

## Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

**Підвищення надійності експлуатації живильних насосів паротурбінних установок теплових та атомних електростанцій / М. М. Нечуйвітер** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 81 – 86. Бібліогр.: 12 назв. – ISSN 2222-0631.

**Повышение надёжности эксплуатации питательных насосов паротурбинных установок тепловых и атомных электростанций / М. М. Нечуйвітер** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 81 – 86. Бібліогр.: 12 назв. – ISSN 2222-0631.

**Improving exploitation reliability of feed pumps of steam turbine installations of thermal and nuclear power plants / М. М. Nechuiviter** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 6 (1228). – pp. 81 – 86. Bibliogr.: 12 titles. – ISSN 2222-0631.

## Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Нечуйвітер Марія Михайлівна** – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 733-78-03; e-mail: nmmaria1947@gmail.com.

**Нечуйвітер Мария Михайловна** – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (057) 733-78-03; e-mail: nmmaria1947@gmail.com.

**Nechuiviter Maria Michailivna** – Candidate of Engineering Sciences, Senior Researcher, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (057) 733-78-03; e-mail: nmmaria1947@gmail.com.

УДК 519.6

**В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСЬКИЙ****КОЛИВАННЯ КУБІЧНО НЕЛІНІЙНОГО ОСЦИЛЯТОРА, СПРИЧИНЕНІ ІМПУЛЬСНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ**

Розглянуто рух нелінійного осцилятора з кубічною характеристикою пружності, спричинений миттєво прикладеною сталою силою або прямокутним силовим імпульсом скінченної тривалості. Побудовано два варіанти аналітичного розв'язку нелінійного диференціального рівняння другого порядку. У першому варіанті переміщення осцилятора у часі виражено через еліптичний косинус, а в другому для розрахунку переміщення задіяно Атеб-синус. З метою спрощення розрахунків, запропоновано компактні апроксимації, які з похибкою до одного відсотка виражають Атеб-синус через елементарні функції. Встановлено, що коефіцієнт динамічності системи при дії миттєво прикладеної сили дорівнює  $\sqrt[3]{4} < 2$ . У випадку навантаження осцилятора прямокутним імпульсом коефіцієнт динамічності залежить від тривалості дії імпульса і теж залишається меншим двох. Знайдено тривалість імпульса, коли буде максимальна амплітуда вільних коливань, спричинених імпульсом. Вона залежить не лише від власних параметрів осцилятора, а й від величини прикладеної сили, чого немає в лінійних системах. Наведено приклади розрахунків та відповідні графіки.

**Ключові слова:** осцилятор, кубічна характеристика пружності, дія силового імпульса, аналітичний розв'язок, еліптичний косинус, Атеб-синус.

Рассмотрено движение нелинейного осциллятора с кубической характеристикой упругости, вызванные мгновенно приложенной постоянной силой или прямоугольным силовым импульсом конечной протяженности. Построено два варианта аналитического решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка. В первом варианте перемещения осциллятора во времени выражено через эллиптический косинус, а во втором для расчета перемещения задействовано Атеб-синус. С целью упрощения расчетов, предложено компактные аппроксимации, которые с погрешностью менее одного процента выражают Атеб-синус через элементарные функции. Установлено, что коэффициент динамичности системы при действии мгновенно приложенной силы равен  $\sqrt[3]{4} < 2$ . В случае нагружения осциллятора прямоугольным импульсом, коэффициент динамичности зависит от продолжительности действия нагрузки и также остается меньшим двух. Найдена продолжительность импульса, когда будет максимальной амплитуда свободных колебаний, вызванных импульсом. Она зависит не только от собственных параметров осциллятора, но и от величины приложенной силы, чего нет в линейных системах. Приведено примеры расчетов и соответствующие графики.

**Ключевые слова:** осциллятор, кубическая характеристика упругости, действие силового импульса, аналитическое решение, эллиптический косинус, Атеб-синус.

The motion of a nonlinear oscillator with a cubic elasticity characteristic caused by an instantaneously applied constant force or a rectangular force pulse of finite length is considered. Two variants of the analytical solution of a second-order nonlinear differential equation are constructed. In the first variant, the oscillator movement in time is expressed through an elliptical cosine, and in the second one, the Атеб-sine is used to calculate the displacement. In order to simplify the calculations, we introduce compact approximations which, with an error of less than one percent, express the Атеб-sine through elementary functions. It is established that the coefficient of dynamism of the system under the action of the instantaneously applied force is  $\sqrt[3]{4} < 2$ . In the case of an oscillator loaded with a rectangular pulse, the coefficient of dynamism depends on the duration of the load and also remains smaller than two. The pulse duration causing the maximum amplitude of free oscillations is found. It depends not only on the proper parameters of the oscillator, but also on the magnitude of the applied force, which is not the case with the linear systems. Examples of calculations and corresponding graphs are given.

**Key words:** oscillator, cubic characteristic of elasticity, action of force pulse, analytical solution, elliptic cosine, Атеб-sine.

**Вступ.** Дослідження особливостей нелінійних механічних коливань з великими амплітудами відноситься до актуальних науково-прикладних задач, бо такі коливання можуть призвести до руйнування конструкції або передчасної втрати її працездатності. Тому, незважаючи на тривалу історію та значні досягнення в цій галузі механіки [1], продовжують активно проводитись подальші дослідження нелінійних коливань. Так за останнє десятиріччя, крім багатьох наукових статей, вийшли монографічні видання [2–5]. Огляд робіт, які стосуються коливань нелінійних систем змінної маси зроблено в [6]. Коливання систем змінної маси за наявності сухого тертя, розглядали також в [7, 8]. У більшості відомих публікацій досліджували нелінійні коливання, збудені силовими періодичними навантаженнями. Значно менше вивчені нелінійні коливання, спричинені короткочасними імпульсами типу ударних навантажень. Саме цим і зумовлена мета роботи.

