касательных напряжений и следующих из неё методов расчета демпфера с твердым маховиком.

Обозначим ширину зазора  $2h$ , по аналогии с диаметром круглого канала  $2r_k$ ; тогда и многие результаты расчета окажутся аналогичными рассмотренному выше случаю; а цилиндрические функции  $I_0(x)$ ,  $I_1(x)$  перейдут в гиперболические функции  $ch(x)$ ,  $sh(x)$ , имеющие, к тому же, сходные графики.

Пусть стенки канала имеют тангенциальные скорости  $U_I(t)$  и  $U_{II}(t)$  (рис. 11). По ним определим две новые скорости:

- для совместно направленного движения  $U_{сов}(t) = \frac{1}{2}(U_I(t) + U_{II}(t))$ ;
- для противоположно направленного движения  $U_{пр}(t) = \frac{1}{2}(U_I(t) - U_{II}(t))$ .

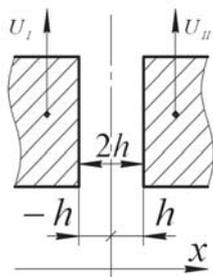


Рис. 11 – Течение жидкости при параллельном движении стенок канала.

От линейных скоростей можно перейти к угловым скоростям и получить формулы для сонаправленного и противоположно направленного вращения:

$$\omega_{сов} = \frac{1}{2}(\omega_I + \omega_{II}); \quad \omega_{пр} = \frac{1}{2}(\omega_I - \omega_{II}). \quad (24)$$

В силу линейности задачи указанные движения можно проанализировать отдельно.

Рассмотрим совместно направленное движение. Уравнение для относительных ускорений жидкости  $V(x, t)$  имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - \nu_c \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{dU_{сов}}{dt}; \\ V(\pm h, t) = 0. \end{cases}$$

Применяем к этой задаче операционное исчисление:

$$\begin{cases} sV - \nu_c \frac{d^2 V}{dx^2} = s \cdot U_{сов}; \\ V(\pm h, s) = 0. \end{cases} \quad (25)$$

Решение системы (25) выражается через гиперболический косинус:

$$V = \left( 1 - \frac{ch(\sqrt{s/\nu_c} x)}{ch(\sqrt{s/\nu_c} h)} \right) \cdot U_{сов}(s). \quad (26)$$

Дифференцируя равенство (26) по координате  $x$ , находим касательные напряжения на стенках:

$$\tau_{сов}(\pm h) = \rho_c \nu_c \frac{sh(\sqrt{s/\nu_c} h) \cdot \sqrt{s/\nu_c}}{ch(\sqrt{s/\nu_c} h)} \cdot U_{сов}(s)$$

или

$$\tau_{сов}(\pm h, s) = \rho_c \frac{sh(\sqrt{s/\nu_c} h) / (\sqrt{s/\nu_c} h)}{ch(\sqrt{s/\nu_c} h)} \cdot h \cdot s \cdot U_{сов}(s).$$

Передаточная функция  $\psi_{сов}(s) = \frac{ch(\sqrt{s/\nu_c} h) / (\sqrt{s/\nu_c} h)}{ch(\sqrt{s/\nu_c} h)}$  имеет полюса в точках  $s_j = \frac{\nu_c}{h^2} \cdot y_j^2$ ,

где  $y_j = \pi(j-1/2)$ ,  $j = 1, 2, \dots$  – положительные корни косинуса, откуда получаем ее разложение в ряд

$$\psi_{сов}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{s h^2 / \nu_c + y_j^2}.$$

Следовательно, момент сопротивления силикона на каждой стенке канала можно найти в виде суммы

$$M_{с.сов} = \sum_{j=1}^n M_{сов.j},$$

где парциальные моменты находятся из решения обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dM_{сов.j}}{dt} + \frac{\nu_c}{h^2} y_j^2 M_{сов.j} = J_c \frac{2\nu_c}{h^2} \cdot \dot{\omega}_{сов}. \quad (27)$$

Пусть  $M_{сов.j} = J_c \frac{h^2}{\nu_c} \frac{2}{y_j^2} \cdot \omega_{сов.j}$ ,  $j = 1, 2, \dots$

Тогда (27) можно вернуть первоначальный механический смысл:

$$J_c \frac{2}{y_j^2} \frac{d\omega_{сов.j}}{dt} + J_c \frac{2\nu_c}{h^2} (\omega_{сов.j} - \omega_{сов}) = 0, \quad (28)$$

причем  $\sum_{j=1}^{\infty} (2/y_j^2) = 1$ .

