Publ., 2012, no. 27, pp. 124–129.
6. Kalyuzhnyy V. V. Poyasnennya paradoksiv neoklasychnoyi modeli ekonomichnogo zrostannya R. Solou [The explanation of the paradoxes of the neoclassical model of economic growth R. Solow]. *Visnyk Natsional'nogo banku Ukrayiny* [Bulletin of the National Bank of Ukraine]. Kyyiv, 2005, no. 2, pp. 32–40.
7. Lytvyn O. M. *Dyvidirial'ni ta mul'tygral'ni chyslennya : monografiya* [Dyvidirial and multyhral calculus. Monograph]. Kyiv, Nauk. dumka Publ., 2006. 144 p.

Надійшла (received) 06.03.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Узагальнена виробнича функція, що явно залежить від об'ємних показників ресурсів та капіталоозброєності / О. М. Литвин, М. В. Артюх // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 51 – 56. Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2222-0631.

Обобщенная производственная функция, явно зависящая от объемных показателей ресурсов и капиталовооруженности / О. М. Литвин, М. В. Артюх // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 51 – 56. Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2222-0631.

The generalized production function, which depends explicitly on the volume indicators of resources and capital endowment / O. M. Lytvyn, M. V. Artyukh // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 6 (1228). – pp. 51 – 56. Bibliog.: 7 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Литвин Олег Миколайович – доктор фізико-математичних наук, професор, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: academ_mail@ukr.net.

Литвин Олег Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: academ_mail@ukr.net.

Litvin Oleg Nikolaevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (057) 771-05-45; e-mail: academ_mail@ukr.net.

Артюх Марина Володимирівна – асистент кафедри інформаційних, комп'ютерних і поліграфічних технологій, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (096) 464-63-19; e-mail: maryna.artiukh@gmail.com.

Артюх Марина Владимировна – ассистент кафедры Информационных, компьютерных и полиграфических технологий, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (096) 464-63-19; e-mail: maryna.artiukh@gmail.com.

Artyukh Maryna Volodymyrivna – Assistant at the Department of Information, Computer and Printing Technologies, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (096) 464-63-19; e-mail: maryna.artiukh@gmail.com.

УДК 519.6

О. М. ЛИТВИН, О. П. НЕЧУЙВІТЕР, К. В. КЕЙТА

ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ ВІД ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ У ВИПАДКУ РІЗНИХ ІНФОРМАЦІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ

Робота присвячена розробці математичних моделей цифрової обробки сигналів та зображень на прикладі побудови кубатурних формул наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох змінних. Розглядається кубатурна формула обчислення інтегралів від тригонометричних функцій двох змінних з використанням інтерлінації у випадку, коли інформація про функцію задана її значеннями в точках. Кубатурна формула будується з використанням оператора інтерлінації з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталих сплайнів. Отримано оцінку похибки наближення кубатурних формул на класі диференційованих функцій. Наведено чисельний експеримент, який підтверджує теоретичні результати дослідження.
Ключові слова: інтеграли від швидкоосцилюючих функцій двох змінних, кубатурні формули, інтерлінація функцій.

Работа посвящена усовершенствованию математических моделей цифровой обработки сигналов и изображений на примере построения кубатурных формул приближенного вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций двух переменных. Рассматривается кубатурная формула вычисления интегралов от тригонометрических функций двух переменных с использованием интерлинации в случае, когда информация о функции задана ее значениями в точках. Кубатурная формула строится с использованием оператора интерлинации со вспомогательными функциями в виде кусочно-постоянных сплайнов. Получены оценки погрешности приближения кубатурных формул на классе дифференцированных функций. Приведен численный эксперимент, подтверждающий теоретические результаты исследования.
Ключевые слова: интегралы от быстроосциллирующих функций двух переменных, кубатурные формулы, интерлинация функций.

The paper deals with improving mathematical models of digital processing of signals and images by the example of constructing cubature formulas for computing integrals of high oscillating functions of two variables. The cubature formula for computing integrals of trigonometric functions of two variables using interlineation is considered for the case when the information about the function is given pointwise. The cubature formula is constructed using interlineation operator with auxiliary functions in the form of piecewise-constant splines. The cubature formula approximation error is obtained for a class of differentiable functions. A numerical experiment confirming the theoretical results is given.

Key words: integrals of high oscillating functions of two variables, cubature formula, interlineation.

Вступ. Інтеграли від швидкоосцилюючих функцій багатьох змінних широко використовуються в багатьох задачах технічного спрямування. Сучасні математичні моделі, зокрема в цифровій обробці сигналів, комп'ютерній та сейсмічній томографії, використовують нові інформаційні оператори. Так в теорії наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох та трьох змінних побудовані кубатурні формули наближеного обчислення *коефіцієнтів Фур'є* з використанням *інтерлінації* та *інтерфлетації* функцій на *класі Ліпшиця, Гьольдера*, класі диференційованих функцій. В якості даних такі кубатурні формули використовують не лише значення функції у вузлових точках, а також *сліди функції* на лініях та сліди функцій на площинах. Однак менше уваги приділено наближеному обчисленню інтегралів загального виду від швидкоосцилюючих функцій багатьох змінних. Саме тому актуальним є питання дослідження інтегралів виду

$$I(\omega)=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\sin\left(\omega g(x,y)\right)dxdy\,,\ \ \omega\in R,\ |\omega|\geq 2\pi \tag{1}$$

у випадку, коли інформація про $f(x,y)$ та $g(x,y)$ задана як значеннями функції у вузлових точках, так і слідами на лініях.

