

**Тимошенко Сергій Миколайович** – кандидат технічних наук, докторант, Донецький національний технічний університет, м. Покровськ; тел.: (066) 556-14-59; e-mail: stimoshenko155@gmail.com.

**Тимошенко Сергей Николаевич** – кандидат технических наук, докторант, Донецкий национальный технический университет, г. Покровск; тел.: (066) 556-14-59; e-mail: stimoshenko155@gmail.com.

**Timoshenko Sergii Mykolaevich** – Candidate of Engineering Sciences, doctoral student, Donetsk National Technical University, Pokrovsk; tel.: (066) 556-14-59; e-mail: stimoshenko155@gmail.com.

УДК 519.85; 519.7

**Н. Є. ХАЦЬКО**

### СУЧАСНІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ КОМПЕНСАЦІЇ ПОХИБОК ІНЕРЦІАЛЬНИХ ДАТЧИКІВ ДЛЯ ЗАСТОСУВАННЯ В ЕКСПЕРИМЕНТАХ ПО КАЛІБРУВАННЮ

Розглядаються методи калібрування інерційних датчиків і математичні моделі компенсації їх помилок, що дозволяють ідентифікувати оцінки параметрів цих моделей при проведенні натурних експериментів з калібрування. Огляд проводиться за матеріалами останніх десяти років. Аналіз літератури привів до виділення універсальної математичної моделі, що використовується в більшості експериментів. Також виділені типові фактори, які зазвичай враховуються в побудові моделей і розробці планів експериментів. Отримані результати в подальшому можуть бути корисними для вибору доступного і припустимого методу калібрування окремого інерціального модуля.

**Ключові слова:** калібрування інерціального датчика, математична модель компенсації похибок, зсув нуля.

Рассматриваются некоторые математические модели, применяемые в последнее десятилетие для калибровки инерциальных датчиков. Внимание к математическим моделям компенсации ошибок датчиков вызвано широким применением метода алгоритмической компенсации погрешностей инерциальной системы во время ее функционирования. В статье определены несколько основных математических моделей для ошибок гироскопов и акселерометров. Анализ литературы позволил выявить факторы, на которые нужно обращать внимание при разработке математических моделей для датчиков, работающих на разных физических принципах, также привел к выделению универсальной математической модели, используемой в большинстве экспериментов. Полученные выводы могут быть использованы в дальнейшем при выборе доступного метода калибровки для отдельного инерциального модуля.

**Ключевые слова:** калибровка инерциального датчика, математическая модель компенсации ошибок, смещение нуля, несоосность осей датчика.

In this paper some of the mathematical models applied for calibration of inertial sensors in the last decade are considered. The attention that has been received by the mathematical models of sensor errors is mainly due to the wide application of the method of algorithmic compensation of errors in the inertial system during its operation. As a whole, calibration is limited to estimating the key errors: scale factor, offset and misalignment of the sensor axes. In the paper several basic mathematical error models of gyroscopes and accelerometers are defined. The analysis of the literature made it possible to determine the factors that must be taken into account when developing mathematical models for sensors operating on different physical principles, and also led to the identification of a universal mathematical model used in the most experiments. The main result of this review is the understanding that individual calibration of sensors, even without using precision stands, can significantly increase the accuracy of the inertial unit and is an indispensable stage of operation, especially for mass production sensors. The obtained conclusions can be used in the future when choosing an available calibration method for an individual inertial module.

**Key words:** calibration of the inertial sensor, mathematical model of error compensation, zero drift, sensor axes misalignments.

**Вступ.** Попри наявність супутникової навігації традиційне інерціальне обчислення широко використовується для отримання навігаційних параметрів рухомих об'єктів. Сталості використання сприяє те, що метод є автономним і завжди здатен з деякими припущеннями забезпечити оцінку місця розташування. Відомі недоліки цього методу, такі як потреба в налаштуванні перед кожним сеансом експлуатації та накопичування похибки системи з часом. Якщо накопичена похибка стає занадто великою, її можна скорегувати за допомогою зовнішніх допоміжних засобів, тим самим, повернутися до початкової точності роботи системи. Але, за природою числення, похибки знову будуть зростати з тією ж швидкістю, яка залежить від точності інерціальних датчиків системи – *гіроскопів* та *акселерометрів*. Якщо придушити похибки кожного окремого датчика інерційної системи, то процес накопичення помилки всієї системи сповільниться і точність її роботи підвищиться.

Серед сучасних методів підвищення точності інерціальних вимірів, разом з розвитком технології виробництва датчиків, широко застосовуються методи алгоритмічної компенсації похибок на основі математичних моделей вимірів. Такий підхід дозволяє підвищити точність роботи інерціальних датчиків без великих додаткових витрат. Відомим напрямком є алгоритмічна корекція первісної інформації з використанням фіксованих оцінок похибок датчиків та інерціального модуля в цілому. У цих методах на перший план висувається відповідність математичної моделі похибок реальним, а не теоретичним, вимірам фізичних явищ, та алгоритмам калібрування, тобто планам або послідовностям певних дій у калібрувальному експерименті для оцінки параметрів математичної моделі.

Слід зазначити, що сучасною світовою тенденцією є здешевлення виробництва та експлуатації інерційних систем. Цьому сприяє розвиток технології виробництва датчиків на мікро-електро-механічних системах (МЕМС). Вони відрізняються малими масо-габаритними характеристиками, малою вартістю і порівняно невисокою точністю вимірювань. Точність інерціальних МЕМС-датчиків пропорційна їх вартості, і дешеві датчики

мають низьку точність. Але деякі сучасні досить дорогі МЕМС-акселерометри зрівнялися по точності з механічними акселерометрами навігаційного класу точності. А точність окремих серійних МЕМС-гіроскопів наближається до точності волоконно-оптичних гіроскопів, що в даний час використовуються в аерокосмонавтиці, де досі використовувались тільки вимірювачі прецизійної точності.

Якщо говорити про більш широку область використання інерціальних датчиків, то це безсумнівно малі безпілотні літальні апарати (БПЛА), де як раз МЕМС-датчики дозволили використовувати алгоритми безплатформної інерціальної навігаційної системи (БІНС) для управління їх польотом. При роботі з БПЛА часто виникає суперечлива ситуація, в якій порівняно дешеві навігаційні системи використовуються на порівняно дешевих літальних апаратах, проте їх польотні завдання часто вимагають високої точності польоту і збереження заданої траєкторії руху, що неможливо при наявній точності БІНС на МЕМС-датчиках. За умов сучасної тенденції до здешевлення інерціальних модулів та масовості їх випуску, появи нових типів датчиків виникає необхідність у розробці методів калібрування з використанням нових математичних моделей компенсації похибок гіроскопів та акселерометрів. У зв'язку з цим, українські вчені здійснюють відповідні дослідження [1] та адаптують теперішні методи калібрування до атестації «грубих» датчиків на лабораторному обладнанні низької точності.