Рассмотрим противоположно направленное движение. Уравнение для относительного движения жидкости  $V(x, t)$  имеет вид:

$$\left\{ \frac{\partial V}{\partial t} - v_c \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{x}{h} \frac{dU_{np}}{dt}; V(\pm h, t) = 0 \right.$$

Здесь  $(x/h)U_{np}(t)$  – это квазистационарное поле скоростей в зазоре, получаемое по теории Пуазейля после пренебрежения силами инерции.

После применения операционного исчисления получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$sV - v_c \frac{d^2V}{dx^2} = \frac{x}{h} s \cdot U_{np}(s),$$

которое после учета граничных условий  $V(\pm h) = 0$  имеет решение

$$V = \left( \frac{sh(\sqrt{s/v_c} x)}{sh(\sqrt{s/v_c} h)} + \frac{x}{h} \right) \cdot U_{np}(s). \tag{29}$$

Касательные напряжения на стенках получаем, дифференцируя (29) по координатах  $x$ :

$$\tau(h, s) = -\tau(-h, s) = v_c \frac{dV}{dx} \Big|_{x=h} = \left( \frac{ch(\sqrt{s/v_c} h) \cdot (\sqrt{s/v_c})}{sh(\sqrt{s/v_c} h) \cdot s} + \frac{1}{h \cdot s} \right) \cdot v_c \cdot s \cdot U_{np}(s).$$

Передаточная функция

$$\psi_{np}(s) = \frac{ch(\sqrt{s/v_c} h)}{sh(\sqrt{s/v_c} h) / (\sqrt{s/v_c} h)}$$

имеет полюса в точках  $s_j = (v_c/h^2) \cdot z_j^2$ , где  $z_j = \pi \cdot j, j = 1, 2, \dots$  – положительные корни синуса, откуда получаем ее разложение в ряд:

$$\psi_{np}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (v_c/h^2)}{s + (v_c/h^2) \cdot z_j^2}.$$

Следовательно, момент сопротивления слоя силикона на каждой стенке канала можно найти в виде суммы

$$M_{c,np} = M_{кв.см} + \sum_{j=1}^{\infty} M_{np,j},$$

где квазистатический момент

$$M_{кв.см} = J_c \frac{v_c}{2h^2} \omega_{np} = J_c \frac{v_c}{2h^2} (\omega_I - \omega_{II}),$$

а парциальные динамические моменты удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dM_{np,j}}{dt} + \frac{v_c}{h^2} z_j^2 M_{np,j} = J_c \frac{2v_c}{h^2} \dot{\omega}_{np}. \tag{30}$$

Пусть  $M_{np,j} = J_c \frac{h^2}{v_c} \frac{2}{z_j^2} \cdot \omega_{np,j}, j = 1, 2, \dots$

Тогда (30) можно записать в форме, имеющей механический смысл:

$$J_c \frac{2}{z_j^2} \frac{d\omega_{np,j}}{dt} + J_c \frac{2v_c}{h^2} (\omega_{np,j} - \omega_{np}) = 0, \tag{31}$$

причем сумма коэффициентов здесь имеет другое значение:  $\sum_{j=1}^{\infty} (2/z_j^2) = 0.5$ .