Аналіз останніх досліджень. Теорія наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох змінних з використанням операторів інтерлінації у випадку, коли інформація про функцію задана слідами функції на взаємноперпендикулярних лініях та значеннями функції в точках, викладена в роботах [1 – 6]. Для наближеного обчислення інтегралів від функцій, зокрема і від швидкоосцилюючих функцій двох та трьох змінних, в [7, 8] викладений алгоритм побудови та досліджена якість кубатурної формули, яка в своїй побудові використовує сліди функції на оптимально вибраних лініях. В роботах [9 – 15] висвітлена теорія наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних з використанням операторів інтерфлетації у випадку, коли інформація про функцію задана слідами функції на взаємноперпендикулярних площинах, лініях та значеннями функції в точках. В [16] доведена оптимальність за порядком точності кубатурної формули наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних з використанням лагранжевої поліноміальної інтерфлетації та оптимальним вибором взаємноперпендикулярних площин. Не дослідженим залишається питання наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій багатьох змінних загального виду у випадку різних інформаційних операторів. Першим кроком в даному напрямку є роботи [17], [18], де досліджувались тригонометричні інтеграли від функцій двох та трьох змінних. Інформація про функцію задавалася відповідно її слідами на лініях та площинах; при побудові кубатурних формул використовувалися оператори кусково-сталої інтерлінації та кусково-сталої інтерфлетації. Питання наближеного обчислення тригонометричних інтегралів з використанням операторів інтерлінації та інтерфлетації у випадку, коли інформація про функцію задається в точках, не досліджувалось.

Постановка задачі. Для наближеного обчислення інтегралу від функцій двох змінних виду

$$J(\omega)=\int_0^1\int_0^1 \sin\omega g(x,y)dxdy\,,\ \ \omega\in R,\ |\omega|\geq 2\pi \tag{2}$$

побудувати та дослідити кубатурні формули з використанням операторів кусково-сталої сплайн-інтерлінації. Інформація про функцію $g(x,y)$ задається її значеннями в точках. На класі диференційовних функцій отримати оцінки похибок наближення кубатурних формул.

Кубатурні формули обчислення інтегралу від тригонометричної функції двох змінних на основі кусково-сталої сплайн-інтерлінації.

Означення. Під слідом функції $g(x,y)$ на лініях $x_k=k\Delta-\Delta/2$, $y_j=j\Delta-\Delta/2$, $k,j=\overline{1,\ell}$, $\Delta=1/\ell$ розуміємо відповідно функції однієї змінної $g(x_k,y)$, $0\leq y\leq 1$, $g(x,y_j)$, $0\leq x\leq 1$.

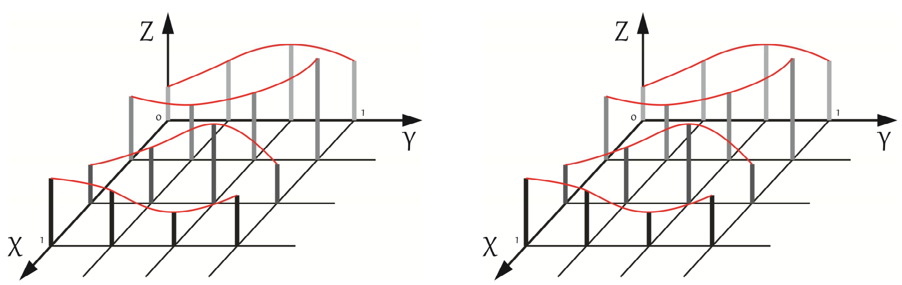

Рис. 1 − Сліди функції $g(x,y)$.

Нехай $m_1 = m_2 = \ell^2$ та $N = \ell^4$. Введемо позначення:

$$X_k = \left[x_{k-1/2}, x_{\kappa+1.2}\right],\ Y_j = \left[y_{j-1/2}, y_{j+1/2}\right],\quad \tilde{X}_{\tilde{k}} = \left[\tilde{x}_{\tilde{k}-1/2}, \tilde{x}_{\tilde{k}+1/2}\right],\ \tilde{Y}_{\tilde{j}} = \left[\tilde{y}_{\tilde{j}-1/2}, \tilde{y}_{\tilde{j}+1/2}\right],$$

$$h_{0k}(x) = \begin{cases} 1, x \in X_k, \\ 0, x \notin X_k, \end{cases}\quad k = \overline{1,\ell},\ H_{0j}(y) = \begin{cases} 1, y \in Y_j, \\ 0, y \notin Y_j, \end{cases}\quad j = \overline{1,\ell},$$

$$\tilde{h}_{0\tilde{k}}(x) = \begin{cases} 1, x \in \tilde{X}_{\tilde{k}}, \\ 0, x \notin \tilde{X}_{\tilde{k}}, \end{cases}\quad \tilde{k} = \overline{1,\ell^2},\ \tilde{H}_{0\tilde{j}}(y) = \begin{cases} 1, y \in \tilde{Y}_{\tilde{j}}, \\ 0, y \notin \tilde{Y}_{\tilde{j}}, \end{cases}\quad \tilde{j} = \overline{1,\ell^2},$$

$$x_k = k\Delta - \frac{\Delta}{2},\ y_j = j\Delta - \frac{\Delta}{2},\ k, j = \overline{1,\ell},\ \Delta = \frac{1}{\ell},\ \tilde{x}_{\tilde{k}} = \tilde{k}\Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2},\ \tilde{y}_{\tilde{j}} = \tilde{j}\Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2},\ \tilde{k}, \tilde{j} = \overline{1,\ell^2},\ \Delta_1 = \frac{1}{\ell^2}.$$

