

**Бати́гін Ю́рій Ві́кторович** – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедрою фізики, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (057) 707-36-53; e-mail: yu.v.batygin@gmail.com.

**Батыгин Юрий Викторович** – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой физики, Харьковский национальный автомобильно-дорожный Университет, г. Харьков; тел.: (057) 707-36-53; e-mail: yu.v.batygin@gmail.com.

**Batygin Yuriy Victorovich** – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Physics Chair, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkov; tel.: (057) 707-36-53; e-mail: yu.v.batygin@gmail.com.

**Чапли́гін Євге́н Олекса́ндрович** – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри фізики, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (057) 707-37-27; e-mail: chaplygin.e.a@gmail.com.

**Чаплыгин Евгений Александрович** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры физики, Харьковский национальный автомобильно-дорожный Университет, г. Харьков; тел.: (057) 707-37-27; e-mail: chaplygin.e.a@gmail.com.

**Chaplygin Evgen Olexandrovich** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Physics Chair, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkov, tel.: (057) 707-37-27; e-mail: chaplygin.e.a@gmail.com.

**Шинде́рук Сві́тлана Олекса́ндрівна** – кандидат технічних наук, доцент кафедри фізики, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (057) 707-37-27; e-mail: s.shinderuk.2016102@ukr.net.

**Шиндерук Светлана Александровна** – кандидат технических наук, доцент кафедры физики, Харьковский национальный автомобильно-дорожный Университет, г. Харьков; тел.: (057) 707-37-27; e-mail: s.shinderuk.2016102@ukr.net.

**Shynderuk Svitlana Olexandrivna** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Physics Chair, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkov; tel.: (057) 707-37-27; e-mail: s.shinderuk.2016102@ukr.net.

**Сабока́р Оле́г Серге́йович** – аспірант, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (057) 707-37-27; e-mail: o.s.sabokar@gmail.com.

**Сабокарь Олег Сергеевич** – аспирант, Харьковский национальный автомобильно-дорожный Университет, г. Харьков; тел.: (057) 707-37-27; e-mail: o.s.sabokar@gmail.com.

**Sabokar Oleg Serhiyovych** – Postgraduate Student, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkov; tel.: (057) 707-37-27; e-mail: o.s.sabokar@gmail.com.

УДК 539.3

**А. В. ВОРОПАЙ**

### **ВОЗДЕЙСТВИЕ НА ПРЯМОУГОЛЬНУЮ ПЛАСТИНУ КОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ ПРОИЗВОЛЬНЫХ НАГРУЖЕНИЙ**

Розглядаються імпульсні дії довільних складних навантажень на прямокутні пружні ізотропні пластини середньої товщини. Деформування пластини моделюється в рамках уточненої теорії С. П. Тимошенка. Під складними навантаженнями розуміються такі, які можуть мати не тільки поперечну, а й поздовжню складову, а також зосереджені моментні навантаження. Представлена теорія вирішення прямих і обернених задач теорії пружності при дії на пластину скінченної системи незалежних нестационарних навантажень. В рамках прямої задачі в загальному вигляді отримані підсумкові співвідношення, які дозволяють обчислювати переміщення та деформації в довільній точці пластини. Наведено загальний вигляд постановки обернених задач і викладено алгоритм їх вирішення.

**Ключові слова:** пластинка середньої товщини, ідентифікація, нестационарне навантаження, система інтегральних рівнянь Вольтерра, регуляризуючий алгоритм А. М. Тихонова.

Рассматриваются импульсные воздействия произвольных сложных нагрузок на прямоугольные упругие изотропные пластины средней толщины. Деформирование пластины моделируется в рамках уточненной теории С. П. Тимошенко. Под сложными нагрузками понимаются такие, которые могут иметь не только поперечную, но и продольную составляющую, а также сосредоточенные моментные нагрузки. Представлена теория решения прямой и обратной задачи теории упругости при действии на пластину конечной системы независимых нестационарных нагрузок. В рамках прямой задачи в общем виде получены итоговые соотношения, которые позволяют вычислять перемещения и деформации в произвольной точке пластины. Приведен общий вид постановки обратной задачи и изложен алгоритм их решения.

**Ключевые слова:** пластинка средней толщины, идентификация, нестационарное нагружение, система интегральных уравнений Вольтерра, регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова.

Impulse actions of arbitrary complex loads on rectangular elastic isotropic plates of medium thickness are considered. The plate deforming is simulated by the Timoshenko's refined theory. Complex loads are the loads, that can have both transverse and longitudinal components, as well as concentrated moment loads. A theory for solving the direct and inverse problems of the theory of elasticity under a finite system of independent nonstationary loads acting on the plate is presented. Within the framework of the direct problem the resulting relationships are obtained in general form. These resulting relationships allow to calculate the displacements and deformations at an arbitrary point of the plate. A general formulation of the inverse problems is given and an algorithm for their solution is presented.

**Key words:** medium-thickness plate, identification, nonstationary loading, system of Volterra integral equation, Tikhonov's regularization algorithm.

**Введение и анализ последних исследований.** Одними из самых широко распространенных элементов конструкций являются пластины, большинство из которых – прямоугольные. Элементы конструкции в виде металлических пластин средней толщины, несмотря на конструктивную простоту, хорошо работают в условиях динамических, а особенно ударных нагрузений. Однако при проектировании конструкторы зачастую сталкиваются с проблемой недостаточной информации о действии нестационарных нагрузок на механические системы. В ряде случаев при анализе напряженно-деформированного состояния ударные и другие подобные нагружения моделируются приблизительно или вообще заменяются коэффициентами динамичности нагрузки или компенсируются коэффициентами запаса. Только для ответственных элементов или конструкций в целом производится ряд дорогостоящих экспериментальных исследований. Решение обратных задач идентификации неизвестных нестационарных нагружений при обработке экспериментальных данных может существенно снизить стоимость и время исследований, а иногда частично или полностью заменить реальные исследования специальными вычислительными экспериментами.

В работах [1, 2] описана методика идентификации законов изменения во времени системы из нескольких независимых нестационарных поперечных нагрузок, воздействующих на прямоугольную пластину средней толщины *типа С. П. Тимошенко*. Приводятся примеры численных расчетов по идентификации систем из двух и трех нагрузок. Задача об идентификации нестационарного нагружения, касательного к лицевой поверхности прямоугольной пластины, описана в [3, 4]. В работах [2, 5] рассматриваются импульсные воздействия произвольных сложных нагрузок (имеющих не только поперечную, а и продольную составляющую) на прямоугольные упругие изотропные пластины средней толщины.

Учитывая сказанное выше, актуальной задачей является обобщение методики, описанной в монографии [2], на случай воздействия на прямоугольную пластину конечной системы произвольных сложных нагружений, которые могут быть ориентированы относительно пластины продольно, поперечно или под произвольным углом.

**Постановка задачи.** Расположим пластину в декартовых координатах так, что ее срединная плоскость будет находиться в плоскости  $xOy$ , пластину ограничена прямыми  $x=0$ ,  $x=l$ ,  $y=0$ ,  $y=m$ , а направление оси  $Oz$  будет совпадать с нормалью к плоскости  $xOy$  рис. 1.

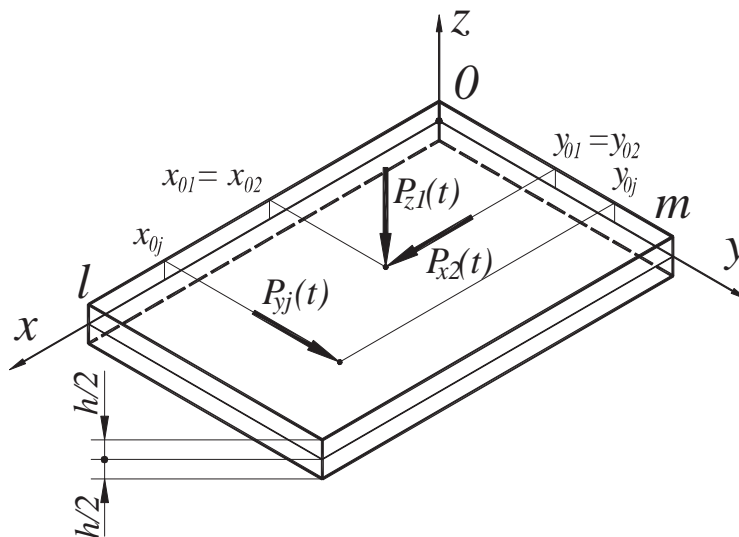


Рис. 1 – Пластина, нагруженная системой продольных и поперечных сил.