Метою даної статті є виведення та апробація розрахункових формул для обчислення переміщень кубічно нелінійного осцилятора при дії силового імпульса.

Ставиться задача побудови аналітичних розв'язків задачі Коші в спеціальних функціях та використання їх для аналізу впливу різних чинників на особливості руху осцилятора.

При побудові розв'язків спочатку розглянемо рух, спричинений миттєво прикладеною силою сталої величини (ступінчасте навантаження), а потім розглянемо більш складну задачу руху при дії силового імпульса скінченної тривалості.

**Колівання при ступінчастому навантаженні.** Їх описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + cx^3 = PH(t), \quad (1)$$

де  $m$  – маса осцилятора;  $c > 0$  – характеристика його нелінійної пружності;  $P$  – величина миттєво прикладеної сили;  $H(t)$  – одинична функція Хевісайда;  $t$  – час.

Початковими умовами до (1) приймаємо:

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0. \quad (2)$$

Уведенням позначень  $\dot{x} = v$ ;  $\ddot{x} = v \frac{dv}{dx}$  рівняння (1) зводимо до такого:

$$v \frac{dv}{dx} = \frac{1}{m}(P - cx^3).$$

Його інтегралом є:

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{c}{2m}} \sqrt{x \left( \frac{4P}{c} - x^3 \right)}. \quad (3)$$

При визначенні сталої інтегрування в (3) скористалися умовами (2).

Подальше інтегрування виразу (3), з урахуванням (2), дає:

$$\sqrt{\frac{c}{2m}} t = \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{y(a^3 - y^3)}}. \quad (4)$$

Тут  $a = \sqrt[3]{\frac{4P}{c}} = \sqrt[3]{4} x_{CT}$ , де  $x_{CT} = \sqrt[3]{\frac{P}{c}}$  – переміщення осцилятора при статичному навантаженні силою  $P$ .

Із (3) випливає, що  $v = 0$  при  $x = a$ , тобто  $a$  – це максимальне динамічне відхилення осцилятора від положення  $x = 0$ . Тому коефіцієнт динамічності становить:

$$K_g = \frac{\max(x)}{x_{CT}} = \frac{a}{x_{CT}} = \sqrt[3]{4} < 2.$$

Переходом до нової змінної інтегрування  $y = u^2$ ,  $dy = 2u du$ , замість (4), одержуємо вираз:

$$\int_0^{\sqrt{x/a}} \frac{du}{\sqrt{1-u^6}} = \omega t, \quad (5)$$

у якому  $\omega = a\sqrt{c/(8m)}$ .

Співвідношення (5) дає можливість знайти час, коли досягається максимальне відхилення від початкового положення. Поклавши в (5)  $x = a$ ,  $t = t_*$ , маємо:

$$\omega t_* = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^6}} = I.$$

Цей інтеграл виражається через гамма-функцію [9, с. 53]:  $I = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(7/6)}{\Gamma(2/3)} \approx 1,21433$ .

Отже,

$$\omega t_* \approx 1,21433.$$

Підкреслимо, що час  $t_*$  залежить від значення  $a$ , яке в свою чергу залежить від  $P$ . Збільшення сили  $P$  приводить до зменшення  $t_*$ .

Із довідника [10, с. 133] відомо, що коли:

$$\int_z^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^6}} = \zeta, \tag{6}$$

то  $\zeta = \frac{1}{2\sqrt[4]{3}} F(\varphi, \sin 15^\circ)$ .

Тут  $F(\varphi, \sin 15^\circ)$  – неповний еліптичний інтеграл першого роду, а  $\varphi = \arccos \frac{(\sqrt{3}+1)z^2 - 1}{(\sqrt{3}-1)z^2 + 1}$ .

Розв'язавши цю залежність відносно  $z^2$ , одержуємо:

$$z^2 = \frac{1 + \cos \varphi}{(\sqrt{3} + 1) - (\sqrt{3} - 1) \cos \varphi}, \tag{7}$$

причому  $\cos \varphi = cn(2\sqrt[4]{3}\zeta, \sin 15^\circ)$  – еліптичний косинус Якобі [9].

Щоб далі використати (7), проведемо наступне перетворення в (6):

$$\omega t = \int_0^{\sqrt{x/a}} \frac{du}{\sqrt{1-u^6}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^6}} - \int_{\sqrt{x/a}}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^6}} = I - \int_{\sqrt{x/a}}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^6}}.$$

Звідки випливає, що:

$$\int_{\sqrt{x/a}}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^6}} = I - \omega t. \tag{8}$$

Вирази (6) і (8) співпадають, коли  $\sqrt{x/a} = z$ ;  $I - \omega t = \zeta$ .

Тому, враховуючи парність еліптичного косинуса, одержуємо формулу переміщень осцилятора на проміжку  $t \in [0; 2t_*]$ :

$$\frac{x}{a} = \frac{1 + cn(2\sqrt[4]{3}|I - \omega t|, \sin 15^\circ)}{\sqrt{3} + 1 - (\sqrt{3} - 1) cn(2\sqrt[4]{3}|I - \omega t|, \sin 15^\circ)}. \tag{9}$$

Зазначимо, що в [9, с. 101] таблиця неповного еліптичного інтеграла першого роду охоплює лише проміжок  $\varphi \in [0; 90^\circ]$ . Тому, щоб використати її для обчислення значень еліптичного косинуса в формулі (9), слід урахувати, що:

$$cn(2\sqrt[4]{3}|I - \omega t|, \sin 15^\circ) = \begin{cases} -cn(2\sqrt[4]{3}\omega t, \sin 15^\circ), & 0 \leq \omega t < 0,5I; \\ cn(2\sqrt[4]{3}|I - \omega t|, \sin 15^\circ), & 0,5I \leq \omega t \leq 1,5I; \\ -cn[2\sqrt[4]{3}(2I - \omega t), \sin 15^\circ], & 1,5I \leq \omega t \leq 2I. \end{cases} \tag{10}$$

Крім формул (9) і (10), для розрахунку руху осцилятора можна використовувати і більш сучасну форму розв'язку розглянутої задачі Коші, в якій  $x(t)$  виражається через Атеб-синус  $Sa(5,1,3\omega t)$ .