**Постановка задачі.** Виходячи зі сказаного, завдання даного дослідження полягає в розгляді відомих математичних моделей похибок інерціальних датчиків з тематичних наукових інформаційних джерел. Під час вивчення матеріалів передбачається виявити найбільш поширені складові похибки інерціальних датчиків. Також, для подальшої коректної розробки моделей, необхідно приділити увагу фізичним умовам проведення експериментів і планам їх проведення.

**Основні напрямки підвищення точності інерціальних вимірів.** Точність інерціальної навігації залежить від декількох факторів: використаних алгоритмів обчислень (*методичні похибки*), точності інерціальних датчиків, з яких складається модуль (*інструментальні похибки*), а також ефективності алгоритмічної компенсації похибок датчиків, тобто від математичної моделі похибок, яка має як найкраще відтворювати вплив похибок.

Загалом, опубліковані методи підвищення точності можна умовно розділити на два великі напрямки:

- технологічні та конструктивні методи;
- алгоритмічні методи.

В рамках першого напрямку досліджується фізична природа виникнення спотворень вимірів для знаходження технологічних і конструктивних методів їх зменшення. Для поліпшення умов функціонування чутливих елементів при розробці і виготовленні інерціальних блоків ізолюються сторонні фізичні явища [2 – 7], оптимізуються габаритні характеристики чутливих елементів [8], вибираються способи раціонального геометричного розташування осей чутливості датчиків в просторі інерціального модуля [9, 10], і тому подібне. При дотриманні чинних технологій виробництва подальше підвищення характеристик точності датчиків можливе лише із застосуванням алгоритмічної компенсації вимірів, тому методи другої групи часто дозволяють значно поліпшити результати.

Впровадження даних методів неможливе без математичної моделі вимірів, що містить ідентифіковані похибки. В залежності від конструкції і технології виробництва датчиків похибки мають різну природу. Для кожного типу датчиків розробляється модель компенсації похибок, де враховуються всі відомі на цей час специфічні для даного типу джерела похибок вимірювань. Наприклад, модель для похибок роторного гіроскопа в [11] налічує 6 параметрів, властивих тільки наведених авторами конструкції датчика. В [12] модель дрейфів електростатичних гіроскопів враховує нерівножорсткість карданів підвісу, напругу зсуву на електродах і так далі, що тягне ускладнення математичної моделі і ускладнює процес калібрування. У математичну модель вимірювань хвильового твердотілого гіроскопа [13] включені складові, що враховують малу анізотропію в'язкопружних властивостей конструкційного матеріалу і вектор узагальнених сил, що здійснюють рух резонатора.

**Математичні моделі для похибок.** Розробка математичної моделі є необхідним етапом в створенні методів алгоритмічної компенсації вимірювань. Деякі загальні математичні моделі інерціальних вимірювань закріплені в міжнародних стандартах [14 – 16]. На практиці часто використовується узагальнена модель компенсації похибок датчиків, незалежно від їх фізичної природи, яка має вигляд

$$X^{61M} = (1 + \delta M) \cdot (A^{-1} X^* + \delta X + \xi), \quad (1)$$

де  $X^*$  – еталонне значення величини в базисній системі координат;  $\delta X$  – зсув нуля датчика, під яким розуміється величина вихідного сигналу при нульовому вимірюваному параметрі;  $\delta M$  – похибка масштабного коефіцієнта (МК), тобто похибка крутості вихідної характеристики датчика;  $A$  – матриця, яка складена з кутових параметрів неспіввісності осей чутливості датчиків з осями віртуальної ортогональної системи координат, що приймається як базисна;  $\xi$  – випадкова складова вимірювань;  $X^{61M}$  – значення, що виміряне датчиком.

В роботі [17] опублікована узагальнена модель для представлення похибки МЕМС-датчиків у вигляді:

$$e = e_0 + \Delta K / K_0 + e_n(x) + e_\delta + n(t) + e_{\phi},$$

де  $x$  – вимірювана величина (для МЕМС-гіроскопів це складова кутової швидкості, а для МЕМС-акселерометрів це складова лінійного прискорення);  $e_0$  – зсув нуля;  $\Delta K / K_0$  – відносна похибка МК;  $e_n(x)$  – складова, обумовлена нелінійністю характеристики;  $e_\delta$  – динамічна похибка;  $n(t)$  – шум;  $e_{\phi}$  – ціла сукупність складових

додаткових похибок, обумовлених факторами впливу (температурою, вібрацією, магнітним полем і таке інше). Таке адитивне уявлення є зручним для першого наближення показників точності, але в ньому змішані вихідні причини появи тих чи інших складових похибок і типові особливості їх прояву.

Процес розробки моделей, що відображають фізичну суть вимірювань окремих типів датчиків, може бути складним. Особливо важко відтворити фізичну модель датчиків оптичного типу [18]. В цьому випадку використовують феноменологічну модель (1) і експериментально визначають її параметри в процесі калібрування. Похибки датчиків і, особливо, характер їх зміни досліджуються і ідентифікуються в різних умовах, відповідно запланованим умовам експлуатації. Датчики різного типу чутливі до різного набору факторів. Так, в [19 – 23] аналізується дія температурних змін; в [24, 25] розглядається вплив на датчики постійного магнітного поля; а в [26, 27] аналізується вплив вібрації. Виявлені під час експериментів фактори параметризуються і вводяться в математичну модель (1), таким чином відбувається вдосконалення її структури.

Після формування структури моделі розробляють план калібрувального експерименту, і починають процес власне калібрування, завданням якого є параметризація складових моделі та виявлення характеру їх зміни. Відповідно до [28], калібрування – це операція, яка за певних умов, в першу чергу, встановлює відповідність між вимірними значеннями й еталонними, вказує похибки вимірювань і, другим кроком, використовує цю інформацію для отримання уточнених результатів вимірів. Другий крок має визначальне значення для підвищення точності інерціального модуля в цілому.

Розглянемо наведені в літературі математичні моделі похибок акселерометричних датчиків.

Класичний стендовий метод калібрування прецизійних акселерометрів, які використовують для системи управління апарату "Союз-ТМА", описано в [29, 30]. Блок складається з 6 акселерометрів, вісі чутливості яких розташовані на утворювальних конуса. Для кожного з датчиків визначаються: зміщення нуля і випадкове відхилення зміщення нуля від середнього значення, МК і його нелінійність, кути нахилу осі чутливості кожного вимірювального каналу до площини перпендикулярної осі конуса. Особливістю методу є використання прямих вимірів фізичного інваріанта сили тяжіння та даних про положення оптичної голівки, на яку кріпитися блок акселерометрів. В результаті визначаються параметри моделі (1).