Укажем, что  $l$  и  $m$  – размеры пластины в плане. Координаты точки приложения  $j$ -й сосредоточенной силы или центра малой области равномерно распределенной нагрузки –  $x_{0j}$ ,  $y_{0j}$ . Число воздействующих нагрузок равняется  $N$ .

Для решения данной задачи воспользуемся моделью пластин теории С. П. Тимошенко, которая учитывает эффекты инерции вращения нормального элемента и поперечного сдвига.

Составляющие перемещения элемента пластины обозначим  $u$ ,  $v$  и  $w$ . Далее сделаем следующие допуще-

ния: будем полагать, что компоненты перемещения  $u$  и  $v$  – линейно зависимы от  $z$ , а  $w$  от  $z$  не зависит [6, 7]. Тогда, исходя из вышеуказанного, можно записать такие соотношения:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z \cdot \psi_x(x, y, t); \quad v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z \cdot \psi_y(x, y, t); \quad w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t). \quad (1)$$

В этих соотношениях  $x, y, z$  – декартовы координаты,  $u_0, v_0$  и  $w_0$  – перемещения точек срединной плоскости пластины, а  $\psi_x$  и  $\psi_y$  – углы поворота нормали к срединной плоскости пластины в плоскостях  $xOz$  и  $yOz$ , соответственно;  $z \in [-h/2; h/2]$ , где  $h$  – толщина пластины.

Задача о нестационарном деформировании упругой изотропной пластины с учетом соответствующих начальных и граничных условий, а также нагружения системой из  $N$  сил и моментов сводится к решению следующей системы пяти дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_p h \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + Gh \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + h(E_p \nu + G) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \cdot \partial y} = \rho h \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^N P_{xj}(x, y, t); \\ Gh \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + E_p h \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + h(E_p \nu + G) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \cdot \partial y} = \rho h \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^N P_{yj}(x, y, t); \\ G' h (\nabla^2 w_0 + \psi_{xy}) = \rho h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^N P_{zj}(x, y, t); \\ \frac{D}{2} \left[ (1-\nu) \nabla^2 \psi_x + (1+\nu) \frac{\partial \psi_{xy}}{\partial x} \right] - G' h \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x \right) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^N M_{xj}(x, y, t); \\ \frac{D}{2} \left[ (1-\nu) \nabla^2 \psi_y + (1+\nu) \frac{\partial \psi_{xy}}{\partial y} \right] - G' h \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y \right) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^N M_{yj}(x, y, t); \end{array} \right. \quad (2)$$

где  $E$  – модуль упругости;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\rho$  – плотность материала пластины;  $G$  – модуль сдвига,

$$G = E/2(1+\nu); \quad I = h^3/12; \quad E_p = \frac{E}{(1-\nu^2)}; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad \psi_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}; \quad D = (Eh^3)/12(1-\nu^2) = E_p \cdot I$$

– цилиндрическая жесткость пластины;  $G'$  – приведенный модуль сдвига  $G' = k'G$ . Отметим, что  $k'$  – коэффициент сдвига, подробные сведения о котором приведены в [8].

Полную систему уравнений (2), описывающих деформирование пластин в рамках гипотез Тимошенко можно разделить на две независимых подсистемы. Первая подсистема, состоящая из первых двух уравнений (2), относительно неизвестных  $u_0(x, y, t)$  и  $v_0(x, y, t)$  соответствует продольным нагружениям, а вторая подсистема из (2), состоящая из трёх уравнений, относительно функций прогибов  $w_0(x, y, t)$  и углов поворота нормали  $\psi_x(x, y, t)$  и  $\psi_y(x, y, t)$  – поперечным нагружениям.

Приведенная система уравнений взята из монографии [2] с учетом введенных здесь воздействующих нагрузок:

$$\text{нормальных } \sum_{j=1}^N P_{zj}(x, y, t), \text{ касательных } \sum_{j=1}^N P_{xj}(x, y, t), \sum_{j=1}^N P_{yj}(x, y, t) \text{ и моментных } \sum_{j=1}^N M_{xj}(x, y, t), \sum_{j=1}^N M_{yj}(x, y, t).$$

**Построение решения прямой задачи в общем виде.** При решении задачи примем нулевые начальные условия, а именно:

$$\begin{aligned} u_0(x, y, 0) = v_0(x, y, 0) = w_0(x, y, 0) = \psi_x(x, y, 0) = \psi_y(x, y, 0) = 0; \\ \frac{\partial u_0(x, y, 0)}{\partial t} = \frac{\partial v_0(x, y, 0)}{\partial t} = \frac{\partial w_0(x, y, 0)}{\partial t} = \frac{\partial \psi_x(x, y, 0)}{\partial t} = \frac{\partial \psi_y(x, y, 0)}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Для шарнирно-опертой пластины, чтобы удовлетворить необходимым граничным условиям [9]: вдоль краев  $y = 0$  и  $y = m$ :

$$w_0 = 0; \quad \psi_x = 0; \quad M_y = 0; \quad S_{xy} = 0; \quad v_0 = 0; \quad (4)$$

вдоль краев  $x = 0$  и  $x = l$ :

$$w_0 = 0; \quad M_x = 0; \quad \psi_y = 0; \quad u_0 = 0; \quad S_{xy} = 0, \quad (5)$$

запишем искомые функции в виде разложений в следующие двойные ряды Фурье:

$$u_0(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{kn}(t) \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \cos \frac{n\pi \cdot y}{m}; \quad (6)$$

$$v_0(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{kn}(t) \cdot \cos \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y}{m}; \quad (7)$$

$$w_0(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{kn}(t) \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y}{m}; \quad (8)$$

$$\psi_x(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{xkn}(t) \cdot \cos \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y}{m}; \quad (9)$$

$$\psi_y(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{ykn}(t) \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \cos \frac{n\pi \cdot y}{m}. \quad (10)$$

Подставив разложения (6) – (10) в систему дифференциальных уравнений в частных производных (2) и, воспользовавшись свойством ортогональности тригонометрических функций, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной  $t$ . Система дифференциальных уравнений решается следующим образом: при нулевых начальных условиях выполняется прямое интегральное преобразование Лапласа [10, 11]; в пространстве изображений на основе решения системы алгебраических уравнений находятся искомые коэффициенты разложения  $w_{kn}^L(s)$ ,  $u_{kn}^L(s)$ ,  $v_{kn}^L(s)$ ,  $\psi_{xkn}^L(s)$ ,  $\psi_{ykn}^L(s)$ ; производится обратное преобразование Лапласа. В результате получаем:

$$u_{knj}(t) = \frac{C_{knj}^{Px}}{\Delta_{kn}^*} \int_0^t \sum_{i=4}^5 \Omega_{ikn}^U \sin \omega_{ikn}(t-\tau) P_{xj}(\tau) d\tau + (c_p^2 \nu + c^2) \frac{C_{knj}^{Pyj} \cdot \lambda_k^* \cdot \mu_n^*}{\Delta_{kn}^*} \int_0^t \left( \frac{\sin \omega_{4kn}(t-\tau)}{\omega_{4kn}} - \frac{\sin \omega_{5kn}(t-\tau)}{\omega_{5kn}} \right) P_{yj}(\tau) d\tau; \quad (11)$$

$$v_{knj}(t) = \frac{C_{knj}^{Py}}{\Delta_{kn}^*} \int_0^t \sum_{i=4}^5 \Omega_{ikn}^V \sin \omega_{ikn}(t-\tau) P_{yj}(\tau) d\tau + (c_p^2 \nu + c^2) \frac{C_{knj}^{Pxj} \cdot \lambda_k^* \cdot \mu_n^*}{\Delta_{kn}^*} \int_0^t \left( \frac{\sin \omega_{4kn}(t-\tau)}{\omega_{4kn}} - \frac{\sin \omega_{5kn}(t-\tau)}{\omega_{5kn}} \right) P_{xj}(\tau) d\tau; \quad (12)$$

$$\int_0^t \sum_{i=1}^2 \Omega_{ikn}^W \sin \omega_{ikn}(t-\tau) P_{zj}(\tau) d\tau + c_T^2 \frac{C_{knj}^{Mx}}{\Delta_{kn}^*} \int_0^t \left( \frac{\sin \omega_{1kn}(t-\tau)}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin \omega_{2kn}(t-\tau)}{\omega_{2kn}} \right) M_{xj}(\tau) d\tau + c_T^2 \frac{C_{knj}^{My}}{\Delta_{kn}^*} \int_0^t \left( \frac{\sin \omega_{1kn}(t-\tau)}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin \omega_{2kn}(t-\tau)}{\omega_{2kn}} \right) M_{yj}(\tau) d\tau; \quad (13)$$

