УДК 517.984

А. Н. СЫРОВАЦКИЙ

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ВОЗМУЩЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ТОЧЕЧНЫХ МАСС ПО СПЕКТРУ

Одна з найважливіших задач теорії збурень полягає у вивченні спектра збуреного оператора та описі спектральних проекторів цього оператора. Класичним результатом, який дає розв'язок цієї задачі в скінченновимірному випадку для операторів з простим спектром, є теорема Льовнера. У даній роботі застосовується результат цього твердження для розв'язання конкретної практичної задачі. В роботі вивчається задача про лінійні коливання точкових мас, а також збурення її розв'язків, за допомогою зміни умов середовища експерименту. Досліджується поведінка частот коливань при цих змінах. В роботі розв'язується як пряма задача (дослідження поведінки спектра при одновимірних збуреннях) так і зворотна задача (знаходження збурення по заданому спектру).

Ключові слова: самоспряжений оператор, спектр, збурення оператора, задача про лінійні коливання точкових мас.

Одна из важнейших задач теории возмущений состоит в изучении спектра возмущенного оператора и описании спектральных проекторов этого оператора. Классическим результатом, который дает решение этой задачи в конечномерном случае для операторов с простым спектром, является теорема Лёвнера. В данной работе применяется результат этого утверждения для решения конкретной практической задачи. В работе изучается задача о линейных колебаниях точечных масс, а также возмущения её решений, посредством изменения условий среды эксперимента. Исследуется поведение частот колебаний при этих изменениях. В работе решается как прямая задача (исследование поведения спектра при одномерных возмущениях) так и обратная задача (нахождения возмущения по заданному спектру).

Ключевые слова: самосопряженный оператор, спектр, возмущение оператора, задача о линейных колебаниях точечных масс.

One of the major tasks of the perturbation theory is to study spectrum of the perturbed operator and to describe its spectral projectors. The classical result, which gives a solution to this problem for the operators with a simple spectrum in the finite-dimensional case, is the Lowner theorem. In this paper the result of this statement is applied to solve a specific practical problem. In this paper the problem of linear oscillations of point masses is studied as well as perturbations of its solutions induced by changing the conditions of the experimental environment. The behavior of the oscillations' frequencies under these changes is investigated. Both the direct problem (investigation of the behavior of the spectrum for one-dimensional perturbations) and the inverse problem (finding the perturbation from a given spectrum) are solved.

Key words: self-adjoint operator, spectrum, perturbation of the operator, the problem of linear oscillations of point masses.

Введение. Начало спектральной теории возмущений восходит к работам *Г. Вейля* [1] (1909), *Ф. Реллиха* [2] (1936) и *К. Фридрихса* [3] (1939). В частности, Г. Вейлю [1] принадлежит теорема об инвариантности непрерывной части спектра самосопряженного оператора при вполне непрерывном возмущении. В работах *Т. Като* [4] и *М. Роземблюма* [5] показано, что абсолютно непрерывная часть спектра инвариантна при конечномерных возмущениях. В данной же работе рассматривается возмущение дискретного спектра. Работа посвящена изучению задачи колебаний точечных масс при одномерном возмущении; последнее отвечает изменению среды, где изучаются колебания. Это соответствует, например:

- изменению вязкости среды (погружение колеблющейся системы в жидкость, в воду, масло и др.);
- изменению температурного режима среды колебаний;
- помещению изучаемой системы в движущуюся инерциальную систему и др.

Решение обратной задачи состоит в восстановлении возмущения по заданному возмущенному спектру. Иначе говоря, вопрос заключается в том, как изменить среду колебаний для системы точечных масс, чтобы получить требуемые частоты.

В работе решается как прямая задача (исследование поведения спектра при одномерных возмущениях) так и обратная задача (нахождения возмущения по заданному спектру).