У відповідності з публікаціями [5, 11, 12] та виразом (5), маємо:

$$\frac{x}{a} = Sa^2(5,1,3\omega t). \tag{11}$$

Якщо прийнято до уваги, що:

$$Sa[5,1,3(2I - \omega t)] = Sa(5,1,3\omega t),$$

то формулу (11) можна задіяти і на проміжку  $t \in [0, 2t_*]$ , що охоплює перший цикл коливань.

Для спрощення використання формули (11), наводимо апроксимацію Атеб-синуса, яка з похибкою меншою 1% виражає його значення через елементарні функції:

$$Sa(5,1,3\eta) = \begin{cases} \eta, & 0 \leq \eta < 0,5; \\ 0,5 + 1,0225(\eta - 0,5) - 0,2625(\eta - 0,5)^2, & 0,5 \leq \eta \leq 0,9; \\ 1 - 0,4 \sin^2[1,9365(I - \eta)], & 0,9 < \eta \leq I. \end{cases} \tag{12}$$

Якщо  $I \leq \eta \leq 2I$ , то треба врахувати, що

$$Sa(5,1,3\eta) = Sa[5,1,3(2I - \eta)].$$

З метою перевірки адекватності виведених розрахункових формул, розглянемо приклади розрахунків.

**Приклад 1.** Обчислимо  $x/a$ , коли  $\omega t = 0,7 > 0,5I$ . Для нього  $2\sqrt[4]{3}|I - \omega t| \approx 1,3538$  і в таблиці [9, с. 101] йому відповідає  $\varphi \approx 76,47^\circ$ . Тому  $cn(2\sqrt[4]{3}|I - \omega t|, \sin 15^\circ) = \cos \varphi \approx 0,234$ . Підстановка цього значення еліптичного косинуса в (9) дає  $x/a \approx 0,482$ . Якщо проводити розрахунок з використанням (11) і (12), то теж одержимо  $x/a \approx 0,482$ .

**Приклад 2.** Знайдемо двома способами  $x/a$ , коли  $\omega t = 2,1 > 1,5I$ . Для нього  $2\sqrt[4]{3}|2I - \omega t| \approx 0,8651$ . В таблиці еліптичного інтеграла йому відповідає  $\varphi \approx 49,208^\circ$ . Отже,

$$cn(2\sqrt[4]{3}|I - \omega t|, \sin 15^\circ) = -\cos \varphi \approx -0,653$$

і по формулі (9) одержуємо  $x/a \approx 0,108$ . Розрахунок з використанням (11) і (12) дає:  $\eta = 2I - \omega t \approx 0,3287$ ;  $Sa(5,1,3\eta) \approx 0,329$ ;  $x/a \approx 0,108$ . Другим способом одержали попередній результат без використання таблиць.

Формули (9), (11) приводять до графіка, який зображено на рис. 1.

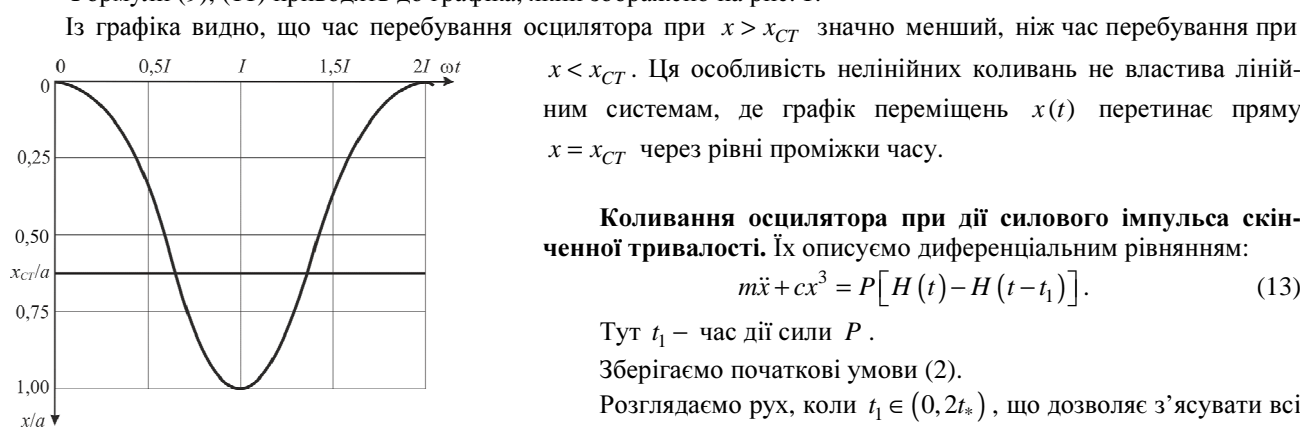


Рис. 1 – Переміщення осцилятора, спричинені миттєво прикладеною сталою силою.

$x < x_{CT}$ . Ця особливість нелінійних коливань не властива лінійним системам, де графік перемішень  $x(t)$  перетинає пряму  $x = x_{CT}$  через рівні проміжки часу.