$$\psi_{xknj}(t) = c_T^2 \frac{12}{h^2} \frac{C_{knj}^{Pz} \lambda_k^*}{\Delta_{kn}^*} \int_0^t \left( \frac{\sin \omega_{1kn}(t-\tau)}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin \omega_{2kn}(t-\tau)}{\omega_{2kn}} \right) P_{zj}(\tau) d\tau +$$

$$+ \frac{C_{knj}^{Mx}}{2\Delta_{kn} \lambda_k^*} \int_0^t \sum_{i=1}^3 (\Omega_{ikn}^{\psi} + \Omega_{ikn}^{\phi X}) \sin \omega_{ikn}(t-\tau) M_{xj}(\tau) d\tau + \frac{C_{knj}^{My}}{2\Delta_{kn} \mu_n^*} \int_0^t \sum_{i=1}^3 (\Omega_{ikn}^{\psi} + \Omega_{ikn}^{\phi Y}) \sin \omega_{ikn}(t-\tau) M_{yj}(\tau) d\tau; \quad (14)$$

$$\psi_{yknj}(t) = c_T^2 \frac{12}{h^2} \frac{C_{knj}^{Pz} \mu_n^*}{\Delta_{kn}^*} \int_0^t \left( \frac{\sin \omega_{1kn}(t-\tau)}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin \omega_{2kn}(t-\tau)}{\omega_{2kn}} \right) P_{zj}(\tau) d\tau +$$

$$+ \frac{C_{knj}^{Mx}}{2\Delta_{kn} \mu_n^*} \int_0^t \sum_{i=1}^3 (\Omega_{ikn}^{\psi} - \Omega_{ikn}^{\phi X}) \sin \omega_{ikn}(t-\tau) M_{xj}(\tau) d\tau + \frac{C_{knj}^{My}}{2\Delta_{kn} \mu_n^*} \int_0^t \sum_{i=1}^3 (\Omega_{ikn}^{\psi} - \Omega_{ikn}^{\phi Y}) \sin \omega_{ikn}(t-\tau) M_{yj}(\tau) d\tau; \quad (15)$$

где  $c_G^2 = \frac{G}{\rho}$ ;  $c_T^2 = \frac{G'}{\rho}$ ;  $c_p^2 = \frac{E_p}{\rho}$ ;  $\lambda_k^* = \pi \frac{k}{l}$ ;  $\mu_n^* = \pi \frac{n}{m}$ ;  $\lambda_{kn}^2 = \pi^2 \left( \frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2} \right)$ ,  $\mu_{kn}^2 = \pi^2 \left( \frac{k^2}{l^2} - \frac{n^2}{m^2} \right)$ ;

$$\Delta_{kn} = \sqrt{(\lambda_{kn}^2 (c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 \cdot 12 / h^2)^2 - 4 \cdot c_T^2 \cdot c_p^2 \cdot \lambda_{kn}^4};$$

$$\Delta_{kn}^* = \sqrt{(c_p^2 + c_G^2)^2 \lambda_{kn}^4 - 4c_G^2 c_p^2 (\lambda_k^{*4} + \mu_n^{*4}) - 4\lambda_k^{*2} \mu_n^{*2} (c_p^4 (1 - \nu^2) - 2\nu c_G^2 c_p^2)};$$

$$\Omega_{1kn}^W = \omega_{1kn} - \frac{c_p^2 \lambda_{kn}^2 + c_T^2 \cdot 12 / h^2}{\omega_{1kn}}; \quad \Omega_{2kn}^W = -\omega_{2kn} + \frac{c_p^2 \lambda_{kn}^2 + c_T^2 \cdot 12 / h^2}{\omega_{2kn}};$$

$$\Omega_{1kn}^{\psi} = \omega_{1kn} - \frac{c_T^2 \lambda_{kn}^2}{\omega_{1kn}}; \quad \Omega_{2kn}^{\psi} = -\omega_{2kn} + \frac{c_T^2 \lambda_{kn}^2}{\omega_{2kn}}; \quad \Omega_{3kn}^{\psi} = 0;$$

$$\Omega_{1kn}^{\phi X} = - \frac{(\omega_{1kn}^2 - c_T^2 \lambda_{kn}^2) \left( \omega_{1kn}^2 - c_p^2 \left( \lambda_{kn}^2 + \frac{1+\nu}{2} \mu_{kn}^2 \right) - c_T^2 \cdot \frac{12}{h^2} \right) - 2c_T^4 \mu_n^{*2} \frac{12}{h^2}}{\omega_{1kn} (\omega_{3kn}^2 - \omega_{1kn}^2)};$$

$$\Omega_{2kn}^{\phi X} = - \frac{(\omega_{2kn}^2 - c_T^2 \lambda_{kn}^2) \left( \omega_{2kn}^2 - c_p^2 \left( \lambda_{kn}^2 + \frac{1+\nu}{2} \mu_{kn}^2 \right) - c_T^2 \cdot \frac{12}{h^2} \right) - 2c_T^4 \mu_n^{*2} \frac{12}{h^2}}{\omega_{2kn} (\omega_{3kn}^2 - \omega_{2kn}^2)};$$

$$\Omega_{3kn}^{\Phi X} = \Delta_{kn} \frac{(\omega_{3kn}^2 - c_T^2 \lambda_{kn}^2) \left( \omega_{3kn}^2 - c_p^2 \left( \lambda_{kn}^2 + \frac{1+\nu}{2} \mu_{kn}^2 \right) - c_T^2 \frac{12}{h^2} \right) - 2c_T^4 \mu_n^{*2} \frac{12}{h^2}}{\omega_{3kn} (\omega_{1kn}^2 - \omega_{3kn}^2) (\omega_{2kn}^2 - \omega_{3kn}^2)},$$

$$\Omega_{1kn}^{\Phi Y} = \frac{(\omega_{1kn}^2 - c_T^2 \lambda_{kn}^2) \left( \omega_{1kn}^2 - c_p^2 \left( \lambda_{kn}^2 - \frac{1+\nu}{2} \mu_{kn}^2 \right) - c_T^2 \frac{12}{h^2} \right) + 2c_T^4 \lambda_k^{*2} \frac{12}{h^2}}{\omega_{1kn} (\omega_{3kn}^2 - \omega_{1kn}^2)};$$

$$\Omega_{2kn}^{\Phi Y} = - \frac{(\omega_{2kn}^2 - c_T^2 \lambda_{kn}^2) \left( \omega_{2kn}^2 - c_p^2 \left( \lambda_{kn}^2 - \frac{1+\nu}{2} \mu_{kn}^2 \right) - c_T^2 \frac{12}{h^2} \right) + 2c_T^4 \lambda_k^{*2} \frac{12}{h^2}}{\omega_{2kn} (\omega_{3kn}^2 - \omega_{2kn}^2)};$$

$$\Omega_{3kn}^{\Phi Y} = -\Delta_{kn} \frac{(\omega_{3kn}^2 - c_T^2 \lambda_{kn}^2) \left( \omega_{3kn}^2 - c_p^2 \left( \lambda_{kn}^2 - \frac{1+\nu}{2} \mu_{kn}^2 \right) - c_T^2 \frac{12}{h^2} \right) + 2c_T^4 \lambda_k^{*2} \frac{12}{h^2}}{\omega_{3kn} (\omega_{1kn}^2 - \omega_{3kn}^2) (\omega_{2kn}^2 - \omega_{3kn}^2)},$$

$$\Omega_{4kn}^U = \omega_{4kn} - \frac{c_G^2 \lambda_k^{*2} + c_p^2 \mu_n^{*2}}{\omega_{4kn}}; \quad \Omega_{5kn}^U = -\omega_{5kn} + \frac{c_G^2 \lambda_k^{*2} + c_p^2 \mu_n^{*2}}{\omega_{5kn}};$$

$$\Omega_{4kn}^V = \omega_{4kn} - \frac{c_p^2 \lambda_k^{*2} + c_G^2 \mu_n^{*2}}{\omega_{4kn}}; \quad \Omega_{5kn}^V = -\omega_{5kn} + \frac{c_p^2 \lambda_k^{*2} + c_G^2 \mu_n^{*2}}{\omega_{5kn}};$$