Анализ последних исследований. Как правило, ранее изучались прямые задачи возмущения (описание спектра, собственных функций и т.д.). Решению же обратных задач, то есть восстановлению исходных параметров по возмущенному спектру уделялось мало внимания. В частности никем не была предложена процедура нахождения возмущения по спектру. В статье Л. П. Нижника [6] изучались одномерные возмущения неограниченных операторов и были получены формулы для *резольвенты* возмущенного оператора, однако задача о восстановлении одномерного возмущения по двум спектрам не рассматривалась.

Постановка задачи. В работе изучается задача о линейных колебаниях точечных масс, на которые действует возмущение ранга один. Целью является описание спектра (частот колебаний) при таком возмущении, а также решение обратной задачи восстановления возмущения по спектру.

Задача о линейных колебаниях точечных масс. Рассмотрим систему, состоящую из точечных масс $m_0, m_1, ..., m_{N-1}$, соединенных невесомыми пружинками с жесткостями $k_0, k_1, ..., k_{N-1}$, длины которых в нерастянутом состоянии равны $l_0, l_1, ..., l_{N-1}$ соответственно. Сумму длин пружин обозначим $\sum_{i=0}^{N} l_i = L_0$.

Расстянем эту систему так, чтобы общая длина пружин стала равняться L_1, и закрепим неподвижно левый конец пружинки l_0 и правый конец пружинки l_N.

Для описания положения системы введем систему координат: направим ось Ox вдоль прямой, соединяющей точки крепления, начало координат выберем в точке закрепления левой пружинки. Тогда координата точки закрепления правой пружинки L_1.

Найдем координаты $x_0^0, x_1^0, ..., x_{N-1}^0$ масс в состоянии равновесия. Рассмотрим i – ю пружинку. Ее длина в растянутом состоянии равна $x_i^0 - x_{i-1}^0$, то есть ее относительное удлинение составляет – $\left(x_i^0 - x_{i-1}^0 - l_i\right)/l_i$. По *закону Гука* i – я пружинка действует на массу m_i с силой

$$F_i = -k_i \frac{x_i^0 - x_{i-1}^0 - l_i}{l_i},$$

а $(i+1)$ – я – с силой

$$F_{i+1} = -k_{i+1} \frac{x_{i+1}^0 - x_i^0 - l_{i+1}}{l_{i+1}}.$$

Так как система находится в равновесии, то сумма сил, действующих на массу m_i, должна быть равна нулю, то есть

$$-k_i \frac{x_i^0 - x_{i-1}^0 - l_i}{l_i} + k_{i+1} \frac{x_{i+1}^0 - x_i^0 - l_{i+1}}{l_{i+1}} = 0, \ \ (i = 0, ..., N-1), \tag{1}$$

где $x_{-1}^0 = 0$ – точка закрепления левого конца; $x_N^0 = 0$ – точка закрепления правого конца.

Мы получили линейную относительно $x_0^0, x_1^0, ..., x_{N-1}^0$ систему из N уравнений, решая которую, находим координаты масс в состоянии равновесия.

Рассмотрим теперь движение этой системы при условии, что точки закрепления остаются неподвижными, а массы могут перемещаться вдоль оси Ox. Обозначим через $u_i(t)$ смещение массы m_i от положения равновесия x_i^0 в момент времени t. Таким образом, координата массы m_i в момент времени t равна $x_i^0 + u_i(t)$.

Поскольку координаты x_i^0 $(i = 0, ..., N-1)$ известны, то для описания положения системы достаточно знать смещения $u_i(t)$. Подчеркнем, что в положении равновесия $u_i(t) = 0$ $(i = 0, ..., N-1)$.