Тоді оператор кусково-сталої сплайн-інтерлінації має вигляд

$$Eg(x,y) = \sum_{k=1}^{\ell} g(x_k, y) h_{0k}(x) + \sum_{j=1}^{\ell} g(x, y_j) H_{0j}(y) - \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell} g(x_k, y_j) h_{0k}(x) H_{0j}(y),$$

а оператор кусково-сталої сплайн-інтерполяції, побудований на основі сплайн-інтерлінації

$$\tilde{E}g(x,y) = \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^2} g(x_k, \tilde{y}_{\tilde{j}}) h_{0k}(x) \tilde{H}_{0\tilde{j}}(y) + \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^2} g(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y_j) \tilde{h}_{0\tilde{k}}(x) H_{0j}(y) - \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell} g(x_k, y_j) h_{0k}(x) H_{0j}(y).$$

Теорема 1. [17] *Нехай* $\left|g^{(1,0)}(x,y)\right| \le M_1,\ \left|g^{(0,1)}(x,y)\right| \le M_2,\ \left|g^{(1,1)}(x,y)\right| \le M$ *, тоді для кубатурної формули*

$$\Phi(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 \sin\left(\omega \mathrm{E}g(x,y)\right) dxdy$$

справедлива наступна оцінка похибки наближення $\left|J(\omega) - \Phi(\omega)\right| \le \min\left(2; \frac{M\omega}{16}\Delta^2\right)$.

Теорема 2. *Нехай* $\left|g^{(1,0)}(x,y)\right| \le \widetilde{M},\ \left|g^{(0,1)}(x,y)\right| \le \widetilde{M},\ \left|g^{(1,1)}(x,y)\right| \le M$ *, тоді для кубатурної формули*

$$\widetilde{\Phi}(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 \sin\left(\omega \widetilde{\mathrm{E}}g(x,y)\right) dxdy$$

справедлива наступна оцінка похибки наближення $\left|J(\omega) - \widetilde{\Phi}(\omega)\right| \le \min\left(2; \frac{M\omega}{16}\Delta^2\right) + \min\left(4; \frac{\widetilde{M}\omega}{2}\Delta^2\right)$.

Доведення. Для кубатурної формули $\widetilde{\Phi}(\omega)$ справедлива наступна оцінка похибки наближення:

$$\left|J(\omega) - \widetilde{\Phi}(\omega)\right| = \left|J(\omega) - \Phi(\omega) + \Phi(\omega) - \widetilde{\Phi}(\omega)\right| \le \left|J(\omega) - \Phi(\omega)\right| + \left|\Phi(\omega) - \widetilde{\Phi}(\omega)\right|.$$

За теоремою 1 маємо: $\left|J(\omega) - \Phi(\omega)\right| \le \min\left(2; \frac{M\omega}{16}\Delta^2\right)$. Знайдемо оцінку для $\left|\Phi(\omega) - \widetilde{\Phi}(\omega)\right|$:

$$\left|\Phi(\omega) - \widetilde{\Phi}(\omega)\right| = \left|\int_0^1\int_0^1 \sin \mathrm{E}\,\omega g(x,y) dxdy - \int_0^1\int_0^1 \sin \widetilde{\mathrm{E}}\omega g(x,y) dxdy\right| \le \int_0^1\int_0^1 \left|\sin \mathrm{E}\,\omega g(x,y) - \sin \widetilde{\mathrm{E}}\omega g(x,y)\right| dxdy =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \left|2\cos\frac{\omega(\mathrm{E}\,g(x,y) + \widetilde{\mathrm{E}}g(x,y))}{2} \sin\frac{\omega(\mathrm{E}\,g(x,y) - \widetilde{\mathrm{E}}g(x,y))}{2}\right| dxdy \le$$

$$\le 2\int_0^1\int_0^1 \left|\sin\frac{\omega(\mathrm{E}\,g(x,y) - \widetilde{\mathrm{E}}g(x,y))}{2}\right| dxdy \le 2\int_0^1\int_0^1 \min\left(1; \frac{\omega\left|Eg(x,y) - \widetilde{\mathrm{E}}g(x,y)\right|}{2}\right) dxdy \le$$

$$\le 2\min\left(\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^2} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}} dxdy, \frac{\omega}{2}\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^2} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}} \left|g(x_k, \mathrm{y}) - g(x_k, \tilde{y}_{\tilde{j}})\right| dxdy\right) +$$

$$+2\min\left(\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^2}\sum_{j=1}^{\ell}\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}dxdy,\frac{\omega}{2}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^2}\sum_{j=1}^{\ell}\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\left|g(x,\mathrm{y}_j)-g(\tilde{x}_{\tilde{k}},y_j)\right|dxdy\right)\leq$$

$$\leq 2\min\left(\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^2}\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}}dxdy,\frac{\omega\widetilde{M}}{2}\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^2}\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}}\left|\mathrm{y}-\tilde{y}_{\tilde{j}}\right|dxdy\right)+$$

$$+2\min\left(\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^2}\sum_{j=1}^{\ell}\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}dxdy,\frac{\omega M}{2}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^2}\sum_{j=1}^{\ell}\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}\left|x-\tilde{x}_{\tilde{k}}\right|dxdy\right)=$$

$$=4\min\left(\ell\Delta\Delta_1^2\ell^2,\frac{\widetilde{M}\omega}{2}\ell\Delta\ell^2\frac{\Delta_1^2}{4}\right)=4\min\left(1;\frac{\widetilde{M}\omega}{8}\Delta^2\right)=\min\left(4;\frac{\widetilde{M}\omega}{2}\Delta^2\right).$$

Отже,

$$\left|J(\omega)-\widetilde{\Phi}(\omega)\right|\leq\min\left(2;\frac{M\omega}{16}\Delta^2\right)+\min\left(4;\frac{\widetilde{M}\omega}{2}\Delta^2\right).$$

Теорему 2 доведено.