причем  $\omega_{ikn}$  – круговые частоты собственных колебаний:

$$\omega_{1kn} = \sqrt{0.5(\lambda_{kn}^2 (c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 12/h^2 + \Delta_{kn})}; \quad \omega_{2kn} = \sqrt{0.5(\lambda_{kn}^2 (c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 12/h^2 - \Delta_{kn})};$$

$$\omega_{3kn} = \sqrt{c_p^2 \frac{1-\nu}{2} \lambda_{kn}^2 + c_T^2 12/h^2}; \quad \omega_{4kn} = \sqrt{\frac{\lambda_{kn}^2 (c_p^2 + c_G^2) + \Delta_{kn}^*}{2}}; \quad \omega_{5kn} = \sqrt{\frac{\lambda_{kn}^2 (c_p^2 + c_G^2) - \Delta_{kn}^*}{2}}.$$

В результате решения соответствующих вековых уравнений, полученных на основе (2), можно записать следующие зависимости для собственных частот колебаний пластины средней толщины:

$$\omega_1(\lambda) = \sqrt{0.5 \left( \lambda^2 (c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 12/h^2 + \sqrt{(\lambda^2 (c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 12/h^2)^2 - 4 \cdot c_T^2 c_p^2 \lambda^4} \right)};$$

$$\omega_2(\lambda) = \sqrt{0.5 \left( \lambda^2 (c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 12/h^2 - \sqrt{(\lambda^2 (c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 12/h^2)^2 - 4 \cdot c_T^2 c_p^2 \lambda^4} \right)};$$

$$\omega_3(\lambda) = \sqrt{c_p^2 \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 + c_T^2 12/h^2}; \quad \omega_4(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 c_p^2}; \quad \omega_5(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 c_G^2}.$$

На рис. 2 показаны графики зависимости квадрата собственных частот от квадрата волновых чисел для поперечных и продольных колебаний пластинчатых элементов конструкции согласно гипотезам типа Тимошенко (1) для системы уравнений (2). На этом рисунке кривая 1 соответствует функции  $\omega_1(\lambda)$ , кривая 2 –  $\omega_2(\lambda)$ , кривая 3 –  $\omega_3(\lambda)$ , кривая 4 –  $\omega_4(\lambda)$ , кривая 5 –  $\omega_5(\lambda)$ .

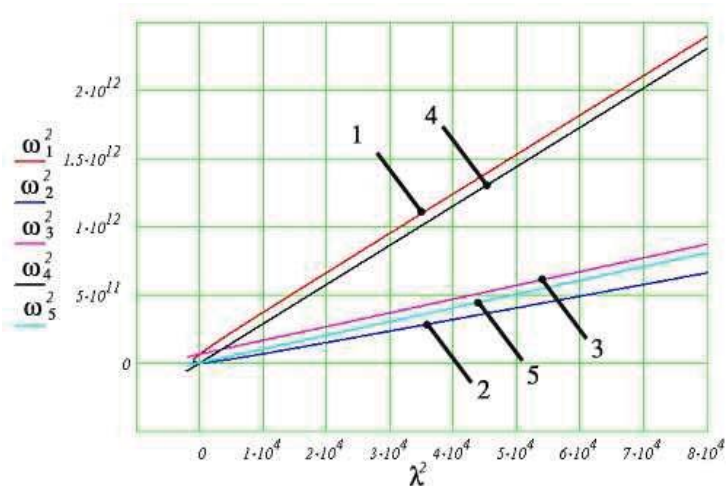


Рис. 2 – Решение векового уравнения для продольных и поперечных колебаний.

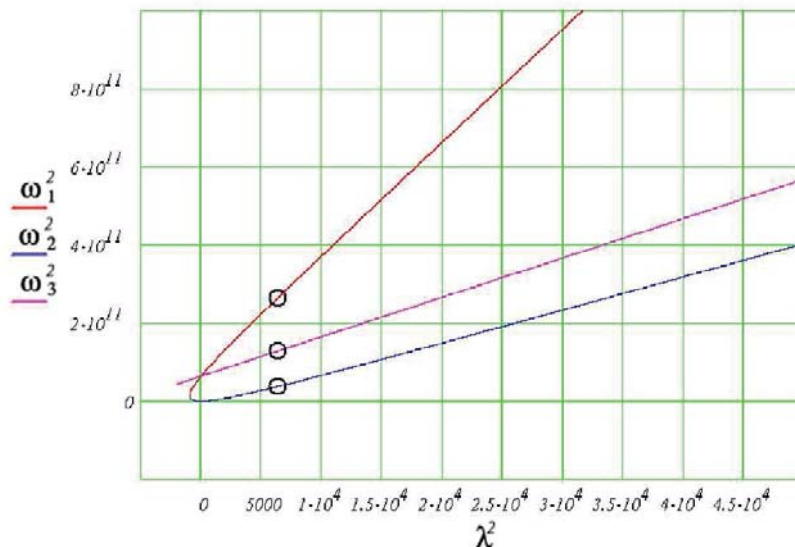


Рис. 3 – Решение векового уравнения для поперечных колебаний (изгибных и сдвиговых).

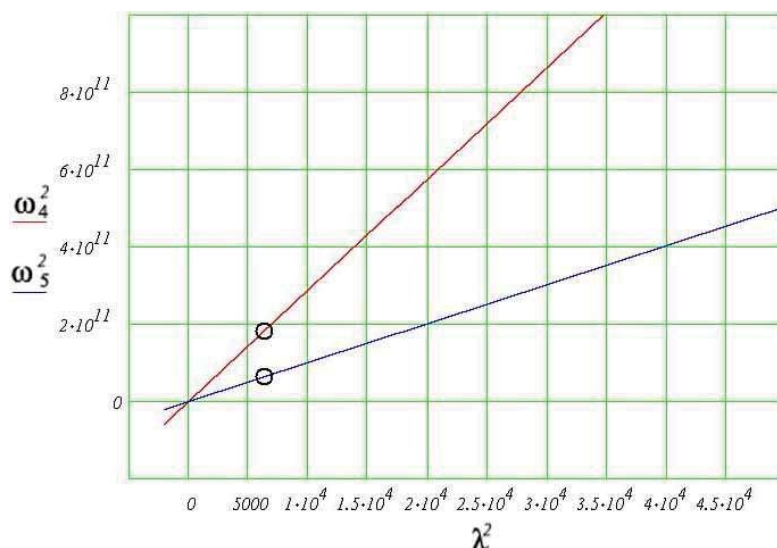


Рис. 4 – Решение векового уравнения для продольных колебаний.

На рис. 3 показаны отдельно зависимости частот собственных колебаний  $\omega_1(\lambda)$ ,  $\omega_2(\lambda)$ ,  $\omega_3(\lambda)$  для поперечных сдвиговых и изгибных волн, причём на указанных графиках для примера показаны точки (черные кружочки), соответствующие дискретным собственным частотам  $\omega_{1,7,9}(\lambda_{7,9})$ ,  $\omega_{2,7,9}(\lambda_{7,9})$ ,  $\omega_{3,7,9}(\lambda_{7,9})$ .

На рис. 4 показаны такие же зависимости для продольных волн  $\omega_4(\lambda)$ ,  $\omega_5(\lambda)$  и дискретные собственные частоты  $\omega_{4,7,9}(\lambda_{7,9})$ ,  $\omega_{5,7,9}(\lambda_{7,9})$ .

Показывать дискретные собственные частоты, используемые в решении системы уравнений (2) не имеет смысла, поскольку даже если учитывать по 50 членов ряда Фурье в каждом направлении, то получается 2500 частот, и эти дискретные точки сливаются и повторяют линии на рис. 2.

Следует отметить, что в выражениях (11) – (15) коэффициенты  $C_{knj}^{Px}$ ,  $C_{knj}^{Py}$ ,  $C_{knj}^{Pz}$ ,  $C_{knj}^{Mx}$ ,  $C_{knj}^{My}$  являются коэффициентами разложения функций внешних нагрузок в ряды Фурье.