Другим, вже традиційним методом з використанням прямих вимірів, є, так званий, скалярний спосіб калібрування блоку акселерометрів [31 – 33]. Головна особливість цього методу полягає в застосуванні в якості еталону замість векторної величини – скалярної, а саме квадрата модуля вектору  $\bar{g}$ . Вихідний сигнал блоку акселерометрів представлено моделлю:

$$W_j = M_j \cdot (E_{0j} + V_j + E_{1j}V_j + E_{2j}V_j^2)$$

де  $j = X, Y, Z$  – вісі системи координат (СК);  $W_j$  – вихідний сигнал  $j$ -го приладу;  $M_j$  – номінальна величина МК  $j$ -го приладу;  $V_j$  – проекція вимірюваного вектора на  $j$ -у вісь системи  $XYZ$ , що близька до ортогональної;  $E_{(0,1,2)j}$  – коефіцієнти розкладання за ступенями вхідного сигналу, зокрема,  $E_{0j}$  – зсув нуля. Шуканий квадрат модуля вектору вимірів дорівнює сумі квадратів складових вектору  $\bar{W}$ , а похибка виміру прискорення сили тяжіння отримана як нормована різниця квадратів вимірної та еталонної величин:

$$\delta g = \frac{W_X^2 + W_Y^2 + W_Z^2 - g_X^2 - g_Y^2 - g_Z^2}{2 \cdot |\bar{g}|},$$

де  $g_j$ ,  $j = X, Y, Z$  – істинна відома величина вимірюваного вектора.

План проведення калібрувального експерименту в цьому методі вимагає особливої послідовності поворотів вимірювального модуля: блок обертається навколо кожної з номінальних осей координат тріади по 8 разів на  $45^\circ$  зі свого початкового положення. Процес калібрування має ітераційний характер і припиняється після досягнення деякого рівня точності оцінок.

Особливістю наступного методу калібрування є використання уклінно-поворотного столу з обмеженнями по куту нахилу  $90^\circ$ . За допомогою методу з [34] відбувається уточнення коефіцієнтів моделей похибок інерціальних датчиків, отриманих раніше. Калібрування блоку акселерометрів проводиться по прямим вимірам вектору  $\bar{g}$  і спирається на лінійну модель похибок однієї осі чутливості без урахування теплової моделі:

$$W = \frac{W_0}{1 + K_W} - dW, \quad (2)$$

де  $W_0$  – покази акселерометра;  $W$  – проекція уявного прискорення на вісь чутливості акселерометра;  $K_W$  – стала похибка масштабного коефіцієнта;  $dW$  – сталий зсув нуля.

У порівнянні з (2), вираховується проекція вектору на вісь чутливості акселерометра за виразом  $W = \bar{g} \cdot \bar{a}$ , де  $\bar{a} = (a_X, a_Y, a_Z)^T$  – одиничний вектор визначення вісі чутливості акселерометра.

План експерименту містить дві схеми: перша – вісі чутливості акселерометрів колінеарні осям приладової системи координат; друга – головна діагональ тригранника блоку акселерометрів збігається з вертикальною віссю приладової СК. Кожна схема припускає установку блока в 4 положення з поворотами на  $90^\circ$ .

Калібрування блоку гіроскопів також залежить від очікуваної точності датчиків. Прецизійні датчики проходять калібрування в індивідуальному порядку, що дає можливість зафіксувати характеристики точності конкретного гіроскопа. Так у [35] калібрування трикомпонентного лазерного гіроскопа проводиться по прямим вимірам компонент куткової швидкості Землі на прецизійному одновісному поворотному столі. Приріст кута повороту навколо осі чутливості  $i$ -го датчика у момент спостереження  $t$  має вигляд:

$$\Delta\varphi_i(t) = k_i(n_i(t) - n_i(t - \Delta t)) + (\omega_i^0 + \delta\omega_i)\Delta t,$$

де  $\Delta t$  – такт знімання інформації;  $i = 1, 2, 3$  – номер вісі чутливості;  $k_i$  – масштабний коефіцієнт  $i$ -й вісі чутливості;  $\omega_i^0$  – стала компонента зсуву нуля;  $\delta\omega_i$  – випадкова компонента;  $n_i$  – поточне значення буфера реверсивного лічильника імпульсів.

В результаті калібрування визначаються: масштабний коефіцієнт  $k_i$ , стала компонента зсуву нуля  $\omega_i^0$ , елементи матриці неортогональності  $a_{ij}$  для кожної вісі чутливості.

Зазвичай процес калібрувальних випробувань дорого коштує і є тривалим, тому останнім часом з'явилися методи калібрування, що не вимагають наявності прецизійних стендів. Поширеним способом калібрування зміщення нуля гіроскопів є калібрування за допомогою реверсу. Так у [36] калібрування нуля приладів проводиться на нерухомій основі з реверсом вимірювальних осей на  $180^\circ$  в площині горизонту. В цьому методі застосовується *фільтр Калмана* та *метод найменших квадратів* для оцінки МК, зсуву нуля датчиків та несоосності осей, що приведені в моделі (1).

Ще одна модель застосована в [37] і описує дрейф нуля гіроскопа та має 9 складових:

$$\omega = \omega_0 + \omega_x n_x + \omega_y n_y + \omega_z n_z + \omega_{xy} n_x n_y + \omega_{xz} n_x n_z + \omega_{yz} n_y n_z + \omega_{yy} n_y^2 + \omega_{zz} n_z^2,$$

де  $\omega$  – загальний дрейф нуля гіроскопа;  $\omega_0$  – незалежна від перенавантаження складова;  $\omega_x, \omega_y, \omega_z, \omega_{xy}, \omega_{xz}, \omega_{yz}, \omega_{yy}, \omega_{zz}$  – коефіцієнти при ступенях розкладання перенавантаження;  $n_x, n_y, n_z$  – відомі проекції одиничного вектору перенавантаження на вісі, зв'язані з гіроскопом.

Цікаві більш складні залежності, що враховують одночасно два і більш факторів впливу. В [38] модель нульового сигналу гіроскопа враховує температуру, перенавантаження і лінійний дрейф:

$$\omega = \omega_{0c} + \omega_{0t}(t) + \omega_{0w}(w) + \omega_{0T}(T) + \omega_\xi(t),$$

де  $\omega_{0c}$  – постійний сигнал;  $\omega_{0t}$  – дрейф гіроскопа в часі;  $\omega_{0w}$  – складова, що виникає в наслідок залежності нульового сигналу від постійного прискорення;  $\omega_{0T}$  – температурна складова;  $\omega_\xi$  – випадкова складова (шум вихідного сигналу).

**Висновки.** Проведене дослідження наведених у літературі методів калібрування і математичних моделей похибок інерціальних датчиків дозволяє стверджувати, що для отримання надійних і вірогідних відомостей про характеристики точності датчиків стосовно їх використання для вирішення різних прикладних задач необхідно проведення комплексних калібрувальних випробувань.