Теорема 3. [17] *Нехай* $\left|g^{(1,0)}(x,y)\right|\leq\widetilde{M}$, $\left|g^{(0,1)}(x,y)\right|\leq\widetilde{M}$, $\left|g^{(1,1)}(x,y)\right|\leq M$ *, тоді для кубатурної формули*

$$\Phi_1(\omega)=\int_0^1\int_0^1\mathrm{E}(\sin\omega g(x,y))dxdy\,,$$

справедлива наступна оцінка похибки наближення:

$$\left|J(\omega)-\varPhi_1(\omega)\right|\leq\frac{\omega^2\widetilde{M}^2+M\omega}{16}\Delta^2\,.$$

Теорема 4. *Нехай* $\left|g^{(1,0)}(x,y)\right|\leq\widetilde{M}$, $\left|g^{(0,1)}(x,y)\right|\leq\widetilde{M}$, $\left|g^{(1,1)}(x,y)\right|\leq M$ *, тоді для кубатурної формули*

$$\widetilde{\Phi}_1(\omega)=\int_0^1\int_0^1\tilde{\mathrm{E}}\sin\left(\omega g(x,y)\right)dxdy$$

справедлива наступна оцінка похибки наближення:

$$\left|J(\omega)-\widetilde{\varPhi}_1(\omega)\right|\leq\frac{\omega^2\widetilde{M}^2+M\omega}{16}\Delta^2+2\omega\widetilde{M}\Delta^2=\frac{\omega^2\widetilde{M}^2+32\omega\widetilde{M}+M\omega}{16}\Delta^2.$$

Доведення. Для кубатурної формули $\widetilde{\Phi}(\omega)$ справедлива наступна оцінка похибки наближення:

$$\left|J(\omega)-\widetilde{\varPhi}_1(\omega)\right|=\left|J(\omega)-\Phi_1(\omega)+\Phi_1(\omega)-\widetilde{\varPhi}_1(\omega)\right|\leq\left|J(\omega)-\Phi_1(\omega)\right|+\left|\Phi_1(\omega)-\widetilde{\varPhi}_1(\omega)\right|.$$

За теоремою 3 маємо: $\left|J(\omega)-\varPhi_1(\omega)\right|\leq\frac{\omega^2\widetilde{M}^2+M\omega}{16}\Delta^2$. Знайдемо оцінку для $\left|\Phi_1(\omega)-\widetilde{\varPhi}_1(\omega)\right|$:

$$\left|\Phi_1(\omega)-\widetilde{\varPhi}_1(\omega)\right|=\left|\int_0^1\int_0^1\mathrm{E}\sin\omega g(x,y)dxdy-\int_0^1\int_0^1\tilde{\mathrm{E}}\sin\omega g(x,y)dxdy\right|\leq\int_0^1\int_0^1\left|\mathrm{E}\sin\omega g(x,y)-\tilde{\mathrm{E}}\sin\omega g(x,y)\right|dxdy\leq$$

$$\leq\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^2}\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}dx\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}}\left|\sin\omega\mathrm{g}(x_k,y\ )-\sin\omega\mathrm{g}(x_k,\tilde{y}_{\tilde{j}})\right|dy+\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^2}\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}}\left|\sin\omega\mathrm{g}(x,y_j)-\sin\omega\mathrm{g}(\tilde{x}_{\tilde{k}},y_j)\right|dx\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}dy\leq$$

$$\leq 2\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^2}\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}}dx\int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}}\left|\sin\frac{\omega(\mathrm{g}(x_k,y\ )-\mathrm{g}(x_k,\tilde{y}_{\tilde{j}}))}{2}\right|dy+2\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^2}\int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}}\left|\sin\frac{\omega\left(\mathrm{g}(x,y_j)-\mathrm{g}(\tilde{x}_{\tilde{k}},y_j)\right)}{2}\right|dx\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}dy\leq$$

$$\le 2\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^2}\int\limits_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} dx \int\limits_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}} \min\left(1;\frac{\omega\left|g(x_k,y)-g(x_k,\tilde{y}_{\tilde{j}})\right|}{2}\right)dy + 2\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^2}\int\limits_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}} \min\left(1;\frac{\omega\left|g(x,y_j)-g(\tilde{x}_{\tilde{k}},y_j))\right|}{2}\right)dx\int\limits_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy \le$$

$$\le 2\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^2}\ \Delta\omega\frac{\widetilde{M}}{2}\min\left(\int\limits_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}} dy,\ \int\limits_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}}\left|y-\tilde{y}_{\tilde{j}}\right|dy\right) + \ 2\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^2}\ \Delta\omega\frac{\widetilde{M}}{2}\min\left(\int\limits_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}} dx,\ \int\limits_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}}\left|x-\tilde{x}_{\tilde{k}}\right|dx\right) \le$$

$$\le 2\Delta\omega\widetilde{M}\ell\cdot\ell^2\min\left(\Delta_1,\Delta_1^2\right) = 2\omega\widetilde{M}\cdot\min\left(\Delta_1\cdot\ell^2,\Delta_1^2\cdot\ell^2\right) = 2\omega\widetilde{M}\cdot\min\left(1,\Delta_1\right) = 2\omega\widetilde{M}\cdot\min\left(1,\frac{1}{\ell^2}\right) = 2\omega\widetilde{M}\,\frac{1}{\ell^2} = 2\omega\widetilde{M}\Delta^2$$

Отже,

$$\left|J(\omega)-\widetilde{\Phi}_1(\omega)\right| \le \frac{\omega^2\widetilde{M}^2+M\omega}{16}\Delta^2 + 2\omega\widetilde{M}\Delta^2 = \frac{\omega^2\widetilde{M}^2+32\omega\widetilde{M}+M\omega}{16}\Delta^2.$$

Теорему 4 доведено.