При выведении системы из положения равновесия сила, действующая на массу m_i, станет равной (с учетом (1)):

$$\begin{aligned} F_i = &-\frac{k_i}{l_i}\left[(x_i^0 + u_i(t)) - (x_{i-1}^0 + u_{i-1}(t) - l_i)\right] + \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}}\left[(x_{i+1}^0 + u_{i+1}(t)) - (x_i^0 + u_i(t) - l_{i+1})\right] - \\ &-\frac{k_i}{l_i}(x_i^0 - x_{i-1}^0 - l_i) + \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}}(x_{i+1}^0 - x_i^0 - l_{i+1}) - \frac{k_i}{l_i}(u_i(t) - u_{i-1}(t)) + \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}}(u_{i+1}(t) - u_i(t)) = \\ &= \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}} u_{i+1}(t) - \left(\frac{k_i}{l_i} + \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}}\right) u_i(t) + \frac{k_i}{l_i} u_{i-1}(t). \end{aligned} \tag{2}$$

По *второму закону Ньютона*

$$F_i = m_i w_i = \frac{d^2}{dt^2}(x_i^0 + u_i(t)) = m_i \ddot{u}_i(t).$$

Подставляя вместо F_i выражение (2), мы получаем систему уравнений относительно $u_i(t)$:

$$\alpha_{i+1} u_{i+1}(t) - \left(\alpha_{i+1} + \alpha_i\right) u_i(t) + \alpha_i u_{i-1}(t) = m_i \ddot{u}_i(t), \tag{3}$$

где $\alpha_i = k_i / l_i = const$, $i = 0, ..., N-1$, $u_{-1}(t) = u_N(t) = 0$.

Введём обозначения

$$\vec{u}(t) = (u_0(t), u_1(t), ..., u_{N-1}(t)),$$

$$M = \begin{pmatrix} m_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & m_{N-1} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$J = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_0 & -\alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha_1 & \alpha_2 + \alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & \alpha_3 + \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_N + \alpha_{N-1} \end{pmatrix},$$

и эту систему переписываем в следующем виде:

$$\frac{d^2}{dt^2} M\vec{u}(t) = -J\vec{u}(t). \tag{5}$$

Найдем общее решение системы (5). Для этого сначала несколько преобразуем ее. Проще всего это сделать прямо с уравнением (3). Оно эквивалентно такому:

$$\sqrt{m_i}\ddot{u}_i(t) = \frac{\alpha_{i+1}}{\sqrt{m_i m_{i+1}}}\sqrt{m_{i+1}}u_{i+1}(t) - \frac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{m_i}\sqrt{m_i}u_i(t) + \frac{\alpha_i}{\sqrt{m_i m_{i-1}}}\sqrt{m_{i-1}}u_{i-1}(t).$$

Если теперь ввести обозначения

$$\sqrt{m_i}u_i(t) = v_i(t), \frac{\alpha_i}{\sqrt{m_i m_{i-1}}} = -b_{i-1}, \frac{\alpha_{i+1}+\alpha_i}{m_i} = a_i,$$

то это уравнение примет вид

$$\ddot{v}_i(t) = -b_i v_{i+1}(t) - a_i v_i(t) - b_{i-1}v_{i-1}(t),$$

то есть, система (5) будет эквивалентна такой:

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{v}(t) = -A\vec{v}(t), \tag{6}$$

где $a_i = \frac{1}{m_i}\left(\frac{k_{i+1}}{l_{i+1}} + \frac{k_i}{l_i}\right)$, $b_i = -\frac{k_{i+1}}{l_{i+1}\sqrt{m_i m_{i+1}}}$, A – *якобиевая матрица* вида:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & \dots & 0 \\ 0 & b_1 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу A. Собственные значения $\{\alpha_i\}_1^n$ (квадраты собственных частот колебаний масс) совпадают с корнями полинома [8]

$$Q_N(z) = zP_{N-1}(z) - a_{N-1}P_{N-1}(z) - a_{N-2}P_{N-2}(z).$$

Здесь $P_i(z)$ – ортогональные полиномы степени i, получающиеся по рекуррентным формулам из коэффициентов матрицы A:

$$\begin{cases} a_0 + b_0 P_1(z) = z; \\ b_0 + a_1 P_1(z) + b_1 P_2(z) = zP_1(z); \\ \dots \\ b_{N-3}P_{N-3}(z) + a_{N-2}P_{N-2}(z) + b_{N-2}P_{N-1}(z) = zP_{N-2}(z); \\ b_{N-2}P_{N-2}(z) + a_{N-1}P_{N-1}(z) = zP_{N-1}(z). \end{cases}$$

Заметим, что $Q_N(z)$ – полином степени N.