В случае сосредоточенного нагружения пластины в точке с координатами  $x_{0j}$ ,  $y_{0j}$  эти коэффициенты будут иметь вид:

$$C_{knj}^{Px} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho h} \cdot \cos\left(\frac{k\pi \cdot x_{0j}}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi \cdot y_{0j}}{m}\right); \tag{16}$$

$$C_{knj}^{Py} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho h} \cdot \sin\left(\frac{k\pi \cdot x_{0j}}{l}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi \cdot y_{0j}}{m}\right); \tag{17}$$

$$C_{knj}^{Pz} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho h} \cdot \sin\left(\frac{k\pi \cdot x_{0j}}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi \cdot y_{0j}}{m}\right); \quad (18)$$

$$C_{knj}^{Mx} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho \cdot I} \cdot \cos\left(\frac{k\pi \cdot x_{0j}}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi \cdot y_{0j}}{m}\right); \quad (19)$$

$$C_{knj}^{My} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho \cdot I} \cdot \sin\left(\frac{k\pi \cdot x_{0j}}{l}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi \cdot y_{0j}}{m}\right). \quad (20)$$

Последующие выражения для коэффициентов разложения функций внешних нагрузок в ряды Фурье приведены только для поперечной составляющей нагрузки  $P_{zj}(x, y, t)$ , как наиболее часто встречающейся в реальных задачах. Выражения для других составляющих несложно получить по аналогии с выражениями (16) – (20).

Случай, когда нагрузка равномерно распределена по малой прямоугольной области, представлен на рис. 5. Здесь  $\Delta x, \Delta y$  – размеры области приложения вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$ , соответственно, а точка  $(x_{0j}, y_{0j})$  – центр прямоугольника:

$$P_z(x, y, t) = P(t) \left[ H(x - (x_{0j} - \Delta x/2)) - H(x - (x_{0j} + \Delta x/2)) \right] \times \\ \times \left[ H(y - (y_{0j} - \Delta y/2)) - H(y - (y_{0j} + \Delta y/2)) \right]. \quad (21)$$

Коэффициенты разложения будут иметь вид:

$$C_{jkn} = \frac{4}{lm} \frac{1}{\rho h} \frac{4}{\lambda_{kn}^* \mu_n^*} \sin \frac{k\pi x_{0j}}{l} \sin \frac{k\pi \Delta x}{2l} \sin \frac{n\pi y_{0j}}{m} \sin \frac{n\pi \Delta y}{2m}. \quad (22)$$

В случае если нагрузка равномерно распределена по кругу (рис. 6) радиусом  $r$ :

$$P_{zj}(x, y, t) = \begin{cases} P_j(t), & (x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2 \leq r^2; \\ 0, & (x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2 > r^2, \end{cases} \quad (23)$$

где  $P_j(t)$  – неизвестная функция изменения во времени  $j$ -й нагрузки  $P_{zj}(x, y, t)$ . Тогда:

$$C_{jkn} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho h} \cdot \frac{2\pi \cdot r}{\lambda_{kn}} \cdot J_1(\lambda_{kn} r) \sin\left(\frac{k\pi \cdot x_{0j}}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi \cdot y_{0j}}{m}\right). \quad (24)$$

причем  $J_1(\lambda_{kn} r)$  – функция Бесселя первого рода. Отметим, что способ получения выражений для приведенного коэффициента описан в работе [12].

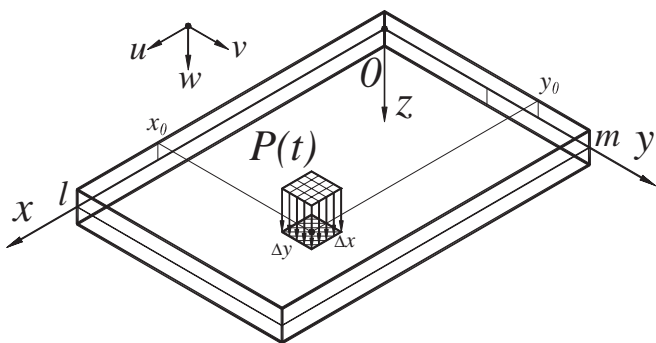


Рис. 5 – Поперечная нагрузка распределена по малой прямоугольной области.

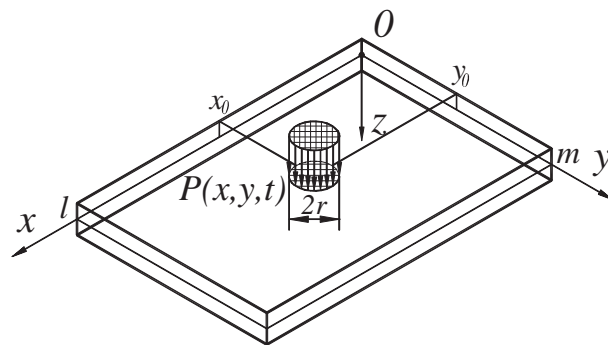


Рис. 6 – Поперечная равномерно распределенная по малому кругу нагрузка.

Если предположить, что в зоне контакта нагрузка распределена не равномерно, а в виде эллипсоида вращения, что в некоторых случаях более точно отражает физические аспекты процесса деформирования, то

$$P_{zj}(x, y, t) = \begin{cases} P(t) \sqrt{1 - \frac{(x - x_{0j})^2}{r^2} - \frac{(y - y_{0j})^2}{r^2}}, & (x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2 \leq r^2; \\ 0, & (x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2 > r^2. \end{cases} \quad (25)$$

В этом случае коэффициент разложения нагрузки в двойные ряды Фурье примут следующий вид:

$$C_{jkn} = \frac{4}{lm} \frac{1}{\rho h} \frac{2\pi}{(\lambda_{kn})^2} \left( \frac{\sin(\lambda_{kn} r)}{\lambda_{kn} r} - \cos(\lambda_{kn} r) \right) \sin\left(\frac{k\pi x_{0j}}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_{0j}}{m}\right). \quad (26)$$

При воздействии на пластину подвижных нагрузок, движущихся с постоянной скоростью, необходимо в

соответствующих формулах для коэффициентов разложения вместо аргументов, связанных с неподвижной точкой  $(x_{0j}, y_{0j})$ , записать новые аргументы вида  $(V_{xj} \cdot t, V_{yj} \cdot t)$ , где  $V_{xj}, V_{yj}$  – составляющие скорости подвижной нагрузки вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$ , соответственно. Например, если точка приложения сосредоточенной поперечной нагрузки движется вдоль оси  $Ox$  с постоянной скоростью  $V_0$  (рис. 7), то коэффициент этой нагрузки, аналогичный (18) будет иметь вид:

$$C_{kn}^{Pz} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho h} \cdot \sin\left(\frac{k\pi \cdot V_0 \cdot t}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi \cdot y_0}{m}\right). \tag{27}$$

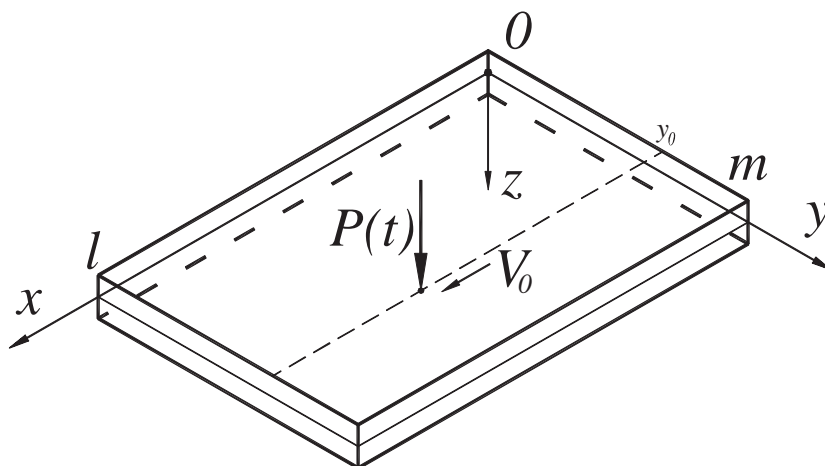


Рис. 7 – Поперечная подвижная нагрузка.