**Коливання осцилятора при дії силового імпульса скінченної тривалості.** Їх описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + cx^3 = P[H(t) - H(t - t_1)]. \quad (13)$$

Тут  $t_1$  – час дії сили  $P$ .

Зберігаємо початкові умови (2).

Розглядаємо рух, коли  $t_1 \in (0, 2t_*)$ , що дозволяє з'ясувати всі особливості коливань.

Прийнявши в (9) і (11)  $t = t_1$ , знаходимо переміщення осцилятора  $x_1 = x(t_1)$  в момент припинення дії прикладеної сили:

$$\frac{x_1}{a} = \frac{1 + cn(2\sqrt[4]{3}|I - \omega t_1|, \sin 15^\circ)}{\sqrt{3} + 1 - (\sqrt{3} - 1) cn(2\sqrt[4]{3}|I - \omega t_1|, \sin 15^\circ)} \quad (14)$$

або

$$\frac{x_1}{a} = Sa^2(5,1,3\omega t_1). \quad (15)$$

Швидкість руху осцилятора в цей момент часу становить:

$$v_1 = v(t_1) = \sqrt{\frac{c}{2m}} \sqrt{x_1(a^3 - x_1^3)}.$$

При  $t \geq t_1$ , рівняння руху (13) буде однорідним і треба розв'язати наступну задачу Коші:

$$m\ddot{x} + cx^3 = 0, \quad (16)$$

$$x(t_1) = x_1, \quad v(t_1) = \dot{x}(t_1) = v_1. \quad (17)$$

Переходом від похідної по  $t$  до похідної по  $x$ , рівнянню (16) надаємо форму:

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{c}{m} x^3. \quad (18)$$

Проінтегрувавши (18), з урахуванням (17), отримуємо:

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{c}{2m}} \sqrt{a_*^4 - x^4}. \quad (19)$$

Тут  $a_* = \lambda a$ ;  $\lambda = \sqrt[4]{x_1/a}$ .

Далі розрізняємо два випадки значень  $t_1$ . У першому приймаємо  $t_1 \in (0, t_*)$ . Враховуючи, що для вказаних

$t_1, v > 0$ , проводимо подальше інтегрування виразу (19). Це дає:

$$\int_{x_1}^x \frac{dy}{\sqrt{a_*^4 - y^4}} = \sqrt{\frac{c}{2m}} (t - t_1),$$

що після заміни  $y = a_*u$ ,  $dy = a_*du$  приймає вигляд:

$$\int_{x_1/a_*}^{x/a_*} \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = \omega_* (t - t_1). \tag{20}$$

Тут  $\omega_* = a_* \sqrt{c/(2m)} = 2\lambda\omega$ .

Використовуючи (20), можна знайти час  $t = t_2$ , коли зупиниться осцилятор, відхилившись на  $a_*$  від положення  $x = 0$ . Так, задавши в (20),  $x = a_*$ ,  $t = t_2$ , отримуємо:

$$\omega_* (t_2 - t_1) = \int_{x_1/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = I_*.$$

Звідки випливає, що:

$$\omega_* t_2 = I_* + \omega_* t_1 \text{ або } \frac{t_2}{t_1} = \frac{I_*}{2\lambda\omega t_1} + 1. \tag{21}$$

Значення  $I_*$  можна знаходити за допомогою таблиці *неповного еліптичного інтеграла першого роду*, бо в [9, с. 102]:

$$I_* = \frac{1}{\sqrt{2}} F(\psi_*, \sin 45^\circ).$$

причому  $\psi_* = \arccos(x_1/a_*)$ .

Щоб вивести залежність  $x(t)$ , при  $t \in [t_1; t_2]$ , виразу (20) надаємо форму:

$$\int_{x_1/a_*}^{x/a_*} \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = \int_{x_1/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} - \int_{x/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = I_* - \int_{x/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = \omega_* (t - t_1).$$

Тому,

$$\int_{x/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = I_* - \omega_* (t - t_1) = \tau \tag{22}$$

і, згідно з [10, с. 126], при  $t \in [t_1; t_2]$ :

$$\frac{x}{a} = \lambda \cdot cn(\sqrt{2}\tau, \sin 45^\circ). \tag{23}$$

Отже, переміщення осцилятора, на вказаному проміжку часу, теж виражається через еліптичний косинус, який зручно обчислювати за допомогою інтерполяції табличних даних в [9].

Для розрахунку переміщень можна також використовувати періодичні Атеб-функції [5, 11, 12]. Із (22) випливає, що:

$$\frac{x}{a} = \lambda \cdot Sa[3, 1, 2(J - \tau)], \tag{24}$$

де  $J = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = \sqrt[4]{4} \frac{\Gamma^2(5/4)}{\Gamma(3/2)} \approx 1,311029$

Значення Атеб-сінуса в (24), з похибкою меншою 1 % надає апроксимация:

$$Sa(3, 1, 2\eta) = \begin{cases} \eta, & 0 \leq \eta < 0,4; \\ 0,399 + 1,005(\eta - 0,4) - 0,2(\eta - 0,4)^2, & 0,4 \leq \eta \leq 0,8; \\ 1 - 0,6667 \sin^2[1,2247(J - \eta)], & 0,8 < \eta \leq J. \end{cases} \tag{25}$$

Якщо  $J \leq \eta \leq 2J$ , то  $Sa(3, 1, 2\eta) = Sa[3, 1, 2(2J - \eta)]$  і залишається в силі апроксимация (25).

Для перевірки вірогідності виведених формул проведемо числові розрахунки.