Для розробки коректної математичної моделі похибок обраного датчика потрібно орієнтуватися на міжнародні стандарти ІЕЕЕ, але з урахуванням фізичної природи датчика. Найбільш широке поширення отримали наступні показники точності: зсув нуля або постійна складова, масштабний коефіцієнт або коефіцієнт перетворення, нелінійність, шум, прогресуючий повільний дрейф нуля.

Під час складання планів калібрувальних експериментів необхідно звернути увагу на діапазон зміни у часі кожного виду похибки або її розкид, на мінливість показника від пуску до пуску (від включення до включення), на зміну значень параметрів під час інтенсивних дій або після них (наприклад, після удару). Також розробник методу має стежити за рівнем залишкової похибки після введення поправок на систематичні складові за результатами калібрування, та знайти засіб удосконалити математичну модель для більшого корегування вимірів.

Для повноти визначення всього переліку похибок під час розробки калібрувального експерименту також потрібно враховувати, що для різних умов роботи датчика може бути потрібно застосовувати різні математичні моделі. Види фізичних умов бувають наступні: робота датчика на нерухомій основі; робота з відомим сталим значенням вимірювального інваріанта (сила тяжіння, обертання зі заданою кутковою швидкістю, тощо); робота на вібраційному стенді, ударному стенді; вплив акустичних дій, зміна температури, вплив електромагнітного поля. Цей список, як і попередні, може бути подовжено. Зокрема, список можливих впливів, на які може реагувати датчик, залежить від використаного для створення датчика фізичного явища.

Нові моделі з'являються разом зі створенням нових типів датчиків, з появою нового лабораторного устаткування, з виявленням неврахованих факторів впливу у вже наявних моделях та з необхідністю подальшого підвищення точності вимірів. Таким чином, огляд математичних моделей компенсації похибок інерціальних датчиків, що супроводжують процес калібрування, може бути подовжено.

#### Список літератури

1. Хацько Н. Е., Успенский В. Б. Разработка и экспериментальная проверка методики паспортизации микроакселерометра // Вісник НТУ «ХП». – 2009. – № 10. – С. 188 – 194.
2. Некрасов Я. А., Моисеев Н. В., Беляев Я. В. Влияние поступательных вибраций, ударов и акустических помех на характеристики микро-

- механического гироскопа // Гироскопия и навигация. – 2016. – № 2 (93). – С. 56 – 67.
3. Евстифеев М. И., Елисеев Д. П. Оптимизация конструкции подвижного электрода микромеханического гироскопа RR – типа // Гироскопия и навигация. – 2017. – № 2 (97). – С. 66 – 76.
  4. Денисов Р. А., Маслов А. А., Маслов Д. А. Влияние опорного напряжения электромагнитных датчиков управления на дрейф волнового твердотельного гироскопа // Гироскопия и навигация. – 2016. – № 1 (92). – С. 60 – 71.
  5. Барулина М. А., Джашишов В. Э., Панкратов В. М. Математическая модель микромеханического акселерометра с учетом температурных воздействий, термоупругого напряженно-деформированного состояния и динамических эффектов // Гироскопия и навигация. – 2008. – № 1. – С. 55 – 71.
  6. Лысова О. М., Нестеренко Т. Г., Плотникова И. В. Анализ технологических погрешностей микромеханического гироскопа // Материалы XV Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. – СПб. : ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2008. – С. 24 – 26.
  7. Беляева Т. А., Некрасов Я. А., Беляев Я. В., Багаева С. В. Подавление квадратурной помехи в микромеханическом гироскопе RR – типа с помощью электродов, расположенных над зубцовой зоной // Гироскопия и навигация. – 2008. – № 1 (60). – С. 82 – 94.
  8. Федоров А. Е., Рекунов Д. А. Компенсация инструментальных погрешностей трехкомпонентного лазерного гироскопа моноблочной структуры // Материалы XVI Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. – СПб: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2009. – С. 42 – 47.
  9. Ковтун Д. А., Микаэлян С. В. Улучшение точности бесплатформенных инерциальных навигационных систем с пространственно распределенным набором датчиков // Синергия Наук. – 2017. – № 12. – С. 754 – 767.
  10. Расповов В. Я., Матвеев В. В., Алалуев Р. В. Бортовые информационно-управляющие системы на микромеханических чувствительных элементах для беспилотных летательных аппаратов различного назначения // Материалы XV Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. – СПб. : ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2008. – С. 45 – 53.
  11. Биндер Я. И., Падерина Т. В. Калибровка датчиков угловой скорости с механическим носителем вектора кинетического момента в составе бесплатформенных инерциальных измерительных модулей // Гироскопия и навигация. – 2003. – № 3. – С. 3 – 16.
  12. Емельянцева Г. И., Ландау Б. Е., Левин С. Л., Романенко С. Г. Об уточнении модели дрейфов электростатических гироскопов бескарданной инерциальной системы ориентации и о методике их калибровки на стенде и в условиях орбитального космического аппарата // Гироскопия и навигация. – 2008. – № 1 (60). – С. 42 – 54.