Перемещение произвольной точки пластины с координатами  $x_s, y_s$  при произвольном нагружении можно найти из следующих соотношений

$$u_{0S}(t) = u_0(x_s, y_s, t) = \sum_{j=1}^N \left( \int_0^t K_{P_{xj}}^U(t-\tau) P_{xj}(\tau) d\tau + \int_0^t K_{P_{yj}}^U(t-\tau) P_{yj}(\tau) d\tau \right); \tag{28}$$

$$v_{0S}(t) = v_0(x_s, y_s, t) = \sum_{j=1}^N \left( \int_0^t K_{P_{xj}}^V(t-\tau) P_{xj}(\tau) d\tau + \int_0^t K_{P_{yj}}^V(t-\tau) P_{yj}(\tau) d\tau \right); \tag{29}$$

$$w_S(t) = w(x_s, y_s, t) = \sum_{j=1}^N \left( \int_0^t K_{P_{zj}}^W(t-\tau) P_{zj}(\tau) d\tau + \int_0^t K_{M_{xj}}^W(t-\tau) M_{xj}(\tau) d\tau + \int_0^t K_{M_{yj}}^W(t-\tau) M_{yj}(\tau) d\tau \right); \tag{30}$$

$$\psi_{xS}(t) = \psi_x(x_s, y_s, t) = \sum_{j=1}^N \left( \int_0^t K_{P_{zj}}^{\psi X}(t-\tau) P_{zj}(\tau) d\tau + \int_0^t K_{M_{xj}}^{\psi X}(t-\tau) M_{xj}(\tau) d\tau + \int_0^t K_{M_{yj}}^{\psi X}(t-\tau) M_{yj}(\tau) d\tau \right); \tag{31}$$

$$\psi_{yS}(t) = \psi_y(x_s, y_s, t) = \sum_{j=1}^N \left( \int_0^t K_{P_{zj}}^{\psi Y}(t-\tau) P_{zj}(\tau) d\tau + \int_0^t K_{M_{xj}}^{\psi Y}(t-\tau) M_{xj}(\tau) d\tau + \int_0^t K_{M_{yj}}^{\psi Y}(t-\tau) M_{yj}(\tau) d\tau \right), \tag{32}$$

где

$$K_{P_{xj}}^U(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Px}}{\Delta_{kn}^*} \cos \frac{k\pi x_s}{l} \sin \frac{n\pi y_s}{m} \sum_{i=4}^5 \Omega_{ikn}^U \sin \omega_{ikn} t; \quad K_{P_{yj}}^U(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Py}}{\Delta_{kn}^*} \cos \frac{k\pi x_s}{l} \sin \frac{n\pi y_s}{m} \sum_{i=4}^5 \Omega_{ikn}^U \sin \omega_{ikn} t;$$

$$K_{P_{xj}}^V(t) = (c_p^2 v + c^2) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Px} \lambda_k \mu_n^*}{\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi x_s}{l} \cos \frac{n\pi y_s}{m} \left( \frac{\sin \omega_{4kn} t}{\omega_{4kn}} - \frac{\sin \omega_{5kn} t}{\omega_{5kn}} \right);$$

$$K_{P_{yj}}^V(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Py}}{\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi x_s}{l} \cos \frac{n\pi y_s}{m} \sum_{i=4}^5 \Omega_{ikn}^V \sin \omega_{ikn} t; \quad K_{P_{zj}}^W(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Pz}}{\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi x_s}{l} \sin \frac{n\pi y_s}{m} \sum_{i=1}^2 \Omega_{ikn}^W \sin \omega_{ikn} t;$$

$$K_{M_{xj}}^W(t) = -c_T^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Mx}}{\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \left( \frac{\sin \omega_{1kn} t}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin \omega_{2kn} t}{\omega_{2kn}} \right);$$

$$K_{M_{yj}}^W(t) = -c_T^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{My}}{\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \left( \frac{\sin \omega_{1kn} t}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin \omega_{2kn} t}{\omega_{2kn}} \right);$$



$$\begin{aligned}
K_{P_{zj}}^{\psi X}(t) &= c_T^2 \frac{12}{h^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Pz} \lambda_k^*}{\Delta_{kn}} \cos \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \left( \frac{\sin \omega_{1kn} t}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin \omega_{2kn} t}{\omega_{2kn}} \right); \\
K_{M_{xj}}^{\psi X}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Mx}}{2\Delta_{kn} \lambda_k^*} \cos \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \sum_{i=1}^3 \left( \Omega_{ikn}^{\psi} + \Omega_{ikn}^{\phi X} \right) \sin \omega_{ikn} t; \\
K_{M_{yj}}^{\psi X}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{My}}{2\Delta_{kn} \lambda_k^*} \cos \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \sum_{i=1}^3 \left( \Omega_{ikn}^{\psi} + \Omega_{ikn}^{\phi Y} \right) \sin \omega_{ikn} t; \\
K_{P_{zj}}^{\psi Y}(t) &= c_T^2 \frac{12}{h^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Pz} \mu_n^*}{\Delta_{kn}} \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \cos \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \left( \frac{\sin \omega_{1kn} t}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin \omega_{2kn} t}{\omega_{2kn}} \right); \\
K_{M_{xj}}^{\psi Y}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Mx}}{2\Delta_{kn} \mu_n^*} \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \cos \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \sum_{i=1}^3 \left( \Omega_{ikn}^{\psi} - \Omega_{ikn}^{\phi X} \right) \sin \omega_{ikn} t; \\
K_{M_{yj}}^{\psi Y}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{My}}{2\Delta_{kn} \mu_n^*} \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \cos \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \sum_{i=1}^3 \left( \Omega_{ikn}^{\psi} - \Omega_{ikn}^{\phi Y} \right) \sin \omega_{ikn} t.
\end{aligned}$$

Отметим, что при решении реальных задач, в которых необходимо исследовать перемещения в нескольких точках при воздействии сложной системы внешних нагрузок, выражения (28) – (32) в максимально компактной форме могут быть записаны в виде:

$$u_i^v(t) = \sum_{j=1}^N \int_0^t K_{ij}^v(t-\tau) P_j(\tau) d\tau, \quad (33)$$

где индекс  $j$  соответствует номеру внешней нестационарной (сосредоточенной или распределенной по малой области) нагрузки с координатами  $(x_{0j}, y_{0j})$ , причем в случае сложного нагружения – его компоненты удобнее считать и обозначать как независимые нагрузки; индекс  $i$  отвечает точке, в которой исследуются компоненты перемещения  $(u, v, w)$ , а индекс  $v = I, II, III$  – непосредственно самому компоненту перемещения, то есть:

$$u_i^I(t) = u_0(x_i, y_i, t) + z_i \cdot \psi_x(x_i, y_i, t); \quad u_i^{II}(t) = v_0(x_i, y_i, t) + z_i \cdot \psi_y(x_i, y_i, t); \quad u_i^{III}(t) = w_0(x_i, y_i, t). \quad (34)$$

Укажем, что на основе зависимостей (28) – (32) несложно получить выражения для напряжений и деформаций в произвольной точке пластины, например, выражения для деформаций будут иметь вид аналогичный и отличаться от предыдущих выражений значениями ядра:

$$\varepsilon_{v_i}(t) = \sum_{j=1}^N \int_0^t K_{ij}^v(t-\tau) P_j(\tau) d\tau. \quad (35)$$

Здесь обозначения аналогичны описанным ранее в (33), за исключением индексов  $v = x, y$  – которые удобнее обозначить в виде букв, совпадающих с направлениями осей, вдоль которых определяется деформация ( $\varepsilon_x(t)$  и  $\varepsilon_y(t)$ ; напомним, что согласно принятым гипотезам  $\varepsilon_z(t) = 0$ ).

Для получения деформационных ядер необходимо ядра для определения функций компонент перемещения  $u_0(x_i, y_i, t)$ ,  $v_0(x_i, y_i, t)$  и углов поворота  $\psi_x(x_i, y_i, t)$ ,  $\psi_y(x_i, y_i, t)$  рассмотреть не как функцию переменной  $t$  в точке  $(x_i, y_i, t)$ , а как функцию нескольких переменных  $(x, y, t)$  и взять частную производную по соответствующей пространственной координате ( $\partial x$  или  $\partial y$ ):

$$\varepsilon_x(x, y, t) = \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x}; \quad \varepsilon_y(x, y, t) = \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y}.$$