**Приклад 3.** Обчислимо максимальне відхилення  $a_*$  осцилятора і час його досягнення  $t_2$  при дії імпульса, у якого  $\omega t_1 = 0,8$ ;  $2\sqrt[4]{3}|I - \omega t_1| \approx 1,0906$ . У табл.іці [9, с. 101] цим числовим даним відповідає  $\varphi \approx 61,833^\circ$ . Тоді,

$$\operatorname{cn}\left(2\sqrt[4]{3}|I-\omega t|, \sin 15^\circ\right) = \cos \varphi \approx 0,472$$

і по формулі (14) одержуємо  $x_1/a \approx 0,617$ . Якщо проводити розрахунок по формулах (12), (15), то  $\eta = 0,8$ ;  $Sa(5,1,3\eta) \approx 0,783$ ;  $x_1/a \approx 0,613$ , що не суттєво відрізняється від попереднього результату, для якого:

$$\lambda = \sqrt[4]{0,617} \approx 0,886; x_1/a_* = x_1/(\lambda a) \approx 0,696; \psi_* \approx 45,862^\circ.$$

Методом лінійної інтерполяції табличних даних [9, с. 102], знаходимо, що:  $F(\psi_*, \sin 45^\circ) \approx 0,843$ ;  $I_* \approx 0,596$ . Тоді, згідно з (21),  $\omega t_2 = I_*/(2\lambda) + \omega t_1 \approx 1,136$ , тобто  $t_2/t_1 \approx 1,420$ . Знайдемо далі двома способами  $x/a$ , коли  $\omega t = 0,9$ . В цей момент часу  $\tau = I - 2\lambda\omega(t-t_1) \approx 0,419$ ;  $\sqrt{2}\tau \approx 0,592$ . Для цього значення в таблиці [9, с. 102]:  $\varphi \approx 33,0^\circ$ . Тому  $\operatorname{cn}(\sqrt{2}\tau, \sin 45^\circ) = \cos \varphi \approx 0,839$  і по формулі (23) одержуємо  $x/a \approx 0,743$ . Якщо проводити обчислення по формулах (24), (25), то  $\eta = J - \tau \approx 0,892$ ;  $Sa(3,1,2\eta) \approx 0,839$ ;  $x/a \approx 0,743$ . Як бачимо, результати розрахунків переміщення осцилятора двома способами співпадають до трьох цифр після коми.

Подальший рух осцилятора при  $t > t_1$  зводиться до вільних коливань його з амплітудою  $amx = a_*$  відносно положення  $x = 0$ . Важливо, що при цьому амплітуда  $a_*$  залежить від тривалості прикладеного імпульсу. Вона найбільша, коли  $t_1 = t_*$  і становить  $a_* = a = \sqrt[3]{4P/c}$ . Тому, при тривалості  $t_1 = t_*$ , відбувається найбільше розгойдування коливань.

Перейдемо до другого випадку дії імпульсу, коли  $t_1 \in [t_*, 2t_*]$  і  $v \leq 0$ . Взявши знак мінус перед радикалом в (19), після інтегрування цього виразу, отримуємо:

$$-\int_{x_1}^x \frac{dy}{\sqrt{a_*^4 - y^4}} = \sqrt{\frac{c}{2m}}(t-t_1).$$

Заміною  $y = a_*u$ ,  $dy = a_*du$  йому надаємо наступний вигляд:

$$\int_{x/a_*}^{x_1/a_*} \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = \omega_*(t-t_1). \quad (26)$$

Тут  $0 \leq x \leq x_1$ .

Поклавши в (26)  $t = t_2$ ,  $x = 0$ , знаходимо час  $t_2$ , коли осцилятор повертається у вихідне положення, яке він мав при  $t = 0$ . При цьому маємо рівняння:

$$\omega_*(t_2 - t_1) = \int_0^{x_1/a_*} \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} - \int_{x_1/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = J - I_*.$$

Із нього випливає, що:

$$\omega_* t_2 = J - I_* + \omega_* t_1 \text{ або } \omega t_2 = \frac{1}{2\lambda}(J - I_*) + \omega t_1. \quad (27)$$

Щоб вивести залежність  $x(t)$  на проміжку  $t \in [t_1; t_2]$  проведемо наступне перетворення в (26):

$$\omega_*(t-t_1) = \int_{x/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} - \int_{x_1/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = \int_{x/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} - I_*.$$

Звідси отримуємо:

$$\int_{x/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = I_* + 2\omega\lambda(t-t_1) = \xi. \quad (28)$$

Тому, згідно з [10, с. 126]:

$$\frac{x}{a} = \lambda \cdot \operatorname{cn}(\sqrt{2}\xi, \sin 45^\circ). \quad (29)$$

Якщо виразити розв'язок через періодичні Атеб-функції, то у відповідності з (28):

$$\frac{x}{a} = \lambda \cdot Sa[3, 1, 2(J - \xi)]. \quad (30)$$

Тоді, для обчислень переміщень осцилятора, замість таблиці неповного еліптичного інтеграла першого роду, зручно використовувати апроксимацію (25).

Формули (29) і (30) дають можливість обчислювати переміщення, які попадають в проміжок  $x \in [0; x_1]$ .