В дифференциальных уравнениях (28) и (31) величины

$$\tau_y = \frac{h^2}{v_c \cdot y_j^2}, \quad \tau_z = \frac{h^2}{v_c \cdot z_j^2}$$

являются их *постоянными времени*, и, если учесть используемые значения вязкости и зазоров, очень малы. Например, если  $\nu_c = 0.05 \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $h = 0.5 \text{ мм}$ , то эти постоянные не превосходят  $10^{-6} \text{ с}$ . Это означает, что первые слагаемые уравнений принимают существенные значения, только лишь, в диапазоне радиочастот, и при моделировании работы демпфера с твердым маховиком этими инерционными слагаемыми можно пренебречь. Но тогда все нестационарные моменты сопротивления  $M_{сов.j}$  и  $M_{пр.j}$  также оказываются равными 0, и, как доказано в результате проведенного исследования,

*фрикционную связь корпуса с маховиком можно рассчитывать по квазистатической теории Пуазейля.*

Однако, следует заметить, что это утверждение не носит абсолютный характер, и если, напр., уменьшить вязкость ПМС в 50 – 100 раз, а зазоры увеличить в 5 – 10 раз, то динамика течения масла в кольцевых каналах будет оказывать значительное влияние на работу демпфера с твердым маховиком, и здесь ограничиваться только лишь квазистационарными силами сопротивления недопустимо.

**Особенности динамических характеристик демпфера с жидким маховиком.** Рассмотрим демпфер с кольцевыми каналами прямоугольного сечения (рис. 4, б) и введем в расчет, как и ранее, относительную и демпферную частоты

$$\delta\omega = \omega / \omega_0, \quad \omega_0 = b / J_M = \left\| b = 8J_c \cdot \nu_c / (2h)^2, \quad J_M = J_c \right\| = \nu_c / (2h)^2 \cdot 8. \quad (32)$$

Для твердого маховика демпферная частота вычисляется по формуле

$$\omega_0 = b / J_M = \nu_c / (2h)^2 \cdot (J_c / J_M),$$

где последний множитель мал и имеет порядок величины 0,001...0,002. В формуле (32) соответствующий множитель равен 8. Поэтому, если при переходе к жидкому маховику величина демпферной частоты остается прежней (а это необходимо для правильной настройки демпфера на резонансные частоты коленчатого вала), то вязкость ПМС нужно уменьшить и/или зазоры между пластинами нужно увеличить таким образом, чтобы отношение  $\nu_c / h^2$  уменьшилось примерно в 5000 раз.

Например, целесообразно приблизительно в 50 раз уменьшить вязкость, то есть перейти к использованию ПМС средней вязкости, которая является ньютоновской жидкостью и не изменяет свои свойства в зависимости от градиента скоростей течения. Одновременно, нужно будет примерно в 10 раз увеличить ширину зазоров.

Тогда коэффициент вязкого демпфирования и приведенный момент инерции демпфера будут определяться равенствами

$$b_0 = b \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 + [(j-0.5) / \delta\omega]^2}, \quad J_0 = J_c \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 / (j-0.5)^2}{1 + [(j-0.5) / \delta\omega]^2}.$$

Соответствующие графики представлены на рис. 12. Сравнивая с рис. 2, видим качественное отличие: в новом устройстве коэффициент демпфирования с ростом частоты возрастает неограниченно (примерно как квадратный корень из частоты), и это обстоятельство улучшает качество работы демпфера на высоких собственных частотах резонансных колебаний коленчатого вала. Но, к сожалению, на основных резонансных частотах, отвечающих одноузловой и двухузловой формам крутильных колебаний, коэффициент демпфирования уменьшается соответственно в 6 и в 4 раза (если сохранен габарит узла, рис. 13, кривые 1 и 2).

Этот недостаток можно устранить, увеличив диаметр корпуса примерно в 1,5 раза (кривая 3 на рис. 13). Заметим, что благодаря меньшей плотности ПМС (по сравнению с плотностью стали) масса демпфера уменьшается значительно – почти в 3 раза, что снижает поперечные колебания вала.

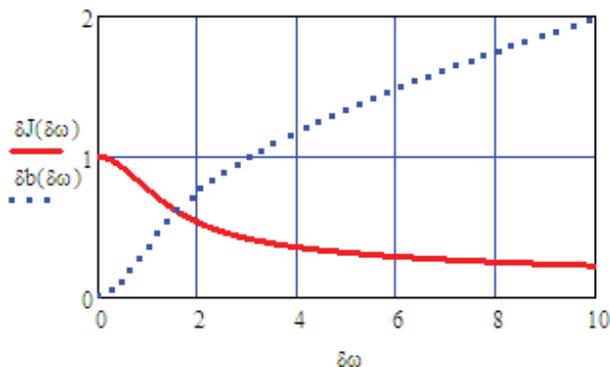


Рис. 12 – Характер изменения динамических характеристик демпфера с жидким маховиком.