Следовательно, для деформационных ядер можно записать:

$$\begin{aligned}
K_j^{\varepsilon x}(x, y, t) &= \frac{\partial K_j^U(x, y, t)}{\partial x} + z \frac{\partial K_j^{\psi X}(x, y, t)}{\partial x} = K_j^{dU}(x, y, t) + z \cdot K_j^{d\psi X}(x, y, t); \\
K_j^{\varepsilon y}(x, y, t) &= \frac{\partial K_j^V(x, y, t)}{\partial y} + z \frac{\partial K_j^{\psi Y}(x, y, t)}{\partial y} = K_j^{dV}(x, y, t) + z \cdot K_j^{d\psi Y}(x, y, t),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
K_{P_{zj}}^{dU}(t) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Pz} \lambda_k^*}{\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi x_s}{l} \sin \frac{n\pi y_s}{m} \sum_{i=4}^5 \Omega_{ikn}^U \sin \omega_{ikn} t; \\
K_{P_{yj}}^{dU}(t) &= -(c_p^2 V + c^2) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Py} \lambda_k^{*2} \mu_n^*}{\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi x_s}{l} \sin \frac{n\pi y_s}{m} \left( \frac{\sin \omega_{4kn} t}{\omega_{4kn}} - \frac{\sin \omega_{5kn} t}{\omega_{5kn}} \right); \\
K_{P_{zj}}^{d\psi X}(t) &= -c_T^2 \frac{12}{h^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Pz} \lambda_k^{*2}}{\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \left( \frac{\sin \omega_{1kn} t}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin \omega_{2kn} t}{\omega_{2kn}} \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{Mxj}^{d\psi X}(t) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Mx}}{2\Delta_{kn}} \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \sum_{i=1}^3 (\Omega_{ikn}^{\psi} + \Omega_{ikn}^{\phi X}) \sin \omega_{ikn} t; \\
 K_{Myj}^{d\psi X}(t) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{My}}{2\Delta_{kn}} \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \sum_{i=1}^3 (\Omega_{ikn}^{\psi} + \Omega_{ikn}^{\phi Y}) \sin \omega_{ikn} t; \\
 K_{Px}^{dV}(t) &= -(c_p^2 v + c^2) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{kn}^{Px} \lambda_k^* \mu_n^{*2}}{\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi x_s}{l} \sin \frac{n\pi y_s}{m} \left( \frac{\sin \omega_{4kn} t}{\omega_{4kn}} - \frac{\sin \omega_{5kn} t}{\omega_{5kn}} \right); \\
 K_{Pyj}^{dV}(t) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Py} \lambda_k^*}{\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi x_s}{l} \sin \frac{n\pi y_s}{m} \sum_{i=4}^5 \Omega_{ikn}^V \sin \omega_{ikn} t; \\
 K_{Pzj}^{d\psi Y}(t) &= -c_T^2 \frac{12}{h^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Pz} \mu_n^{*2}}{\Delta_{kn}} \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \left( \frac{\sin \omega_{1kn} t}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin \omega_{2kn} t}{\omega_{2kn}} \right); \\
 K_{Mxj}^{d\psi Y}(t) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Mx}}{2\Delta_{kn}} \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \sum_{i=1}^3 (\Omega_{ikn}^{\psi} - \Omega_{ikn}^{\phi X}) \sin \omega_{ikn} t; \\
 K_{Myj}^{d\psi Y}(t) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{My}}{2\Delta_{kn}} \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \sum_{i=1}^3 (\Omega_{ikn}^{\psi} - \Omega_{ikn}^{\phi Y}) \sin \omega_{ikn} t.
 \end{aligned}$$

В выражениях (35) ядра для определения, например, деформации в точке  $(x_1, y_1) - \varepsilon_{x_1}(t)$  при воздействии только поперечной нагрузки  $P_{z1}(t)$  и момента  $M_{x2}(t)$  будут иметь следующий вид:

$$K_{11}^x(t) = K_{Pzj}^{d\psi X}(t), \quad K_{12}^x(t) = K_{Mxj}^{d\psi X}(t),$$

а сама деформация  $\varepsilon_{x_1}(t)$  описывается формулой:

$$\varepsilon_{x_1}(t) = \int_0^t K_{11}^x(t-\tau) P_{z1}(\tau) d\tau + \int_0^t K_{12}^x(t-\tau) M_{x2}(\tau) d\tau. \tag{36}$$

Таким образом, получение зависимостей вида (33), (35), по сути, завершает построение решения прямой задачи о сложном нестационарном деформировании прямоугольной пластины.

В операторной форме выражения (33), (35) можно записать в виде:

$$u_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} p_j, \tag{37}$$

где  $u_i$  – соответствует искомой функции компоненты перемещения или деформации от времени;  $A_{ij}$  – интегральный оператор Дюамеля для соответствующих конечно-разностных ядер Коши  $K_{ij}(t)$  или оператор свёртки;  $p_j$  соответствует изменению во времени  $j$ -й силы  $P_j(t)$ .

Однако при практических исследованиях нестационарного деформирования пластинчатых элементов конструкции требуются конкретные числовые значения, а не формулы, и удобнее вместо выражений вида (37) записывать их дискретные аналоги:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{A}_{ij} \mathbf{P}_j, \tag{38}$$

где вектор  $\mathbf{u}_i$  соответствует функции  $u_i$ ; матрица  $\mathbf{A}_{ij}$  – интегральному оператору свёртки  $A_{ij}$ ; элементы которой  $a_{ij}$  соответствуют разностным ядрам  $K(t_i - t_j)$ ; вектор  $\mathbf{P}_j$  отвечает функциям нагрузки  $P_j(t)$ .

В ряде случаев возникает следующая обратная задача: напряженно-деформированное состояние (НДС) объекта известно только в некоторых точках, а необходимо найти внешнее нестационарное нагружение, воздействующее на данный объект. Более сложная проблема возникает при идентификации произвольных сложных нагрузок. Например, когда в определенной точке на пластину воздействует произвольная сосредоточенная нагрузка, содержащая все компоненты нагружения (три силовые и две моментные), тогда необходимо знать изменение во времени пяти параметров НДС (не обязательно в одной точке). В этом случае следует при решении идентификационной задачи анализировать систему из пяти интегральных уравнений Вольтерра I рода, содержащих пять неизвестных функций времени и отражающих зависимости для пяти параметров НДС с заданными функциями времени, которые принимаются в качестве исходных данных.

**Обратная задача. Идентификация нескольких импульсных нагрузок, воздействующих на пластину.**

Особый интерес представляют исследования в области обратных некорректных задач по идентификации одновременно действующих нескольких независимых произвольных (продольных и поперечных) нагрузок.

Рассматривается импульсное воздействие на упругую изотропную пластину средней толщины системы не-

скольких нагрузок. Под импульсным воздействием понимается нестационарное нагружение пластины на протяжении времени соизмеримого с периодом низших собственных частот ее колебаний. Поведение пластины изучается на конечном интервале времени. Пусть законы изменения во времени этих нагрузок неизвестны, однако при этом предполагается, что геометрические области нагружений и их координаты заданы. Также предполагается, что заданные плоские области приложения нагрузок являются односвязными (в общем случае), а в пределах области нагружения нагрузки, воздействующие на пластину, не зависят от пространственных координат.

Комбинация соотношений типа (33), (35) при заданных функциях в правой части и искомым функциях  $P_j(t)$  является системой из  $N$  линейных интегральных уравнений Вольтерра I рода, решение которой является целью в задаче идентификации.

В операторной форме система интегральных уравнений вида (37) будет иметь следующий вид:

$$\left\{ \sum_{i=1}^N A_{i1} \cdot p_i = u_1; \dots; \sum_{i=1}^N A_{ij} \cdot p_i = u_j; \dots; \sum_{i=1}^N A_{iN} \cdot p_i = u_N. \right. \quad (39)$$

Укажем, что описание системы (39) аналогично приведенному выше для операторного выражения (37).

Система интегральных уравнений решается при помощи специально разработанного комплекса методов, который базируется на использовании обобщенных алгоритмов для решения блочных матричных уравнений [13] и *регуляризирующего алгоритма А. Н. Тихонова*.

Последовательность решения, согласно описанному комплексу методов, следующая: для системы интегральных уравнений выполняется дискретизация по времени, в результате чего, указанная система интегральных уравнений вида (39) сводится к блочной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{1j} & \dots & \mathbf{A}_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{i1} & \dots & \mathbf{A}_{ij} & \dots & \mathbf{A}_{iN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{N1} & \dots & \mathbf{A}_{Nj} & \dots & \mathbf{A}_{NN} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_i \\ \vdots \\ \mathbf{p}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_j \\ \vdots \\ \mathbf{u}_N \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Здесь  $\mathbf{A}_{ij}$  – матрица, соответствующая интегральному оператору  $A_{ij}$ , вектор  $\mathbf{p}_i$  соответствует функции  $p_i$ , а  $\mathbf{u}_j - u_j$ .

Блочная СЛАУ типа (40) решается с использованием *обобщенного алгоритма Гаусса* – (ОАГ) [14] или *Крамера* – (ОАК), в результате можно получить  $N$  уравнений, зависящих только от одной  $i$  – ой нагрузки:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{p}_i = \mathbf{M}i. \quad (41)$$

где  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{M}i$  – матрицы, определенные с применением ОАК.