**Приклад 4.** Обчислимо час повернення осцилятора у вихідне положення  $x = 0$ , коли  $\omega t_1 = 2 > 1,5I$ . Для нього знаходимо, що:  $2\sqrt[4]{3}|2I - \omega t_1| \approx 1,1283$  і в таблиці [9, с. 101] йому відповідає  $\varphi \approx 63,933^\circ$ ,  $\cos \varphi \approx 0,439$ . Отже,  $cn(2\sqrt[4]{3}|I - \omega t|, \sin 15^\circ) = -\cos \varphi \approx -0,439$ . Подальший розрахунок по формулі (14) дає  $x_1/a \approx 0,184$ . Другий варіант розрахунку по формулах (12), (15) приводить до наступних результатів:

$$\eta = 2I - \omega t_1 \approx 0,4287; Sa(5,1,3\eta) \approx 0,4287; x_1/a \approx 0,184.$$

Як бачимо, обидва способи розрахунку дають однакові наближені значення  $x_1/a$ . Використовуючи обчислене відношення  $x_1/a$ , маємо:

$$\lambda = \sqrt[4]{x_1/a} \approx 0,655; a_* = \lambda a \approx 0,655a; x_1/a_* = (x_1/a)/\lambda \approx 0,281; \psi_* \approx 73,680^\circ.$$

По таблиці [9, с. 102] знаходимо, що  $F(\psi_*, \sin 45^\circ) \approx 1,456$ ;  $I_* \approx 1,030$  і, згідно з (27),  $\omega t_2 \approx 2,214$ . В цей момент часу  $x = 0$ , тобто осцилятор повернеться у вихідне положення. З'ясуємо далі яким було  $x/a$ , коли  $\omega t = 2,1$ . Йому відповідає:  $\xi = 1,161$ ;  $\sqrt{2}\xi \approx 1,642$ . По таблиці [9, с. 102] знаходимо, що  $\varphi \approx 81,375^\circ$ . Тоді  $cn(\sqrt{2}\xi, \sin 45^\circ) = \cos \varphi \approx 0,150$  і за формулою (29) одержуємо  $x/a \approx 0,098$ . Додатковий розрахунок за формулами (25) і (30) дає:

$$\eta = J - \xi \approx 0,150; Sa(3,1,2\eta) \approx 0,150; x/a \approx 0,089,$$

що співпадає з попереднім наближеним результатом.

Після повернення осцилятора у вихідне положення, подальший його рух – це вільні коливання відносно положення  $x = 0$ , спричинені початковою швидкістю:

$$v_0 = -\sqrt{\frac{c}{2m}} a_*^2 = -\sqrt{\frac{c}{2m}} \lambda^2 a^2 = -\sqrt{\frac{c}{2m}} a^2 \sqrt{\frac{x_1}{a}}.$$

Якщо  $\omega t_1 = 2I$ , то згідно з (14) або (15), відношення  $x_1/a = 0$ . Тому, при такій тривалості імпульсу швидкість  $v_0 = 0$  і повернувшись у вихідне положення, осцилятор повністю припинить свій рух, тобто вільних коливань не буде.

Як бачимо, тривалість імпульсу суттєво впливає на коефіцієнт динамічності  $K_g = x_{\max}/x_{CT}$  і на амплітуди вільних коливань, після припинення дії імпульсу.

На рис. 2 показана залежність  $K_g$  від тривалості імпульсу.

Коефіцієнт  $K_g$  зростає на проміжку  $\omega t_1 \in [0; I]$ , а при  $\omega t_1 > I$  приймає сталі значення  $K_g = \sqrt[3]{4} \approx 1,587$ .

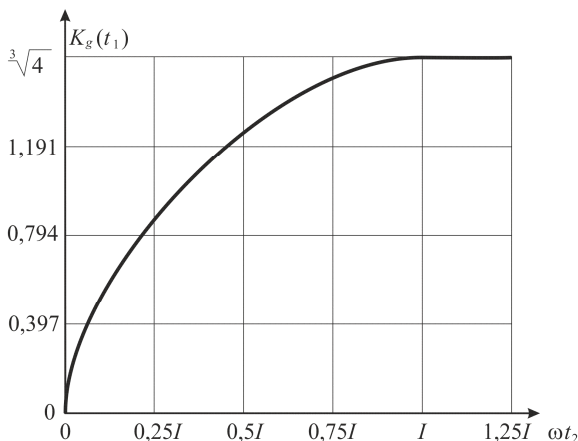


Рис. 2 – Залежність коефіцієнта динамічності від тривалості імпульсу.

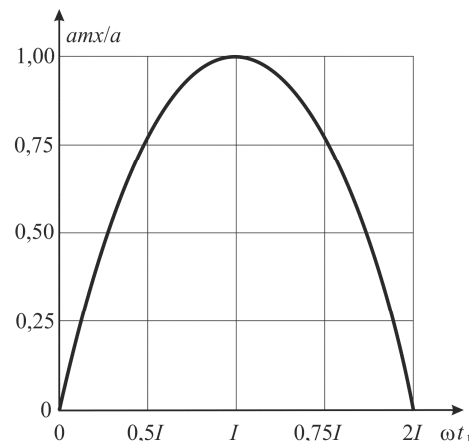


Рис. 3 – Залежність амплітуд вільних коливань від тривалості імпульсу.

Амплітуди вільних коливань осцилятора, після припинення дії імпульсу, теж залежать від  $\omega t_1$ . Ця залежність  $amx$  від  $\omega t_1$  показана на рис. 3.

На проміжку  $\omega t_1 \in (0; I)$  маємо зростання амплітуд вільних коливань, спричинених імпульсом, а на проміжку  $\omega t_1 \in (I; 2I)$  вони спадають і дорівнюють нулю, коли  $\omega t_1 \in 2I$ .

**Висновки.** Коефіцієнт динамічності кубічно-нелінійного осцилятора при дії миттєво прикладеної сили (ступінчастого імпульсу) дорівнює  $\sqrt[3]{4}$ . Він менший, ніж у лінійного осцилятора.

Переміщення осцилятора суттєво залежать від тривалості дії силового імпульсу і виражаються через еліп-

тичний косинус Якобі або через Атеб-синус. Це дає можливість обчислювати їх за допомогою відомих таблиць неповного еліптичного інтеграла першого роду, або використовувати запропоновані апроксимації періодичних Атеб-функцій.