  13. Мартыненко Ю. Г., Меркурьев И. В., Подалков В. В. Калибровка параметров малой вязкоупругой анизотропии резонатора волнового твердотельного гироскопа по результатам стендовых испытаний // Материалы XVII Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. – СПб. : ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2010. – С. 32 – 39.
  14. IEEE Std. 836-2009, IEEE Recommended Practice for Precision Centrifuge Testing of Linear Accelerometers. – 2009. 152 p.
  15. Gaitan M., Lightman K., Takacs M. MEMS Testing Standards: A Path to Continued Innovation. – Pittsburgh : MEMS Industry Group, 2011. – 154p.
  16. IEEE Std 1554-2005. IEEE Recommended Practice for Inertial Sensor Test Equipment, Instrumentation, Data Acquisition, and Analysis, 2013. 145 p.
  17. Челпанов И. Б., Козлов Д. П., Кочетков А. В. Построение комплексной системы организации калибровки микромеханических датчиков // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ». – 2016. – Т. 8. – №1. doi: 10.15862/21TVN116 – Режим доступа : <http://naukovedenie.ru/PDF-21TVN116.pdf>. – Дата звернення : 15 вересня 2017.
  18. Jiang R., Yang G., Zou R., Wang J., Li J. Accurate Compensation of Attitude Angle Error in a Dual-Axis Rotation Inertial Navigation System // Sensors. – 2017. – № 17 (3). – С. 615 – 632. doi: 10.3390/s17030615.
  19. Козлов А. В., Тарыгин И. Е., Голован А. А. Калибровка инерциальных измерительных блоков на грубых одноосных стендах: оценка коэффициентов зависимости от производной температуры // Материалы XXIII Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. – СПб. : ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2016. – С. 56 – 61.
  20. Возний В. В., Апостолов В. О. Вплив температури на динаміку коріолосового вібраційного гіроскопа // Матеріали VIII міжнародна науково-технічна конференція : Гіротехнології, навігація, керування рухом та конструювання авіаційно-космічної техніки. – Київ : НТТУ «КП», 2011. – Ч. 1. – С. 48 – 50.
  21. Джашишов В. Э., Панкратов В. М. Датчики, приборы и системы авиакосмического и морского приборостроения в условиях тепловых воздействий. – СПб. : ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2005. – 404 с.
  22. Ding J., Zhang J., Huang W., Chen S. Laser Gyro Temperature Compensation Using Modified RBFNN // Sensors. – 2014. – № 14 (10). – С. 18711 – 18727. doi: 10.3390/s141018711.
  23. Хацько Н. Е., Успенский В. Б., Кузнецов Ю. А. Исследование температурной зависимости дрейфа ВОГ // Радиоэлектроника, информатика, управління. – Запоріжжя : ЗНТУ, 2012. – № 2 (27). – С. 152 – 156.
  24. Буравлев А. С., Егоров Д. А., Лисицин Л. Г. Волоконно-оптические гироскопы в условиях постоянного магнитного поля // Гироскопия и навигация. – 2008. – № 3 (62). – С. 59 – 63.
  25. Антонов М. В., Матвеева В. А. Модель погрешности волоконно-оптического гироскопа при воздействии тепловых и магнитных полей // Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Серия : Приборостроение. – 2014. – № 3 (96). – С. 73 – 80.
  26. Liu N., Su Z., Li Q., Fu M., Liu H., Fan J. Characterization of the Bell-Shaped Vibratory Angular Rate Gyro // Sensors. – 2013. – № 13 (8). – С. 10123 – 10150. doi: 10.3390/s130810123.
  27. Румянцев Г. Н., Лобусов Е. С. Особенности функционирования бесплатформенных инерциальных навигационных систем в условиях виброобстановки // Труды ФГУП НППЦАП. Системы и приборы управления. – 2015. – № 4. – С. 5 – 15.
  28. International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms (VIM). 3rd edition. JCGM, 2012. – 127 p.
  29. Бранец В. Н., Калихман Л. Я., Полушкин А. В. Измеритель вектора кажущегося линейного ускорения – прибор БИЛУ КХ69-042 для СУ спускаемого аппарата «Союз-ТМА» // Материалы XIII Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. – СПб. : ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2006. – С. 253 – 263.
  30. Бранец В. Н., Дибров Д. Н., Рыжков В. С. Методика аттестации блока измерения линейного ускорения с неортогональной ориентацией осей чувствительности шести кварцевых маятниковых акселерометров и методика аттестации рабочих мест для контроля блока акселерометров // Материалы XIII Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. – СПб. : ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2006. – С. 226 – 232.
  31. Болотин Ю. В., Деревянкин А. В., Матасов А. И. Итерационная схема калибровки акселерометров при помощи гарантирующего подхода // Механика твердого тела. – М. : Известия РАН, 2008. – № 4. – С. 48 – 61.
  32. Измайлов Е. А., Лене С. Н., Молчанов А. В., Поликовский Е. Ф. Скалярный способ калибровки и балансировки бесплатформенных инерциальных навигационных систем // Материалы XV Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. – СПб. : ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2008. – С. 145 – 154.
  33. Корюкин М. С. Пат. 2477864 Российская Федерация. Способ калибровки инерциального измерительного модуля по каналу акселерометров. – 2011.
  34. Лакоза С. Л., Мелешко В. В. Скалярная калибровка акселерометров низкой и средней точности // Радиооптика. – 2015. – № 1. – С. 9 – 28. doi: 10.7463/rdopt.0115.0779996.