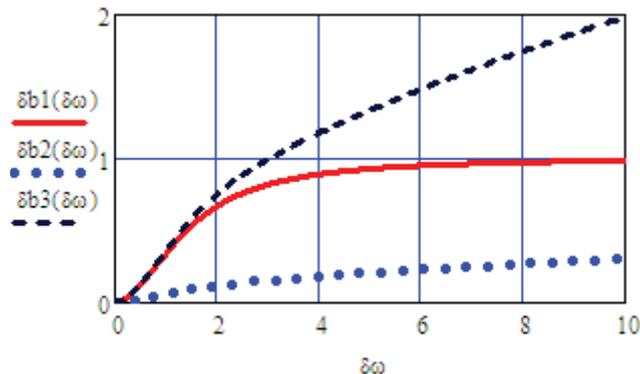


Рис. 13 – Сравнение коэффициентов вязкого демпфирования для демпферов с твердым маховиком и жидким (при двух значениях диаметра) маховиком.

**Выводы.** Разработаны математические модели нестационарного синфазного ламинарного течения вязкой жидкости по каналам кольцевой формы.

Найдені аналітичні рішення дифференціальних рівнянь синфазного течення жидкості (в формі сумми функціональних рядів) для неустановившихся і установившихся коливань.

Получені формули для основних динамічних характеристик демпферів нової конструкції (с жидким маховиком) – коефіцієнта вязкого демпфирования, приведенного момента інерції і демпфирующей частоты.

Показано, що для збереження демпфирующей частоты і коефіцієнта демпфирования на рівні устроїства-аналога (с маховиком из стали) діаметр жидкого маховика необхідно збільшити приблизно в 1.5 рази.

#### Список літератури

1. Гоц А. Н. Крутильные колебания коленчатых валов автомобильных и тракторных двигателей : учеб. пособие – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2008. – 200 с.
2. Терских В. П. Расчеты крутильных колебаний силовых установок : в 3 т. – Л. : Судпромгиз, 1953 – 1954. Т. 1. – 259 с., Т. 2 – 215 с., Т. 3 – 200 с.
3. Бетлей Ш. Исследование силиконовых демпферов крутильных колебаний : автореф. дис. канд. техн. наук. – Харьков, 1966. – 14 с.
4. Зайдман Е. С., Осипова О. А. Определение вязкости жидкости в силиконовых демпферах крутильных колебаний // Сб. «Проблемы развития комбинированных двигателей внутреннего сгорания». – М. : Машиностроение, 1968. – С. 273 – 282.
5. Гоц А. Н. Научные основы расчета и ускоренных испытаний деталей кривошипно-шатунного механизма тракторных дизелей на стадии проектирования : автореф. дис. д-ра техн. наук. – Владимир, 2004. – 32 с.
6. Труханов К. А. Гидропривод вентилятора для системы охлаждения автомобильного двигателя // Известия МГТУ «МАМИ». – М., 2011 – №2 (12). – С. 78 – 84.
7. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М. : Наука, 1950. – 736 с.
8. Григорьев А. Л. Использование интегралов Дюамеля для расчета импульсов давления и скорости течения вязкой жидкости по трубопроводу // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2013. – №54 (1027). – С. 63 – 86.
9. Григорьев А. Л. Метод и результаты расчета неустановившегося ламинарного течения топлива по нагнетательному трубопроводу топливной аппаратуры дизеля // Вестник ХГПУ. – Харьков, 1999 – Вып. 60. – С. 86 – 97.