Собственные векторы матрицы имеют вид:

$$h_i = (1, P_1(\alpha_i), P_2(\alpha_i), \dots, P_{N-1}(\alpha_i)),\ i = \overline{(1, N)}. \tag{7}$$

Далее будем предполагать, что используемые векторы h_i – ортонормированы.

Одномерное возмущение и задача о линейных колебаниях точечных масс. Подействуем на систему сторонней силой, например, поместим пружину в жидкость. Тогда параметры изменятся. Система (6) примет вид

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{v}(t) = -B\vec{v}(t), \tag{8}$$

где матрица

$$B = A + c\langle\cdot, \varphi\rangle\varphi. \tag{9}$$

Перейдем к базису, состоящему из собственных векторов матрицы A.

Тогда

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Резольвента

$$R_\lambda(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda-\alpha_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda-\alpha_1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda-\alpha_n} \end{pmatrix},$$

$\varphi = \sum_{k=1}^{n} \xi_i h_i$, где $\xi_i = \langle \varphi, h_i \rangle$.

Пусть

$$< \varphi, h_k > \neq 0, \forall h_k : Ah_k = \alpha_k h_k \ (k = \overline{1,n}). \tag{10}$$

В [7] была доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Особенностями $R_\lambda(B)$, где B имеет вид (9) и φ удовлетворяет условию (10), могут быть лишь те λ, при которых $m(\lambda) = 0$, где $m(\lambda) = 1 + c\langle R_\lambda(A)\varphi, \varphi\rangle$.*

В нашем случае

$$m(x) = 1 + c\sum_{k=1}^{n} \frac{|\xi_i|^2}{x - \alpha_i},$$

$$m(x) = \frac{\frac{1}{c}\sum_{k=1}^{n}(x-\lambda_k) + |\xi_1|^2 \sum_{k\neq 1}(x-\lambda_k) + \ldots + |\xi_n|^2 \sum_{k\neq n}(x-\lambda_k)}{\prod_{k=1}^{n}(x-\lambda_k)}. \tag{11}$$

Числитель (11) имеет вид

$$\frac{1}{c}\sum_{k=1}^{n}(x-\lambda_k) + |\xi_1|^2 \sum_{k\neq 1}(x-\lambda_k) + \ldots + |\xi_n|^2 \sum_{k\neq n}(x-\lambda_k) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \tag{12}$$

где коэффициенты a_k соответственно равны:

$$a_n = \frac{1}{c};\ a_{n-1} = -\frac{1}{c}\sum_{1\le i\le n}\lambda_i + \sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2;\ a_{n-2} = \frac{1}{c}\sum_{1\le i<j\le n}\lambda_i\lambda_j - \sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2 \left(\sum_{1\le i\le n; i\neq k}\lambda_i\right);$$

$$a_{n-k} = (-1)^k \left[\frac{1}{c}\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_{k-1}\le n}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_k} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{c}\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_k} - \sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\left(\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_{k-1}\le n; i_j\neq k}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_{k-1}}\right)\right]. \tag{13}$$

Таким образом, функция $m(x)$ для возмущенной задачи о линейных колебаниях точечных масс является полиномом степени n с коэффициентами (13). Нули данной функции, а поэтому и собственные значения оператора B, будут перемежаться с собственными значениями оператора A.

Обратная задача для линейных колебаний точечных масс. Постановка этой задачи такова. Пусть нам известны собственные частоты колебания точечных масс в случае проведения эксперимента в воздушной среде и в случае изменения среды; мы хотим узнать некоторую возможную характеристику данной среды, которая повлияла на изменение частот колебаний. То есть, пусть даны 2 набора вещественных чисел $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ и $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ такие, что $\alpha_1 < \beta_1 < \ldots < \alpha_n < \beta_n$. Необходимо найти одномерное возмущение.