35. Калихман Д. М., Калихман Л. Я., Садомцев Ю. В. Универсальный стенд с цифровой системой управления для контроля измерителей угловой скорости различного принципа действия // Материалы XVII Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. Сборник материалов. – СПб. : ГИЦ РФ ЦНИИ «Электронприбор», 2010. – С. 147 – 154.
36. Jorgensen M. J., Pascagnan D., Poulsen N. K., Larsen M. B. IMU calibration and validation in a factory, remove on land at sea // IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium. – 2014. – С. 1384 – 1391. doi: 10.1109/PLANS.2014.6851514.
37. Егоров Ю. Г. Патент 2121134 Российская Федерация. Способ калибровки гироскопов. – 1998.
38. Головатий А. О. Моделювання впливу коливань кутової швидкості і температури на динамічні характеристики мікромеханічного гіроскопа камерного типу // Вісник НУ "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – Львів: НУ "Львівська політехніка", 2008. – № 629. – С. 58 – 65.

## References (transliterated)

1. Khats'ko N. E., Uspenskiy V. B. Razrabotka i eksperimental'naya proverka metodiki pasportizatsii mikroakselometra [Development and experimental verification of methodology of certification of micro accelerometer]. *Visnyk NTU «KhPI»* [Bulletin of NTU «KhPI»]. 2009, no. 10, pp. 188–194.
2. Nekrasov Ya. A., Moiseev N. V., Belyaev Ya. V. Vliyanie postupatel'nykh vibratsiy, udarov i akusticheskikh pomekh na kharakteristiki mikromekhanicheskogo giroskopa [The effect of translational vibrations, shocks and acoustic noise on the characteristics of a micromechanical gyroscope]. *Giroskopiya i navigatsiya* [Gyroscopy and navigation]. 2016, no. 2 (93), pp. 56–67.
3. Evstifeev M. I., Eliseev D. P. Optimizatsiya konstruktсии podvizhnogo elektroda mikromekhanicheskogo giroskopa RR – tipa [Optimization of the construction of a movable electrode of a RR type micromechanical gyroscope]. *Giroskopiya i navigatsiya* [Gyroscopy and navigation]. 2017, no. 2 (97), pp. 66–76.
4. Denisov R. A., Maslov A. A., Maslov D. A. Vliyanie opornogo napryazheniya elektromagnitnykh datchikov upravleniya na dreyf volnovogo tverdotel'nogo giroskopa [The influence of the reference voltage of electromagnetic control sensors on the drift of the wave solid-state gyroscope]. *Giroskopiya i navigatsiya* [Gyroscopy and navigation]. 2016, no. (92), pp. 60–71.
5. Barulina M. A., Dzhashitov V. E., Pankratov V. M. Matematicheskaya model' mikromekhanicheskogo akselerometra s uchedom temperaturnykh vozdeystviy, termouprugogo napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya i dinamicheskikh effektov [Mathematical model of micromechanical accelerometer with allowance for temperature effects, thermoelastic stress-strain state and dynamic effects]. *Giroskopiya i navigatsiya* [Gyroscopy and navigation]. 2008, no. 1, pp. 55–71.
6. Lysova O. M., Nesterenko T. G., Plotnikova I. V. Analiz tekhnologicheskikh pogreshnostey mikromekhanicheskogo giroskopa [Analysis of technological errors of a micromechanical gyroscope]. *XV Sankt-Peterburgskaya mezhdunarodnaya konferentsiya po integrirovannym navigatsionnym sistemam* [15th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems]. Sankt-Peterburg, GNTS RF TSNII «Elektropribor» Publ., 2008, pp. 24 – 26.
7. Belyaeva T. A., Nekrasov Ya. A., Belyaev Ya. V., Bagaeva S. V. Podavlenie kvadraturnoy pomekhi v mikromekhanicheskom giroskope RR – tipa s pomoschyu elektrodov, raspolozhennykh nad zubtsovoy zonoj [Suppression of quadrature interference in an RR type micromechanical gyroscope by means of electrodes located above the tooth zone]. *Giroskopiya i navigatsiya* [Gyroscopy and navigation]. 2008, no. 1 (60), pp. 82–94.
8. Fedorov A. E., Rekunov D. A. Kompensatsiya instrumental'nykh pogreshnostey trekhkomponentnogo lazernogo giroskopa monoblochnoy strukturyi [Compensation of instrumental errors of a three-component laser gyroscope of a monoblock structure]. *Materialy XVI Sankt-Peterburgskoy mezhdunarodnoy konferentsii po integrirovannym navigatsionnym sistemam* [16th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems]. Sankt-Peterburg, GNTS RF TSNII «Elektropribor» Publ., 2009, pp. 42–47.
9. Kovtun D. A., Mikaelyan S. V. Uluchshenie tochnosti besplatformennykh inertsiyal'nykh navigatsionnykh sistem s prostranstvenno raspredelennym naborom datchikov [Improving the accuracy of the freeform inertial navigation systems by a spatially distributed set of sensors]. *Sinergiya Nauk* [Synergy of Sciences]. 2017, no. 12, pp. 754–767.
10. Raspopov V. Ya., Matveev V. V., Alaluev R. V. Bortovye informatsionno-upravlyayushchie sistemy na mikromekhanicheskikh chuvstvitel'nykh elementakh dlya bespilotnykh letatel'nykh apparatov razlichnogo naznacheniya. [Onboard information-control systems on micromechanical sensors for unmanned aerial vehicles for various purposes]. *Sbornik materialov yubileynoy XV Sankt-Peterburgskoy mezhdunarodnoy konferentsii po integrirovannym navigatsionnym sistemam* [15th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems]. Sankt-Peterburg, GNTS RF TSNII «Elektropribor» Publ., 2008, pp. 45–53.
11. Binder Ya. I., Paderina T. V. Kalibrovka datchikov uglovoj skorosti s mekhanicheskim nositelem vektora kineticheskogo momenta v sostave besplatformennykh inertsiyal'nykh izmeritel'nykh modulej [Calibration of angular velocity sensors with a mechanical carrier of the angular momentum vector which are parts of inertial measuring modules]. *Giroskopiya i navigatsiya* [Gyroscopy and navigation]. 2003, no. 3, pp. 3–16.
12. Emel'yantsev G. I., Landau B. E., Levin S. L., Romanenko S. G. Ob utocnenii modeli dreyfov elektrosticheskikh giroskopov beskardannoy inertsiyal'noy sistemy orientatsii i o metodike ikh kalibrovki na stende i v usloviyakh orbital'nogo kosmicheskogo apparata [On the refinement of the model of the drifts of electrostatic gyroscopes of a non-carded inertial orientation system and on the method of their calibration on the bench and in the conditions of the orbital spacecraft]. *Giroskopiya i navigatsiya* [Gyroscopy and navigation]. 2008, no. 1 (60), pp. 42–54.
13. Martynenko Yu. G., Merkur'ev I. V., Podalkov V. V. Kalibrovka parametrov maloy vyazkouprugoy anizotropii rezonatora volnovogo tverdotel'nogo giroskopa po rezul'tatam stendovykh ispytaniy [Calibration of parameters of a small viscoelastic anisotropy of a resonator of a wave solid-state gyroscope according to the results of bench tests]. *Materialy XVII Sankt-Peterburgskoy mezhdunarodnoy konferentsii po integrirovannym navigatsionnym sistemam* [17th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems]. Sankt-Peterburg, GNTS RF TSNII «Elektropribor» Publ., 2010, pp. 32–39.
14. IEEE Std. 836-2009, IEEE Recommended Practice for Precision Centrifuge Testing of Linear Accelerometers. 2009, 152 p.
15. Gaitan M., Lightman K., Takacs M. *MEMS Testing Standards: A Path to Continued Innovation*. Pittsburgh, MEMS Industry Group Publ., 2011. 154 p.
16. IEEE Std 1554-2005. IEEE Recommended Practice for Inertial Sensor Test Equipment, Instrumentation, Data Acquisition, and Analysis, 2013. 145 p.
17. Chelpanov I. B., Kozlov D. P., Kochetkov A. V. Postroenie kompleksnoy sistemy organizatsii kalibrovki mikromekhanicheskikh datchikov [Construction of an integrated system for organizing the calibration of micromechanical sensors]. *Internet-zhurnal «NAUKOVEDENIE»* [Internet-Journal "NAUKOVEDENIE"]. 2016, vol. 8, no. 1. Available at : <http://naukovedenie.ru/PDF/21TVN116.pdf>. doi: 10.15862/21TVN116. (accessed 15.09.2017)
18. Jiang R, Yang G, Zou R, Wang J, Li J. Accurate Compensation of Attitude Angle Error in a Dual-Axis Rotation Inertial Navigation System. *Sensors*. 2017, no. 17 (3), pp. 615–632. doi: 10.3390/s17030615.
19. Kozlov A. V., Tarygin I. E., Golovan A. A. Kalibrovka inertsiyal'nykh izmeritel'nykh blokov na grubykh odnoosnykh standakh: otsenka koeffitsientov zavisimosti ot proizvodnoy temperatury [Calibration of inertial measuring units on coarse uniaxial stands: estimation of coefficients of dependence on the derivative temperature]. *Materialy XXIII Sankt-Peterburgskoy mezhdunarodnoy konferentsii po integrirovannym navigatsionnym sistemam* [23th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems]. Sankt-Peterburg, GNTS RF TSNII «Elektropribor» Publ., 2016, pp. 56–61.
20. Voznyy V. V., Apostolyuk V. O. Vplyv temperatury na dynamiku koriolisovogo vibratsiynogo giroskopa [Influence of the temperature on the