Встановлено такі тривалості дії імпульсу, при яких відбувається розгойдування коливань з екстремальними амплітудами. У випадку мінімальної нульової амплітуди, з припиненням дії імпульсу, осцилятор буде в стані спокою.

#### Список літератури

1. Ларин А. А. Очерки истории развития теории механических колебаний. – Севастополь : Вебер, 2013. – 403 с.
2. Аврамов К. В., Михлин Ю. В. Нелинейная динамика упругих систем // Том 1 : Модели, методы, явления. – Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2010. – 704 с.
3. Кузнецов А. П., Рыскин Н. М. Нелинейные колебания. – Москва : Физматлит, 2002. – 292 с.
4. Митропольський Ю. А. Избранные труды в 2-х томах. – Киев : Наукова думка, 2012. – 504 с.
5. Пукач П. Я. Якісні методи дослідження нелінійних коливальних систем. – Львів : Львівська політехніка, 2014. – 288 с.
6. Sveticanin L. A review on dynamics of mass variable system // Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics. – 2012. – Vol. 6. – № 1. – Pp. 56 – 74.
7. Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. Метод ВБК в расчетах нестационарных колебаний осциллятора. – Харьков : Мис'кдрук, 2014. – 264 с.
8. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В., Тищенко Л. М. Динаміка дисипативних осциляторів. – Харьков : Мис'кдрук, 2016. – 264 с.
9. Янке Е., Эмде Ф., Лёви Ф. Специальные функции. – Москва : Наука, 1977. – 344 с.
10. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды // Элементарные функции. – Москва : Наука, 1981. – 800 с.
11. Грицик В. В., Назаркевич М. А. Математичні моделі алгоритмів і реалізація Атеб-функцій // Доповіді Національної академії наук України. – Київ, 2007. – № 12. – С. 37 – 42.
12. Сокол Б. І. Про застосування Атеб-функцій для побудови розв'язків деяких рівнянь, які описують нелінійні коливання одновимірних середовищ // Доповіді Національної академії наук України. – Київ, 1997. – № 7. – С. 55 – 58.

#### References (transliterated)

1. Larin A. A. *Ocherki istorii razvitiya teorii mekhanicheskikh kolebaniy* [Essays on the history of development of mechanical oscillation theory]. Sevastopol, Veber Publ., 2013. 403 p.
2. Avramov K. V., Mikhlin Ju. V. *Nelineynaya dinamika uprugikh sistem. Tom 1: Modeli, metody, yavleniya* [Nonlinear dynamics of elastic systems. Volume 1: Models, methods, phenomena]. Moscow-Izhevsk, Institut komp'yuternykh issledovaniy Publ., 2010. 704 p.
3. Kuznecov A. P., Ryskin N. M. *Nelineynye kolebaniya* [Nonlinear oscillations]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2002. 292 p.
4. Mitropol'skiy Yu. A. *Izbrannye trudy v 2-kh tomakh* [Selected works in 2 volumes]. Kiev, Naukova dumka Publ., 2012. 504 p.
5. Pukach P. Ya. *Yakisni metody doslidzhennya nelineynykh kolyval'nykh sistem* [Qualitative methods for studying nonlinear oscillations of systems]. Lviv, L'viv's'ka politekhnika Publ., 2014. 288 p.
6. Sveticanin L. A review on dynamics of mass variable system // Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics. 2012, vol. 6, no. 1. pp. 56–74.
7. Ol'shanskiy V. P., Ol'shanskiy S. V. *Metod VBK v raschetakh nestatsionarnykh kolebaniy ostsillyatora* [WKB-method for computing non-stationary oscillations]. Kharkiv, Mis'kdruk Publ., 2014. 264 p.
8. Ol'shanskiy V. P., Ol'shanskiy S. V., Tyshenko L. M. *Dynamika dysypatyvnykh ostsilyatoriv* [Dynamics of dissipative oscillators]. Kharkiv, Mis'kdruk Publ., 2016. 264 p.
9. Yanke E., Yemde F., Lyosh F. *Spetsial'nye funktsii* [Special functions]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 344 p.
10. Prudnikov A. P., Brychkov Ju. A., Marichev O. I. *Integraly i ryady. Yelementarnye funktsii* [Integrals and series. Elementary functions]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 800 p.
11. Gritsik V. V., Nazarkevich M. A. Matematychni modeli alorytmiv i realizatsiya Ateb-funktsiy [Mathematical models of algorithms and implementation of Ateb-function]. *Dopovidi Natsional'noi' akademii' nauk Ukrainy* [Reports of the National academy of science of Ukraine]. Kyiv, 2007, no. 12, pp. 37–42.
12. Sokil B. I. Pro zastosuvannya Ateb-funktsiy dlya pobudovy rozv'yazkyv deyakykh rivnyan', yaki opysuyut' nelineyni kolyvannya odnovimirnih seredovys'hh [On application of Ateb-functions for constructing solutions for some equations describing nonlinear oscillations of two-dimensional media]. *Dopovidi Natsional'noi' akademii' nauk Ukrainy* [Reports of the National academy of science of Ukraine]. Kyiv, 1997, no. 7, pp. 55–58.

Надійшла (received) 21.03.2017

#### Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

**Коливання кубічно нелінійного осцилятора, спричинені імпульсним навантаженням / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харьков : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 86 – 94. Бібліогр.: 12 назв. – ISSN 2222-0631.**

**Колебания кубически нелинейного осциллятора, вызванные импульсной нагрузкой / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харьков : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 86 – 94. Бібліогр.: 12 назв. – ISSN 2222-0631.**

**Oscillations of a cubic nonlinear oscillator caused by an impulse load / V. P. Olshanskiy, S. V. Olshanskiy // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 6 (1228). – pp. 86 – 94. Bibliogr.: 12 titles. – ISSN 2222-0631.**

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Ольшанський Василь Павлович** – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.