Считая, что числа $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ являются собственными значениями оператора A, построим (неоднозначным образом) оператор A. Будем искать оператор B в виде $B = A + c\langle\cdot,\phi\rangle\phi$, такой, что числа $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ являются его собственными значениями. Для этого найдем $c \neq 0$, $c \in R$ и все компоненты вектора ϕ (будем предполагать, что они также вещественны).

В [7] была доказана следующая теорема

Теорема. *Пусть даны вещественные числа $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ такие, что $\alpha_1 < \beta_1 < \ldots < \alpha_n < \beta_n$, где $\{\alpha_i\}_1^n$ – собственные значения линейного самосопряженного оператора A, действующего в $n-$мерном пространстве H. Тогда существует оператор P ранга 1: $Ph = c\langle h, \varphi\rangle\varphi$, где h – произвольный вектор из H, $\varphi \in H$, c – скаляр, $c > 0$, такой, что числа $\{\beta_i\}_1^n$ являются собственными значениями оператора $B = A + P$.*

Таким образом, восстановим возмущение (правда неединственным способом), которое будет характеризовать некоторое свойство среды, которая повлияла на изменение частот колебаний.

Пример. Пусть

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

Тогда собственные значения матрицы A:

$$\alpha_1=1-\sqrt{2},\ \alpha_2=1,\ \alpha_3=1+\sqrt{2}.$$

Возьмем конкретное возмущение. Пусть

$$c=1,\ |\xi_1|^2=\frac{7}{24},\ |\xi_2|^2=\frac{7}{12},\ |\xi_3|^2=\frac{7}{24}.$$

Тогда полином из (12) примет вид:

$$(x-(1-\sqrt{2}))(x-1)(x-(1+\sqrt{2}))+\frac{7}{24}(x-1)(x-(1+\sqrt{2}))+\frac{7}{12}(x-(1-\sqrt{2}))(x-(1+\sqrt{2}))+\frac{7}{24}(x-1)(x-(1+\sqrt{2}))=0.$$

После элементарных преобразований полинома получим:

$$(x-1)^3+\frac{7}{6}(x-1)^2-2(x-1)-\frac{7}{6}=0.$$

Тогда корни полинома, а, следовательно, и собственные значения возмущенного оператора B, таковы:

$$\beta_1=x_1=\frac{2-\sqrt{22}}{3},\ \beta_2=x_2=\frac{1}{2},\ \beta_3=x_3=\frac{2+\sqrt{22}}{3}.$$

Легко видеть, что имеет место перемежаемость собственных значений:

$$\beta_1<\alpha_1<\beta_2<\alpha_2<\beta_3<\alpha_3.$$

Перспективы дальнейших исследований. Предложенный метод может быть развит на случай бесконечного числа масс и на случай возмущений ранга больше единицы.

Выводы. В работе рассмотрена задача о линейных колебаниях точечных масс, а также исследована задача ее возмущения посредством изменения условий среды эксперимента. Кроме того, была решена обратная задача по восстановлению некоторой характеристики среды, которая могла бы повлиять на колебания точечных масс. Доказано, что в случае возмущения собственные значения оператора системы (собственные частоты колебания точечных масс) будут перемежаться с собственными значениями невозмущенной задачи. Также описан метод восстановления или идентификации изменения в некоторой характеристике среды (например, вязкость жидкости, скорость инерциальной системы), которая могла повлиять на эксперимент.