Для каждого уравнения вида (41) выполняется процедура регуляризации по А. Н. Тихонову, в результате которой мы приходим к регуляризированной СЛАУ вида:

$$(\mathbf{M}^T \mathbf{M} + \alpha_i \mathbf{C}) \cdot \mathbf{p}_i = \mathbf{M}^T \mathbf{M}i. \quad (42)$$

где  $\alpha_i > 0$  – параметр регуляризации;  $\mathbf{C}$  – симметричная трехдиагональная матрица, форма которой приведена в [13].

Параметр регуляризации  $\alpha_i$ , который входит в (42), вычисляется на основе минимизации по  $\alpha_i$ , соответствующего каждому  $\mathbf{p}_i$  функционала вида:

$$\|\mathbf{M} \cdot \mathbf{p}_i(\alpha_i) - \mathbf{M}i\|^2. \quad (43)$$

**Выводы.** В данной работе представлена теория решения прямых и обратных задач теории упругости при действии на пластину конечной системы независимых нестационарных сложных нагружений.

В рамках прямой задачи в общем виде получены итоговые соотношения, которые позволяют вычислять перемещения и деформации в произвольной точке пластины.

Приведена постановка обратной задачи по идентификации системы нескольких одновременно действующих независимых произвольных (продольных и поперечных) нагрузок. Изложен алгоритм решения задачи идентификации на базе решения системы интегральных уравнений Вольтерра.

#### Список литературы

1. Вороний А. В., Янютин Е. Г. Идентификация нескольких импульсных нагрузок, воздействующих на пластину // Прикладная механика. – 2007. – Вып. 43. – № 7. – С. 90 – 97.
2. Янютин Е. Г., Вороний А. В., Повалев С. И., Янчевский И. В. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. Монография в 2-х частях. Часть II. – Харьков : Изд-во ХНАДУ, 2010. – 212 с.
3. Янютин Е. Г., Вороний А. В. Идентификация нестационарного нагружения, касательного к лицевой поверхности прямоугольной пластины // Проблемы машиностроения. – 2004. – Вып. 7. – №1. – С. 76 – 81.
4. Янютин Е. Г., Янчевский И. В., Вороний А. В., Шараната А. С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. Монография. – Харьков : ХНАДУ, 2004. – 392 с.
5. Вороний А. В., Повалев С. И., Шараната А. С., Янютин Е. Г. Применение теории интегральных уравнений Вольтерра при решении динамических обратных задач для пластин и оболочек // Вісник Харківського національного університету. Серія : Математичне моделювання.

- вання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – 2005. – № 661. – С. 69 – 82.
6. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. – М. : ФИЗМАТГИЗ, 1967. – 444 с.
  7. Уфлянд Я. С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин // Прикладная математика и механика. – 1948. – Вып. – 12. – № 3. – С. 287 – 300.
  8. Григолюк Э. И., Селезов И. Т. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М. : ВИНТИ, 1973. – 272 с.
  9. Гузь А. Н., Кубенко В. Д. Методы расчета оболочек. Т. 5. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек. – К. : Наук. думка, 1982. – 400 с.
  10. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление. – М. : Высшая школа, 1966. – 405 с.
  11. Лурье А. И. Операционное исчисление. – М. : Гостехтеориздат, 1950. – 432 с.
  12. Филиппов А. П., Кохманюк С. С., Янютин Е. Г. Деформирование элементов конструкций под действием ударных и импульсных нагрузок. – К. : Наук. думка, 1978. – 184 с.
  13. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М. : Наука, 1983. – 200 с.
  14. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1967. – 576 с.

## References (transliterated)

1. Voropay A. V., Yanyutin Ye. G. Identifikatsiya neskol'kikh impul'snykh nagruzok, vozdeystvuyuschikh na plastinu [Identification of several impulse loads acting on a plate]. *Prikladnaya mekhanika* [Applied mechanics]. 2007, vol. 43, no. 7, pp. 90–97.
2. Yanyutin Ye. G., Voropay A. V., Povalyayev S. I., Yanchevskiy I. V. *Identifikatsiya nagruzok pri impul'snom deformirovanii tel. Monografiya v 2-kh chastyakh. Chast' II* [Load identification during pulsed deformation of a body. Monograph in 2 parts. Part II]. Kharkov, Izdatel'stvo KhNADU Publ., 2010. 212 p.
3. Yanyutin Ye. G., Voropay A. V. Identifikatsiya nestatsionarnogo nagruzheniya, kasatel'nogo k litsevoy poverkhnosti pryamougol'noy plastiny [Identification of nonstationary load tangent to the face of a rectangular plate]. *Problemy mashinostroyeniya* [Problems of mechanical engineering]. 2004, vol. 7, no. 1, pp. 76–81.
4. Yanyutin Ye. G., Yanchevskiy I. V., Voropay A. V., Sharapata A. S. *Zadachi impul'snogo deformirovaniya ehlementov konstruktivnykh elementov*. Monografiya [Problems of pulsed deformation of structural elements. Monograph]. Kharkov KhNADU Publ., 2004. 392 p.
5. Voropay A. V., Povalyayev S. I., Sharapata A. S., Yanyutin Ye. G. Primeneniye teorii integral'nykh uravneniy Vol'terra pri reshenii dinamicheskikh obratnykh zadach dlya plastin i obolochek [Using Volterra integral equation theory for solving dynamical inverse plate and shell problems]. *Visnyk natsional'nogo universytetu. Seriya matematichne modelyuvannya. Informatsiyi tekhnologiyi. Avtomatyzovani systemy upravlinnya* [Bulletin of the Kharkiv National University. Series: Mathematical modeling. Information technologies. Automated control systems]. 2005, no. 661, pp. 69–82.
6. Timoshenko S. P. *Kolebaniya v inzhenernom dele* [Oscillations in Engineering]. Moscow, FIZMATGIZ Publ., 1967. 444 p.
7. Uflyand Ya. S. Rasprostraneniye voln pri poperechnykh kolebaniyakh sterzhney i plastin [Wave propagation during transverse oscillations of rods and plates]. 1948, vol. 12, no. 3, pp. 287–300.
8. Grigolyuk Eh. I., Selezov I. T. *Mekhanika tvyerdukh deformiruyemykh tel. T. 5. Neklassicheskiye teorii kolebaniy sterzhney, plastin i obolochek* [Mechanics of deformable solids. Vol. 5. Non-classical theory of oscillations of rods, plates, and shells]. Moscow, VINITI Publ., 1973. 272 p.
9. Guz' A. N., Kubenko V. D. *Metody raschyeta obolochek. T. 5. Teoriya nestatsionarnoy aehrogidrouprugosti obolochek* [Shell computation methods. Vol. 5. Shell nonstationary aerohydroelasticity theory]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1982. 400 p.
10. Ditkin V. A., Prudnikov A. P. *Operatsionnoye ischisleniye* [Operational calculus]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1966. 405 p.
11. Lur'e A. I. *Operatsionnoye ischisleniye* [Operational calculus]. Moscow, Gostekhteorizdat Publ., 1950. 432 p.
12. Filippov A. P., Kokhmanyuk S. S., Yanyutin Ye. G. *Deformirovaniye ehlementov konstruktivnykh elementov pod deystviyem udarnykh i impul'snykh nagruzok* [Deformation of structural elements under the action of impact and pulse loads]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1978. 184 p.
13. Tikhonov A. N., Goncharskiy A. V., Stepanov V. V., Yagola A. G. *Regulyariziruyushchiye algoritmy i apriornaya informatsiya* [Regularization algorithms and a priori information]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 200 p.
14. Gantmakher F. R. *Teoriya matrits* [Matrix theory]. Moscow, Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit.-ry Publ., 1967. 576 p.

Поступила (received) 28.10.2017

## Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

**Вплив на прямокутну пластину скінченної системи довільних навантажень / О. В. Воропай** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 27 – 38. Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2222-0631.

**Воздействие на прямоугольную пластину конечной системы произвольных нагрузжений / А. В. Воропай** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 27 – 38. Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2222-0631.

**Action of finite system of arbitrary loads on rectangular plate / A. V. Voropay** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 30 (1252). – pp. 27 – 38. Bibliog.: 14 titles. – ISSN 2222-0631.

## Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Воропай Олексій Валерійович** – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

**Воропай Алексей Валериевич** – кандидат технических наук, доцент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

**Voropay Alexey Valerievich** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, National Technical University "Kharkov Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.