На рис. 2 представлений загальний принцип побудови сітки вузлів, яка використовується в кубатурних формулах з операторами інтерлінації.

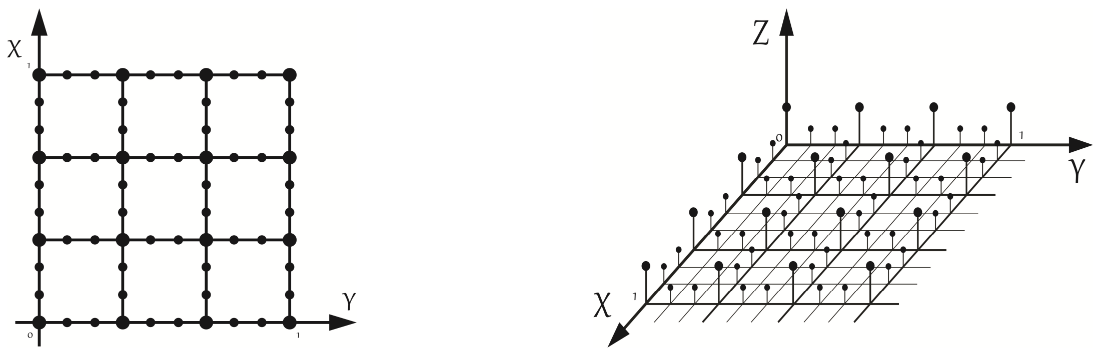

Рис. 2 – Загальний вигляд сітки вузлів для кубатурних формул з використанням операторів інтерлінації.

Зауваження. Кубатурні формули $\widetilde{\Phi}(\omega)$, $\widetilde{\Phi_1}(\omega)$ використовує в своїй побудові $Q=\ell\cdot\ell^2+\ell\cdot\ell^2-\ell^2 = 2\ell^3-\ell^2$ значень функції. Для досягнення такої ж точності за допомогою класичної формули необхідно використати $Q_{cl}=\ell^4$.

Розрахунковий експеримент. Наведемо результати тестування запропонованих кубатурних формул в системі комп'ютерної математики MathCad для функції $g(x,y)=xy$.

Таблиця 1 – Обчислення $J(\omega)$ за формулою $\Phi(\omega)$ для $g(x,y)=xy$

ℓ	ℓ^2	ω	$J(\omega)$	$\widetilde{\Phi}(\omega)$	$\left\|J(\omega)-\widetilde{\Phi}(\omega)\right\|$	$\min\left(2;\frac{M\omega}{16}\Delta^2\right)+\min\left(4;\frac{\widetilde{M}\omega}{2}\Delta^2\right)$
2	4	2π	0.387964587049788	0.402597065906184	0.014632478856396	0.883572933822129
4	16	2π	0.387964587049788	0.388810132654747	0.000845545604958	0.220893233455532
3	9	5π	0.211830279982917	0.229756957173057	0.01792667719014	0.98174770424681
4	16	5π	0.211830279982917	0.215554526302297	0.00372424631938	0.552233083638831

Таблиця 2 – Обчислення $J(\omega)$ за формулою $\widetilde{\Phi}_1(\omega)$ для $g(x,y)=xy$

ℓ	ℓ^2	ω	$J(\omega)$	$\widetilde{\Phi}_1(\omega)$	$\left\|J(\omega)-\widetilde{\Phi}_1(\omega)\right\|$	$\frac{\omega^2\widetilde{M}^2+32\omega\widetilde{M}+M\omega}{16}\Delta^2$
4	16	2π	0.387964587049788	0.387962123046569	0.001021811068292	0.96415442477064
7	49	5π	0.211830279982917	0.211881856959768	0.000327562848456	0.975896553405038
8	64	5π	0.211830279982917	0.21185540526974	0.000187065958211	0.747170798700732
10	100	5π	0.211830279982917	0.211838526140776	0.000074646030413	0.478189311168469

Перспективи подальших досліджень. В статті розглядаються кубатурні формули обчислення подвійних інтегралів від тригонометричних функцій з використанням інтерлінації у випадку, коли інформація про функцію задана її значеннями в точках. Отримано оцінку похибки наближення кубатурної формули на класі диференційовних функцій. Аналогічні результати можна отримати для наближеного обчислення інтегралів від тригонометричих функцій трьох змінних у випадку, коли інформація про функцію задається значеннями функції в точках на різних класах функцій.

Висновки. На класі диференційовних функцій отримано оцінку похибки наближеного обчислення інтегралів від тригонометричних функцій двох змінних у випадку, коли інформація задавалась значеннями функції в точках. Кубатурні формули використовують оператор інтерполянт, побудований на основі оператора-інтерлінанта з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталих сплайнів. Основною перевагою запропонованих кубатурних формул є використання меншої кількості значень функції порівняно з класичними формулами. Проведений розрахунковий експеримент в системі комп'ютерної математики Mathcad підтверджує теоретичний результат.