- dynamics of coriolis vibration gyroscope]. *Materialy VIII mizhnarodnoyi naukovo-tekhnichnoyi konferentsiyi : girotehnologii, navigatsiya, keruvannya rukhom ta konstruyuvannya aviatsiyno-kosmichnoyi tekhniki* [Materials of the VIII international n.t. conference: Gyrotechnology, navigation, traffic management and design of aviation and space technology]. Kyiv, NTU «KPI» Publ., 2011, vol. 1, pp. 48 – 50.
21. Dzhashitov V. E., Pankratov V. M. *Datchiki, pribory i sistemy aviakosmicheskogo i morskogo priborostroeniya v usloviyakh teplovykh vozdeystviy* [Sensors, instruments and systems for aerospace and marine instrumentation in conditions of thermal]. Sankt-Peterburg, GNTS RF TSNII «Elektropribor» Publ., 2005. 404 p.
  22. Ding J., Zhang J., Huang W., Chen S. Laser Gyro Temperature Compensation Using Modified RBFNN. *Sensors*. 2014, no. 14 (10), pp. 18711–18727. doi: 10.3390/s141018711.
  23. Khats'ko N. E., Uspenskiy V. B., Kuznetsov Yu. A. Issledovanie temperaturnoy zavisimosti dreyfa VOG [Investigation of the temperature dependence of the drift of FOG]. *Radioelektronika, informatyka, upravlinnya* [Radioelectronics, informatics, control]. Zaporizhzhia, ZNTU Publ., 2012, no. 2 (27), pp. 152–156.
  24. Buravlev A. S., Egorov D. A., Lisitsin L. G. Volokonno-opticheskie giroskopy v usloviyakh postoyannogo magnitnogo polya [Fiber Optic Gyroscopes in a Constant Magnetic Field]. *Giroskopiya i navigatsiya* [Gyroscopy and navigation]. 2008, no. 3 (62), pp. 59–63.
  25. Antonov M. V., Matveeva V. A. Model' pogreshnosti volokonno-opticheskogo giroskopa pri vozdeystvii teplovykh i magnitnykh poley [Model of the error of a fiber-optic gyroscope under the influence of thermal and magnetic fields]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N. E. Baumana. Seriya : Priborostroenie* [Bulletin of the N. Bauman Moscow State Technical University. Series: Instrumentation]. 2014, no. 3 (96), pp. 73–80.
  26. Liu N., Su Z., Li Q., Fu M., Liu H., Fan J. Characterization of the Bell-Shaped Vibratory Angular Rate Gyro. *Sensors*. 2013, no. 13 (8), pp. 10123–10150. doi: 10.3390/s130810123.
  27. Rumyantsev G. N., Lobusov E. S. Osobennosti funktsionirovaniya besplatformennykh inertial'nykh navigatsionnykh sistem v usloviyakh vibroobstanovki [Features of the functioning of free-of-charge inertial navigation systems in vibration conditions]. *Trudy FGUP NPTsAP. Sistemy i pribory upravleniya* [Works of Academic Pilygin Center. Systems and control devices]. 2015, no. 4, pp. 5–15.
  28. *International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms (VIM)*. 3rd edition. JCGM, 2012. 127 p.
  29. Branets V. N., Kalikhman L. Ya., Polushkin A. V. Izmeritel' vektora kazhushchegosya lineynogo uskoreniya – pribor BILU KH69-042 dlya SU spuskaemogo apparata «Soyuz-TMA» [The meter of the apparent linear acceleration vector – the BILU KX69-042 device for the Soyuz-TMA space capsule]. *Materialy XIII Sankt-Peterburgskoy mezhdunarodnoy konferentsii po integrirovannym navigatsionnym sistemam* [Proceedings of the XIII St. Petersburg International Conference on the Integrated Navigation Systems]. Sankt-Peterburg, GNTS RF TSNII «Elektropribor» Publ., 2006, pp. 253–263.
  30. Branets V. N., Dibrov D. N., Ryzhkov V. S. Metodika attestatsii bloka izmereniya lineynogo uskoreniya s neortogonal'noy orientatsiyei osey chuvstvitel'nosti shesti kvartsevykh mayatnikovyykh akselerometrov i metodika attestatsii rabochikh mest dlya kontrolya bloka akselerometrov [The method of attestation of the linear acceleration measuring unit with non-orthogonal orientation of the sensitivity axes of six quartz pendulum accelerometers and the technique of attestation of the workplaces for the accelerometer unit control]. *Materialy XIII Sankt-Peterburgskoy mezhdunarodnoy konferentsii po integrirovannym navigatsionnym sistemam* [Proceedings of the XIII St. Petersburg International Conference on the Integrated Navigation Systems]. Sankt-Peterburg, GNTS RF TSNII «Elektropribor» Publ., 2006, pp. 226–232.
  31. Bolotin Yu. V., Derevyankin A. V., Matasov A. I. Iteratsionnaya skhema kalibrovki akselerometrov pri pomoschi garantiruyushchego podkhoda [Iterative Scheme for Accelerometer Calibration by a Guarantee Approach]. *Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of solid]. Moscow, Izvestiya RAN Publ., 2008, no. 4, pp. 48–61.
  32. Izmaylov E. A., Lepe S. N., Molchanov A. V., Polikovskiy E. F. Skalyarnyy sposob kalibrovki i balansirovki besplatformennykh inertial'nykh navigatsionnykh sistem [Scalar method of calibration and balancing of free-of-charge inertial navigation systems]. *Materialy XV Sankt-Peterburgskoy mezhdunarodnoy konferentsii po integrirovannym navigatsionnym sistemam* [Proceedings of the XV St. Petersburg International Conference on the Integrated Navigation Systems]. Sankt-Peterburg, GNTS RF TSNII «Elektropribor» Publ., 2008, pp. 145–154.
  33. Koryukin M. S. *Sposob kalibrovki inertial'nogo izmeritel'nogo modulya po kanalu akselerometrov* [Method of calibration of the inertial measuring module along the accelerometer channel]. Patent RF, no. 2477864, 2011.
  34. Lakoza S. L., Meleshko V. V. Skalyarnaya kalibrovka akselerometrov nizkoy i sredney tochnosti [Scalar calibration of low and medium accuracy accelerometers]. *Radiooptika* [Radiooptics]. 2015, no. 1, pp. 9–28. doi: 10.7463/rdopt.0115.0779996.
  35. Kalikhman D. M., Kalikhman L. Ya., Sadomtsev Yu. V. Universal'nyy stend s tsifrovoy sistemoy upravleniya dlya kontrolya izmeriteley uglovy skorosti razlichnogo printsipa deystviya [Universal stand with digital control system for monitoring angular velocity meters with different principle of operation]. *Materialy XVII Sankt-Peterburgskoy mezhdunarodnoy konferentsii po integrirovannym navigatsionnym sistemam. Sbornik materialov* [Proceedings of the XVII St. Petersburg International Conference on the Integrated Navigation Systems]. Sankt-Peterburg, GNTS RF TSNII «Elektropribor» Publ., 2010, pp. 147–154.
  36. Jorgensen M. J., Paccagnan D., Poulsen N. K., Larsen M. B. IMU calibration and validation in a factory, remove on land at sea. *IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium*. 2014, pp. 1384–1391. doi: 10.1109/PLANS.2014.6851514.
  37. Egorov Yu. G. *Sposob kalibrovki giroskopov* [Method of calibration of gyroscopes]. Patent RF, no. 2121134, 1998.
  38. Golovatyy A. O. Modelyuvannya vplyvu kolyvan' kutovoyi shvydkosti i temperatury na dynamichni kharakterystyky mikromekhanichnogo giroskopa kamertonnoho typu [Modelling the influence of the angular velocity fluctuations and the temperature on the dynamical characteristics of a chamber type micro mechanical gyroscope]. *Visnyk NU "Lviv's'ka politekhnika": Komp'yuterni nauky ta informatsiyni tekhnologii* [Bulletin of the National University "Lviv Polytechnic": Computer sciences and Information Technologies]. Lviv, NU "Lviv's'ka politekhnika" Publ., 2008, no. 629, pp. 58–65.