Список литературы

1. *Weyl H.* Über beschränkte quadratishe Formen, deren Differenz vollstetig ist // Rend. Circolo mat. Palermo. – 1909. – №. 27. – С. 373 – 392.
2. *Rellich F.* Störumgtheory der Spektralzerlegun I // Math. Ann. – 1936. – № 113. – С. 600 – 619.
3. *Friedrichs K. O.* Über die Spektralzerlegung eines Integral-operators // Math. Ann. – № 115 (1938). – С. 259 – 272.
4. *Като Т.* Теория возмущения линейных операторов. – Москва : Мир, 1972. – 740 с.
5. *Rozenblum M.* Perturbation of the continuous spectrum and unitary equivalence // Pacif. Journ. Math. – 1957. – Т. 7. – № 1. – С. 997 – 1010.
6. *Nizhnik L. P.* On rank one singular perturbations of selfadjoint operators // Methods of Functional Analysis and Topology. – 2001. – Т. 4. – № 3. – С. 54 – 66.
7. *Сыровацкий А. Н.* Об одномерном возмущении самосопряженных операторов с простым спектром // Вестник ХНУ. Сер. : Математика, прикладная математика и механика. – 2010. – № 922. – С. 20 – 31.
8. *Марченко В. А., Славин В. В.* Обратные задачи теории малых колебаний. – Киев : Наукова думка, 2015. – 218 с.

References (transliterated)

1. Weyl H. Über beschränkte quadratishe Formen, deren Differenz vollstetig ist. *Rend. Circolo mat. Palermo*. 1909, no. 27, pp. 373–392.
2. Rellich F. Störumgtheory der Spektralzerlegung I. *Math. Ann.* 1936, no. 113, pp. 600–619.
3. Friedrichs K. O. Über die Spektralzerlegung eines Integral-operators. *Math. Ann*. no. 115 (1938), pp. 259–272.
4. Kato T. *Teoriya vozmushheniya lineynykh operatorov* [Perturbation theory for linear operators]. Moscow, Mir Publ., 1972. 740 p.
5. Rozenblum M. Perturbation of the continuous spectrum and unitary equivalence. *Pacif. Journ. Math*. 1957, vol. 7, no. 1, pp. 997–1010.
6. Nizhnik L. P. On rank one singular perturbations of selfadjoint operators. *Methods of Functional Analysis and Topology*. 2001, vol. 7, no. 3, pp. 54–66.
7. Syrovatskyy A. N. Ob odnomernom vozmushhenii samosopryazhennykh operatorov s prostym spektrom [About one-dimensional perturbation of self-adjoint operators with a simple spectrum]. *Vestn. KhNU. Ser.: Matematika, prikladnaya matematika i mekhanika* [Bulletin of Kharkov National University. Series: Mathematics, applied mathematics and mechanics]. 2010, no. 922, pp. 20–31.
8. Marchenko V. A., Slavin V. V. *Obratnye zadachi teorii malykh kolebaniy* [Inverse problems of the theory of small oscillations]. Kiev. Naukova Dumka Publ., 2015, 218 p.

Поступила (received) 28.08.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Про відновлення збурення коливань точкових мас по спектру / О. М. Сировацький // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 111 – 116. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.

О восстановлении возмущения колебаний точечных масс по спектру / А. Н. Сыровацкий // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 111 – 116. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.

On restoring point mass oscillation perturbations by spectrum / A. N. Syrovatsky // Bulletin of National Technical University «KhPI». Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 30 (1252). – pp. 111 – 116. Bibliog.: 8 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Сировацький Олександр Миколайович – викладач Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (050) 630-75-05; e-mail: asyrovatsky@gmail.com.

Сыровацкий Александр Николаевич – преподаватель Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина, г. Харьков; тел.: (050) 630-75-05; e-mail: asyrovatsky@gmail.com.

Syrovatsky Aleksandr Nikolaevich – teacher at the V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkov; tel.: (050) 630-75-05; e-mail: asyrovatsky@gmail.com.