Список літератури

1. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Кубатурні формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з використанням сплайн-інтерлінації // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 1998. – № 1. – С. 23 – 28.
2. *Нечуйвітер О. П.* Кубатурна формула обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій $f(x,y)\in C^2_{2,L,L,M}$ з використанням інтерлінації // Сб. науч. труд. Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. Ин-т математики НАН Украины. – К., 1999. – С. 166 – 169.
3. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Оптимальна за порядком точності кубатурна формула обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій на основі сплайн-інтерлінації // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2006. – № 6. – С. 9 – 13.
4. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Про одну кубатурну формулу для обчислення $2D-$ коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2010. – № 3. – С. 24 – 29.
5. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* $2D-$ коефіцієнти Фур'є на класі диференційовних функцій та сплайн-інтерлінація // Таврический вестник информатики и математики. – 2011. – № 1. – С. 51 – 61.
6. *Lytvyn O. N., Nechuyviter O. P.* Methods in the multivariate digital signal processing with using spline-interlineation // Proceeding of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology (ASIT 2010) (June 15 – 18 2010). – Novosibirsk. – 2010. – P. 90 – 96.
7. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Наближене обчислення подвійних інтегралів від швидкоосциюючих функцій з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації // Штучний інтелект. – 2012. – № 2. – С. 17 – 23.
8. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Наближене обчислення подвійних інтегралів з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації // Таврійський вісник інформатики та математики. – 2012. – № 1. – С. 66 – 72.
9. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Наближене обчислення $3D-$ коефіцієнтів Фур'є на класі диференційовних функцій за допомогою сплайн-інтерфлетації // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2012. – № 3. – С. 45 – 50.
10. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Наближене обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій трьох змінних з використанням сплайн-інтерфлетації на класі диференційовних функцій // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2012. – № 8. – С. 36 – 41.
11. *Литвин О. Н., Нечуйвитер О. П.* Приближенное вычисление осциллирующих интегралов трех переменных с использованием интерфлетации функций // Вестник МГОУ. Сер. Физика-Математика. – 2013. – № 2. – С. 3 – 9.
12. *Литвин О. Н., Нечуйвитер О. П.* О погрешности численного интегрирования быстроосциллирующих функций трех переменных // Научные ведомости БЕЛГУ. Сер. : Математика. Физика. – 2013. – № 19 (162). – Вып. 32. – С. 101 – 107.
13. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Наближене обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій трьох змінних на класі диференційовних функцій // Штучний інтелект. – 2012. – № 1. – С. 37 – 48.
14. *Литвин О. Н., Нечуйвитер О. П.* Обоснование точности кубатурных формул для приближенного вычисления $3D-$ интегралов от быстроосциллирующих функций с использованием интерфлетации // Электронное моделирование. – 2012. – Т. 34. – № 5. – С. 206 – 217.
15. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.* Наближене обчислення $3D-$ коефіцієнтів Фур'є на класі Гельдера з використанням кусково–сталої сплайн-інтерфлетації // Математичні машини та системи. – 2012. – № 4. – С. 127 – 113.
16. *Литвин О. Н., Нечуйвитер О. П.* Приближенное вычисление интегралов от быстроосциллирующих функций трех переменных с использованием лагранжевой полиномиальной интерфлетации // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 3. – С. 97 – 106.
17. *Литвин О. М., Нечуйвітер О. П., Кейта К. В.* Обчислення $2D-$ інтегралів від тригонометричних функцій з використанням кусково-сталої інтерлінації // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія : Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. – Кам'янець–Подільський : Кам'янець–Подільський національний університет ім. Івана Огієнка, 2016. – Вип.13. – С. 124 – 131.
18. *Нечуйвітер О. П.* Обчислення потрійних інтегралів від тригонометричних функцій з використанням кусково-сталої інтерфлетації // Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут». Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2016. – № 6 (1188). – С. 67 – 71.

References (transliterated)

1. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Kubaturni formulu dlya obchyslennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy dvokh zminnykh z vykorystannyam splayn-interlinatsiyi [Cubature formulas for calculating Fourier coefficients of functions of two variables using spline-interlineation]. *Dop. NAN Ukrayini. Matematyka. Pryrodoznavstvo. Tekhnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 1998, no. 1, pp. 23–28.
2. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Kubaturna formula obchyslennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy $f(x,y)\in C^2_{2,L,L,M}$ z vykorystannyam interlinatsiyi [Cubature formula for the computation of Fourier coefficients of functions $f(x,y)\in C^2_{2,L,L,M}$ using interlineation]. *Sb. nauch. trud. Nelineynye kraevye zadachi matematicheskoy fiziki i ikh prilozheniya* [Nonlinear boundary value problems of mathematical physics and their applications]. Kyiv, In-t matematiki NAN Ukrainy Publ., 1999, pp. 166–169.
3. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Optymal'na za poryadkom tochnosti kubaturna formula obchyslennya podviynykh integraliv vid shvydkoostsilyuyuchykh funktsiy na osnovi splayn-interlinatsiyi [Optimal by the order of exactness cubature formula for computing double integrals from high oscillating functions based on spline-interlineation]. *Dop. NAN Ukrayiny. Matematyka. Pryrodoznavstvo. Tehnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2006, no. 6, pp. 9–13.

4. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Pro odnu kubaturnu formulu dlya obchyslennya $2D$ – koefitsientiv Fur'ye z vykorystannyam interlinatsiyi funktsiy [About one cubature formula to calculation of $2D$ Fourier coefficients with using interlineation of functions]. *Dop. NAN Ukrayiny. Matematyka. Pryrodoznavstvo. Tehnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2010, no. 3, pp. 24–29.

5. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. $2D$ – koefitsienty Fur'ye na klasi dyferentsiyovnykh funktsiy ta splayn-interlinatsiya [$2D$ – Fourier coefficients on the class of differentiable functions and spline-interlineation]. *Tavricheskiy vestnik informatiki i matematiki* [Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics]. 2011, no. 1, pp. 51–61.