#### References (transliterated)

1. Gots A. N. *Krutil'nye kolebaniya kolenchatykh valov avtomobil'nykh i traktornykh dvigatelei : ucheb. posobie* [Torsional vibration of crankshafts of automobile and tractor engines]. Vladimir, Vladimir National University Publ., 2008, 200 p.
2. Terskikh V. P. *Raschety krutil'nykh kolebaniy silovykh ustanovok : v 3 t.* [Calculation of torsional vibration of power plants: in 3 vol.]. Leningrad, Sudpromgiz Publ., 1953 – 1954, vol. 1, 259 p., vol. 2, 215 p., vol. 3, 200 p.
3. Betley Sh. *Issledovanie silikonovykh dempferov krutil'nykh kolebaniy : avtoref. dis. kand. tekhn. nauk* [Study of silicone dampers of torsional vibrations: the author's abstract of the Candidate of Technical Sciences Dissertation]. Kharkov, 1966. 14 p.
4. Zaydman E. S., Osipova O. A. *Opredelenie vyazkosti zhidkosti v silikonovykh dempferakh krutil'nykh kolebaniy* [Determining viscosity of fluid in silicone dampers of torsional vibrations]. *Sb. «Problemy razvitiya kombinirovannykh dvigateley vnutrennego sgoraniya»* [Development problems of combined internal combustion engines. Collected works]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1968, pp. 273–282.
5. Gots A. N. *Nauchnye osnovy rascheta i uskorennykh ispytaniy detaley krivoshipno-shatunnogo mekhanizma traktornykh dizeley na stadii proektirovaniya : avtoref. dis. d-ra tekhn. nauk.* [Scientific basis for calculation and accelerated testing of the details of the crank gear of tractor diesels at the design stage: the author's abstract of the Doctor of Technical Sciences Dissertation]. Vladimir, 2004. 32 p.
6. Trukhanov K. A. *Gidroprivod ventilyatora dlya sistemy okhlazhdeniya avtomobil'nogo dvigatelya* [Hydraulic fan drive for engine cooling system] *Izvestiya MGTU «MAMI»* [Bulletin of the Moscow State Technical University “MAMI”]. Moscow, 2011, no. 2 (12), pp. 78–84.
7. Loitsyanskiy L. G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Mechanics of liquid and gas]. Moscow, Nauka Publ., 1950. 736 p.
8. Grigor'ev A. L. *Ispol'zovanie integralov Dyumelya dlya rascheta impul'sov davleniya i skorosti techeniya vyazkoi zhidkosti po truboprovodu* [Using the Duhamel integral to calculate the pressure pulses and the viscous fluid flow rate through conduit]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, 2013, no. 54 (1027), pp. 63–86.
9. Grigor'ev A. L. *Metod i rezul'taty rascheta neustanovivshegosya laminarnogo techeniya topliva po nagnetatel'nomu truboprovodu toplivnoy apparatury dizelya* [Method and results of calculating the unsteady laminar flow of fuel through the diesel fuel supply line]. *Vestnik KhGPU* [Bulletin of the KhNPU]. Kharkiv, 1999, Vyp. 60, pp. 86–97.

Поступила (received) 27.10.2017

#### Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

**Континуальні моделі синфазної течії силіконового масла по кільцевих каналах демпферів крутильних коливань вала дизеля / І. С. Ревелюк // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 97 – 110. Бібліогр.: 9 назв. – ISSN 2222-0631.**

**Континуальные модели синфазного течения силиконового масла по кольцевым каналам демпферов крутильных колебаний вала дизеля / И. С. Ревелюк // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 97 – 110. Бібліогр.: 9 назв. – ISSN 2222-0631.**

**Continuous models of in-phase flow of silicone oil along annular channels of torsional vibration dampers of the diesel shaft / I. S. Reveliuk // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 30 (1252). – pp. 97 – 110. Bibliog.: 9 titles. – ISSN 2222-0631.**

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Ревелюк Іван Сергійович** – аспірант, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (093) 114-11-65; e-mail: norad290888@gmail.com.

**Ревелюк Іван Сергеевич** – аспірант, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, г. Харьков; тел.: (093) 114-11-65; e-mail: norad290888@gmail.com.

**Reveliuk Ivan Sergeevich** – Postgraduate, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkov; tel.: (093) 114-11-65; e-mail: norad290888@gmail.com.