УДК 669.187.2

С. Н. ТИМОШЕНКО

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ СТАЛЕПЛАВИЛЬНОЙ ВАННЫ И ПОДОВОГО ЭЛЕКТРОДА ДУГОВОЙ ПЕЧИ ПОСТОЯННОГО ТОКА С ЦЕЛЬЮ ПОВЫШЕНИЯ ЕЕ ЭНЕРГОЭФФЕКТИВНОСТИ

На основі чисельного моделювання розтікання струму у ванні дугової сталеплавильної печі постійного струму місткістю 12 тонн виконана оцінка питомої потужності перемішування при електровихровій течії металу, що характеризує інтенсивність процесів тепло- і масообміну. Збільшення глибини ванни при даній місткості печі і зміщення подового електрода щодо осі симетрії в певних межах є більш ефективним засобом підвищення енергоефективності дугової печі малої місткості, ніж застосування двох електродів стрижневого типу або електроду пластинчастого типу.

Ключові слова: дугова сталеплавильна піч постійного струму, подовий електрод, електровихрова течія, потужність перемішування, геометрія ванни, енергоефективність.

На основе численного моделирования растекания тока в ванне дуговой сталеплавильной печи постоянного тока вместимостью 12 тонн выполнена оценка удельной мощности перемешивания при электровихревом течении металла, характеризующая интенсивность процессов тепло- и массообмена. Увеличение глубины ванны при данной вместимости печи и смещение подового электрода относительно оси симметрии в определенных пределах являются более эффективным средством повышения энергоэффективности дуговой печи малой вместимости, чем применение двух электродов стержневого типа или электрода пластинчатого типа.

Ключевые слова: дуговая сталеплавильная печь постоянного тока, подовый электрод, электровихревое течение, мощность перемешивания, геометрия ванны, энергоэффективность.

Based on the numerical simulation of current flow distribution in the bath of a 12-ton DC electric arc steelmaking furnace (EAF), the specific mixing power of the electro-vortex flow (EVF) in the liquid bath, characterizing the intensity of the heat and mass transfer processes, was estimated. Modernization of a standard bath (diameter to height ratio 4.0 – 5.5) to a "deep" one (ratio 1.7) allows reducing the duration of refining period and the specific energy consumption of the EAF by 9% due to growth of the EVF mixing power. For the given case it seems reasonable to install a single billet-type bottom electrode (BE) along the EAF axis of symmetry instead of two symmetrical BE, which leads to cost saving, reducing the heat loss due to water cooling and minimizing the refractory wear. If the realization of the "deep" bath is hampered by design constraints, it is advisable to install a single billet-type BE, shifted from the EAF axis of symmetry to a certain distance, which is a compromise solution between increasing the EAF energy efficiency and local wear of the lining. Using the fin-type BE in a small capacity EAF, operating by classical technology without leaving the "hot heel", seems less energy efficient than the billet-type BE.

Key words: DC electric arc steelmaking furnace, bottom electrode, electro-vortex flow, mixing power, bath geometry, energy efficiency.

Введение. Дуговые сталеплавильные печи (ДСП) привлекают технологов возможностью интенсивного и концентрированного ввода энергии, регулирования окислительного потенциала в рабочем пространстве и широкого выбора вариантов исходной шихты. Печи, работающие на постоянном токе (ДСППТ), в сравнении с ДСП переменного тока, характеризуются устойчивым горением дуги, что способствует снижению угара шихты, уровня шума и *фликер-эффекта* [1 – 3]. В «большой» металлургии при интенсивной двухстадийной технологии эти преимущества в значительной мере нивелируются скоротечностью плавки полупродукта [2]. Более прочные позиции ДСППТ заняли в «малой» металлургии, представленной литейными цехами с агрегатами, как правило, малой вместимости и классической технологией плавки с относительно длительным периодом доводки жидкой стали [3, 4].

Анализ последних исследований и публикаций. Постановка проблемы. Важным и критичным узлом ДСППТ является подовый электрод (ПЭ), который замыкает вторичную электрическую цепь: верхний графитированный электрод (катод) – дуга – шлак – металл – ПЭ (анод) и обеспечивает проведение технологического