6. Lytvyn O.M., Nechuiviter O. P. *Methods in the multivariate digital signal processing with using spline-interlineation*. Proceeding of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology (ASIT 2010) (June 15 – 18 2010). Novosibirsk. 2010, pp. 90 – 96.

7. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Nablyzhene obchyslennya podviynykh integraliv vid shvydkoostsylyuyuchykh funktsiy z vykorystannyam lagranzhevoyi polinomial'noyi interlinatsiyi [Approximate calculation of double integrals from high oscillating functions using polynomial Lagrange interlineation]. *Shtuchnyy intelekt* [Artificial Intelligence]. 2012, no. 2, pp. 17–23.

8. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Nablyzhene obchyslennya podviynykh integraliv z vykorystannyam lagranzhevoyi polinomial'noyi interlinatsiyi [Approximate calculation of double integrals using polynomial Lagrange interlineation]. *Tavriys'kiy visnyk informatyky ta matematyky* [Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics]. 2012, no. 1, pp. 66–72.

9. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Nablyzhene obchyslennya $3D$ – koefitsientiv Fur'ye na klasi dyferentsiyovnykh funktsiy za dopomogoyu splayn-interfletatsiyi [Approximate calculation of $3D$ – Fourier coefficients on the class of differentiable functions using spline-interflatation]. *Dop. NAN Ukrayiny. Matematyka. Pryrodoznavstvo. Tehnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2012, no. 3, pp. 45–50.

10. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Nablyzhene obchyslennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy tryiokh zminnykh z vykorystannyam splayn-interfletatsiyi na klasi dyferentsiyovnykh funktsiy [Approximate calculation of Fourier coefficients of functions of three variables using a spline-interflatation on the class of differentiable functions]. *Dop. NAN Ukrayiny. Matematyka. Pryrodoznavstvo. Tehnichni nauky* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2012, no. 8, pp. 36–41.

11. Litvin O. N., Nechuyviter O. P. Priblizhennoe vychislenie ostsilliruyuschikh integralov trekh peremennykh s ispol'zovaniem interfletatsii funktsiy [Approximate evaluation of oscillating integrals with three variables using interflatation of functions]. *Vestnik MGOU. Ser.: Fizika-Matematika* [Bulletin of the Moscow state regional University Series: physics and mathematics]. 2013, no. 2, pp. 3–9.

12. Litvin O. N., Nechuyviter O. P. O pogreshnosti chislennogo integrirovaniya bystroostsilliruyuschikh funktsiy trekh peremennykh [On the error of numerical integration of fast oscillating functions of three variables]. *Nauchnyie vedomosti BELGU. Ser.: Matematika. Fizika* [Scientific statements of the Belgorod state University. Series: mathematics and physics]. 2013, no. 19 (162), vol. 32, pp. 101–107.

13. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Nablyzhene obchyslennya koefitsientiv Fur'ye funktsiy tryiokh zminnykh na klasi dyferentsiyovnykh funktsiy [Approximate evaluation of Fourier coefficients of functions of three variables on the class of differentiable functions]. *Shtuchnyy intelekt* [Artificial Intelligence]. 2012, no. 1, pp. 37–48.

14. Litvin O. N., Nechuyviter O. P. Obosnovanie tochnosti kubaturnykh formul dlya priblizhenogo vychisleniya $3D$ – integralov ot bystroostsilliruyuschikh funktsiy s ispol'zovaniem interfletatsii [Justification of accuracy of cubature formula for computing $3D$ – integrals of fast oscillating functions using interflatation]. *Elektronnoe modelirovanie* [Electronic modeling]. 2012, vol. 34, no. 5, pp. 206–217.

15. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P. Nablyzhene obchyslennya $3D$ – koefitsientiv Fur'ye na klasi Geldera z vykorystannyam kuskovo–staloyi splayn-interfletatsiyi [Approximate calculation of $3D$ Fourier coefficients on the Gelder class of functions using piecewise spline-interflatation]. *Matematychni mashyny ta systemy* [Mathematical machines and systems]. 2012, no. 4, pp. 127–113.

16. Litvin O. N., Nechuyviter O. P. Priblizhennoe vychislenie integralov ot bystroostsilliruyuschikh funktsiy trekh peremennykh s ispol'zovaniem lagranzhevoy polinomial'noy interfletatsii [Approximate calculation of integrals of fast oscillating functions of three variables by using Lagrangian polynomial interflatation]. *Kibernetika i sistemnyy analiz* [Cybernetics and systems analysis]. 2014, no. 3, pp. 97–106.

17. Lytvyn O. M., Nechuyviter O. P., Keyta K. V. Obchyslennya $2D$ – integraliv vid trygonometrychnykh funktsiy z vykorystannyam kuskovo–staloyi interlinatsiyi [The calculation of $2D$ integrals trigonometric functions using piecewise spline-interlineation] *Matematychne ta komp"yuterne modelyuvannya. Seriya: Fizyko-matematychni nauky: zb. nauk. prats'* [Mathematical and computer modeling. Series: Physics and mathematics: Coll. Science. works]. Kam'yanets–Podilskiy, Kam'yanets'–Podil's'kyy natsional'nyy universitet im. Ivana Ogienka Publ., 2016. vol. 13, pp. 124–131.