**Ольшанский Василий Павлович** – доктор физико-математических наук, профессор, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени П. Василенко, г. Харьков; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

**Olshanskiy Vasily Pavlovich** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture, Kharkov; tel.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

**Ольшанський Станіслав Васильович** – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

**Ольшанский Станислав Васильевич** – кандидат физико-математических наук, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени П. Василенко, г. Харьков; тел.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

**Olshanskiy Stanislav Vasilevich** – Phd in physics and mathematics, Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture, Kharkov; tel.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

УДК 519.6

**Ю. І. ПЕРШИНА, В. О. ПАСІЧНИК**

### **ВІДНОВЛЕННЯ РОЗРИВНОЇ ФУНКЦІЇ ЗА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИМИ ДАНИМИ З ВИКОРИСТАННЯМ ПРЯМОКУТНИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

Робота присвячена обґрунтуванню методу відновлення розривної функції двох змінних за інтерполяційними даними та алгоритму знаходження ліній розриву, за допомогою розривних інтерполяційних чи апроксимаційних білінійних сплайнів, використовуючи ректангуляцію області. Інформацією про функцію є її односторонні значення у вузлах прямокутної сітки, причому лінії розриву наперед невідомі та не співпадають з лініями ректангуляції. Доведені теореми про необхідну кількість ітерацій запропонованого методу для досягнення потрібної точності. Введено поняття  $\varepsilon$  – неперервності функції двох змінних. На його основі розроблено алгоритм виявлення ліній розриву першого роду білінійної функції двох змінних, використовуючи розривний апроксимаційний білінійний сплайн. Викладений метод дозволяє визначити лінії розриву експериментально заданої розривної функції та обрати оптимальні вузли сітки наближуючого розривного білінійного сплайну. Розглянуто приклади, які підтверджують ефективність запропонованого методу. Вподальшому планується розробити узагальнюючий алгоритм відновлення розривної функції, розриви якої будуть лежати на більш складних лініях.

**Ключові слова:** розривна білінійна інтерполяція, лінії  $\varepsilon$  – розриву, розривна апроксимація.

Работа посвящена обоснованию метода восстановления разрывной функции двух переменных по интерполяционным данным и алгоритма нахождения линий разрыва, с помощью разрывных интерполяционных или аппроксимационных билинейных сплайнов, используя ректангуляцию области. Информацией о функции является ее односторонние значения в узлах прямоугольной сетки, причем линии разрыва заранее неизвестны и не совпадают с линиями ректангуляции. Доказаны теоремы о необходимом количестве итераций предложенного метода для достижения нужной точности. Введено понятие  $\varepsilon$  – непрерывности функции двух переменных. На его основе разработан алгоритм выявления линий разрыва первого рода билинейной функции двух переменных, используя разрывной аппроксимационный билинейный сплайн. Изложенный метод позволяет определить линии разрыва экспериментально заданной разрывной функции и выбрать оптимальные узлы сетки приближающего разрывного билинейные сплайна. Рассмотрены примеры, подтверждающие эффективность предложенного метода. Далее планируется разработать обобщающий алгоритм восстановления разрывной функции, разрывы которой будут лежать на более сложных линиях.

**Ключевые слова:** разрывная билинейная интерполяция, линии  $\varepsilon$  – разрыва, разрывная аппроксимация.

The paper deals with justification of the method for reconstructing a discontinuous function of two variables by interpolation data and an algorithm for finding the lines of discontinuity, using discontinuous interpolation or approximation bilinear splines and the region's rectangulation. Information about the function is its one-way values at the nodes of the rectangular grid, and the discontinuous lines are not known in advance and do not coincide with the lines of rectangulation. Theorems on the necessary number of iterations of the proposed method for achieving the required accuracy are proved. The concept of  $\varepsilon$  – continuity of a function of two variables is introduced. On the basis of this algorithm, an algorithm for detecting the lines of discontinuity of the first kind of a bilinear two variables function using a discontinuous approximate bilinear spline was developed. The proposed method makes it possible to determine the lines of discontinuity of an experimentally given discontinuous function and to select the optimal grid nodes for the approximating discontinuous bilinear spline. The examples that confirm the effectiveness of the proposed method are considered. Further, it is planned to develop a general algorithm for restoring a discontinuous function, the discontinuities of which lie on more complex lines.

**Key words:** discontinuous bilinear interpolation,  $\varepsilon$  – discontinuous lines, discontinuous approximation.

**Вступ.** Впродовж багатьох століть розвитку людства історія відмічає нерівномірність як природних, так і соціальних явищ, які супроводжували цей розвиток (землетруси, війни, економічні кризи, засухи, наводнення, падіння метеоритів тощо належать до явищ, процесів, які описуються розривними функціями). Також існує багато практично важливих наукових та технічних галузей, в яких об'єкти дослідження математично описуються величинами, що зазнають розрив. Такі об'єкти часто виникають в задачах, які використовують дистанційні методи і, зокрема, в задачах томографії. В багатьох задачах геофізики встановлення місця розташування границь, що розділяють блоки з різними фізичними властивостями, є першим етапом в подальших дослідженнях, направлених на визначення фізичних величин, що характеризують внутрішню будову Землі. В комп'ютерній томографії при дослідженні внутрішньої структури тіла корисно враховувати його неоднорідність, тобто різну щільність в різних частинах тіла (кістки, серце, шлунок тощо мають різну щільність, тобто щільність всього тіла є функцією з розривами першого роду на системі ліній чи поверхонь).

© Ю. І. Першина, В. О. Пасічник, 2017