Надійшла (received) 26.10.2017

#### Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

**Сучасні математичні моделі компенсації похибок інерціальних датчиків для застосування в експериментах по калібруванню / Н. Є. Хацько // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 124 – 131. Бібліогр.: 38 назв. – ISSN 2222-0631.**

**Современные математические модели компенсации ошибок инерциальных датчиков, применяющиеся при их калибровке / Н. Е. Хацько // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 124 – 131. Бібліогр.: 38 назв. – ISSN 2222-0631.**

**Modern mathematical models of error compensation for inertial sensor used in their calibration / N. E. Khatsko // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 30 (1252). – pp. 124 – 131. Bibliogr.: 38 titles. – ISSN 2222-0631.**

**Хацько Наталія Євгенівна** – кандидат технічних наук, старший викладач, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (066) 198-80-58; e-mail: n.khatzko@gmail.com.

**Хацько Наталья Евгеньевна** – кандидат технических наук, старший преподаватель, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (066) 198-80-58; e-mail: n.khatzko@gmail.com.

**Khatsko Natalia Evgenievna** – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (066) 198-80-58; e-mail: n.khatzko@gmail.com.

УДК 539.3

**Е. Г. ЯНЮТИН, Н. И. ВОРОПАЙ, П. А. ЕГОРОВ**

### ПРИМЕНЕНИЕ РАЗЛОЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ В РЯДЫ ШЛЕМИЛЬХА ДЛЯ АНАЛИЗА НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕМБРАНЫ

На основе теории рядов Шльомильха та операційного числення запропоновано підхід до аналізу нестационарних коливань мембрани, викликаних кінематичними збуреннями. Він дозволяє знайти коефіцієнти в відповідних розвиненнях шуканих функцій, що описують коливання мембран у випадку вісесиметричних кінематичних навантажень. Зазначений підхід використовує інтегральне перетворення Лапласа у часі в процесі пошуку згаданих коефіцієнтів. Наведені приклади визначення поведінки мембрани в результаті різних початкових умов, які приєднані до рівняння нормальних (по відношенню до площини мембрани) переміщень точок на мембрані.

**Ключові слова:** мембрана, коливання, ряди Шльомильха, операційне числення.

На основе теории рядов Шлемильха и операционного исчисления предложен подход к анализу нестационарных колебаний мембраны, вызванных кинематическими возмущениями. Он позволяет определить коэффициенты в соответствующих разложениях искомым функций, которые описывают колебания мембраны в случае осесимметричных кинематических нагружений. Указанный подход использует интегральное преобразование Лапласа во времени в процессе поиска упомянутых коэффициентов. Приведены примеры определения поведения мембраны в результате различных начальных условий, которые присоединены к уравнению нормальных (по отношению к плоскости мембраны) перемещений точек на мембране.

**Ключевые слова:** мембрана, колебания, ряды Шлемильха, операционное исчисление.

Based on the Schlömilch series theory and operational calculus an approach to the analysis of non-stationary vibrations of a membrane caused by kinematic perturbations is proposed. It allows to determine the coefficients in the corresponding expansions of the unknown functions, which describe the vibrations of the membrane in the case of axisymmetric kinematic loadings. This approach uses the integral Laplace transformations in time in the process of searching for the mentioned coefficients. Examples of determining the behavior of the membrane as a result of various initial conditions that are attached to the equation of normal (with respect to the plane of the membrane) displacements of points on the membrane are given.

**Key words:** membrane, vibrations, Schlömilch series, operational calculus.

**Введение и краткое описание рядов Шлемильха.** Задачи об осесимметричных колебаниях круглых в плане мембран, пластин и пологих сферических оболочек исследованы очень хорошо. Имеется набор способов решения прямых задач для таких объектов и так называемых обратных задач. Описание этих задач отражено, например, в монографиях [1, 2] и многочисленных статьях. Для решения задач такого рода, как правило, применяется теория рядов Фурье – Бесселя и Дини. В случае рассмотрения пластин и пологих сферических оболочек можно вводить дополнительные (неизвестные) нагрузки, обеспечивающие удовлетворение полного набора граничных условий на их торцах. При решении задачи о колебаниях неограниченной мембраны используется в [3] метод интегральных преобразований (Лапласа и Ханкеля).

К теории рядов Фурье – Бесселя примыкает теория рядов Шлемильха вида  $\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0(mx)$ , у которых  $x$  – вещественная переменная, аргумент у бесселевых функций пропорционален номеру членов, величины  $a_m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) – числовые коэффициенты. Свойства рядов Шлемильха описаны, например, в [4].

Автор работы [4] Г. Н. Ватсон пишет: "Ряды этого типа были впервые исследованы Шлемильхом. Для физики они не имеют такого значения, как ряды Фурье – Бесселя, хотя как показал Релей (ссылка на соответствующую работу 1911 года), они естественно возникают при исследовании периодического поперечного колебания двумерной мембраны, если это колебание складывается из бесконечного множества одинаковых одномерных поперечных колебаний, равномерно распределенных по обоим направлениям мембраны".

Укажем, что в настоящем исследовании предпринята попытка анализа нестационарных колебаний в полярной системе координат для области мембраны в случае ее осесимметричных колебаний, причем исследование основывается на использовании разложений искомым функций в ряды Шлемильха.

В работе [4] изложена основная теорема рядов Шлемильха, суть которой содержится в следующем. Функция  $\varphi(x)$ , которая задана при  $0 \leq x \leq \pi$ , допускает разложение в ряд