18. Nechuyviter O. P. Obchyslennya potriynykh integraliv vid trygonometrychnykh funktsiy z vykorystannyam kuskovo–staloyi interfletatsii [Calculation of three-dimensional integral from trigonometric function using piece-wise spline-interlineation]. *Natsional'nyy tekhnichnyy universytet «Kharkivs'kyy politekhnichnyy instytut». Visnyk Natsional'nogo tekhnichnogo universytetu «KhPI». Seriya: Matematychne modeluvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute". Proceedings of the National Technical University "KPI". Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. 2016, no. 6 (1188), pp. 67–71.

Надійшла (received) 06.03.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Обчислення інтегралів від тригонометричних функцій двох змінних у випадку різних інформаційних операторів / О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер, К. В. Кейта // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 56 – 63. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.

Вычисление интегралов от тригонометрических функций двух переменных в случае различных информационных операторов / О. Н. Литвин, О. П. Нечуйвитер, К. В. Кейта // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 56 – 63. Библиогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.

Computing integrals of trigonometric functions of two variables using various information operators / O. M. Lytvyn, O. P. Nechuiviter, K. V. Keita // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 6 (1228). – pp. 56 – 63. Bibliog.: 8 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Литвин Олег Миколайович – доктор фізико-математичних наук, професор, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: academ_mail@ukr.net.

Литвин Олег Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: academ_mail@ukr.net.

Lytvyn Oleg Mykolayovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (057) 771-05-45; e-mail: academ_mail@ukr.net.

Нечуйвітер Олеся Петрівна – доктор фізико-математичних наук, доцент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: olesya@email.com.

Нечуйвитер Олеся Петровна – доктор физико-математических наук, доцент, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: olesya@email.com.

Nechuiviter Olesia Petrivna – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (057) 771-05-45; e-mail: olesya@email.com.

Кейта Катерина Володимирівна – аспірант, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: chervonakate@mail.ru.

Кейта Катерина Владимировна – аспирант, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: chervonakate@mail.ru.

Keita Kateryna Volodymyrivna – PhD student, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (057) 771-05-45; e-mail: chervonakate@mail.ru.

UDC 519.25

T. O. MARYNYCH, L. D. NAZARENKO, N. H. KHOMENKO

COMPARATIVE ANALYSIS OF UNIVARIATE TIME SERIES MODELING AND FORECASTING TECHNIQUES FOR SHORT-TERM UNSTABLE DATA

Проведено емпіричне оцінювання адекватності та прогнозної точності класичних лінійних моделей авторегресії та ковзного середнього, моделей експоненційного згладжування, структурних, нелінійних та непараметричних моделей для одновимірних часових рядів невеликої вибірки з чисельними відхиленнями. Запропоновано метод покращення якості ARMA моделі за рахунок включення фіктивних та пояснювальних змінних, які відтворюють інформацію щодо рідких і аномальних спостережень ряду, та відповідної корекції порядку інтегрування.

Ключові слова: часовий ряд, декомпозиція, прогноз, аномальні відхилення, модель авто регресії та ковзного середнього, експоненційне згладжування.

Проведено эмпирическое оценивание адекватности и прогнозной точности классических линейных моделей авторегрессии и скользящего среднего, моделей экспоненциального сглаживания, структурных, нелинейных и непараметрических моделей для одномерных временных рядов небольшой выборки с многочисленными отклонениями. Предложен метод улучшения качества ARMA модели за счет включения фиктивных и объясняющих переменных, отражающих информацию о редких и аномальных наблюдениях ряда, а также коррекции соответствующего порядка интегрирования модели.

Ключевые слова: временной ряд, декомпозиция, прогноз, аномальные отклонения, модель авторегрессии и скользящего среднего, экспоненциальное сглаживание.

The article summarizes the international experience in univariate time series modeling approaches and methodology. It aims to make empirical assessment of their relevance and forecasting power for short sample volatile data with numerous aberrant observations and structural breaks with the help of the time series R packages. The findings revealed the pitfalls of outliers' neglection including stationarity and model misspecification, biased parameter estimates, deterioration of residuals' properties and prediction accuracy of the models. Empirical research demonstrated the outperformance of the outlier detection methods versus robust approaches that use smaller weights for aberrant observations. We tested a method of improving the forecasting power of the ARMA models by proper identification of hidden patterns and incorporation of additional information about extraordinary events into the model. We also considered frequency domain and nonparametric methods including exponential smoothing, seasonal and trend-cycle decomposition, structural and neural networks models to make comparative forecasting diagnostics. The findings showed slightly worse accuracy of the exponential smoothing and structural state-space models for short prediction horizons and their outperformance for longer forecasting periods. Neural networks showed outstanding in-sample approximation but poor out-of-sample quality. We recommend further studying of the Bayesian regime switching models that have proven to be a comprehensive way to explore hidden patterns in data, as well as dynamic factor multivariate models that can improve explanatory and forecasting power of the time series models in various applications.

Key words: time series, decomposition, forecast, outlier, autoregressive and moving average model (ARMA), exponential smoothing.

Introduction. In the few last decades, a considerable progress was achieved in the time series analysis providing innovative theoretical and methodological tools for time series decomposition, causal inference and prediction. Advances in computer technologies, accumulation of big data sets, and increased availability of the real-time high-frequency data, induced a wide use of numerical and simulation methods, and big interest to nonlinear nonparametric techniques, developing solutions to handle various data, parameter and model uncertainties. Rapid evolution of economic environment and technologies challenged production of the machine learning methods that could be adapted to different applications and objectives. One of the fast-developing fields is financial and macroeconomic time series econometrics which methodology is intensely used in other disciplines. Its biggest issue is a choice of the optimal statistical tools and approaches to model short sample volatile data with numerous outliers and structural breaks. It has been a real challenge for time series analysis in transforming countries where accumulated data sets are small and sometimes misleading.