Ольшанский Василий Павлович – доктор физико-математических наук, профессор, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени П. Василенко, г. Харьков; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Olshanskiy Vasiliy Pavlovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture, Kharkov; tel.: (066) 010-09-55.; e-mail: stasolsh77@gmail.com.

Ольшанський Станіслав Васильович – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

Ольшанский Станислав Васильевич – кандидат физико-математических наук, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени П. Василенко, г. Харьков; тел.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

Olshanskiy Stanislav Vasilevich – Phd in physics and mathematics, Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture, Kharkov; tel.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.

УДК 519.6

Ю. І. ПЕРШИНА, В. О. ПАСІЧНИК

ВІДНОВЛЕННЯ РОЗРИВНОЇ ФУНКЦІЇ ЗА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИМИ ДАНИМИ З ВИКОРИСТАННЯМ ПРЯМОКУТНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Робота присвячена обгрунтуванню методу відновлення розривної функції двох змінних за інтерполяційними даними та алгоритму знаходження ліній розриву, за допомогою розривних інтерполяційних чи апроксимаційних білінійних сплайнів, використовуючи ректангуляцію області. Інформацією про функцію є її односторонні значення у вузлах прямокутної сітки, причому лінії розриву наперед невідомі та не співпадають з лініями ректангуляції. Доведені теореми про необхідну кількість ітерацій запропонованого методу для досягнення потрібної точності. Введено поняття ε – неперервності функції двох змінних. На його основі розроблено алгоритм виявлення ліній розриву першого роду білінійної функції двох змінних, використовуючи розривний апроксимаційний білінійний сплайн. Викладений метод дозволяє визначити лінії розриву експериментально заданої розривної функції та обрати оптимальні вузли сітки наближуючого розривного білінійного сплайну. Розглянуто приклади, які підтверджують ефективність запропонованого методу. Вподальшому планується розробити узагальнюючий алгоритм відновлення розривної функції, розриви якої будуть лежати на більш складних лініях.

Ключові слова: розривна білінійна інтерполяція, лінії ε – розриву, розривна апроксимація.

Работа посвящена обоснованию метода восстановления разрывной функции двух переменных по интерполяционными данными и алгоритма нахождения линий разрыва, с помощью разрывных интерполяционных или апроксимационных билинейных сплайнов, используя ректангуляцию области. Информацией о функции является ее односторонние значения в узлах прямоугольной сетки, причем линии разрыва заранее неизвестны и не совпадают с линиями ректангуляции. Доказаны теоремы о необходимом количестве итераций предложенного метода для достижения нужной точности. Введено понятие ε – непрерывности функции двух переменных. На его основе разработан алгоритм выявления линий разрыва первого рода билинейной функции двух переменных, используя разрывной аппроксимационный билинейной сплайн. Изложенный метод позволяет определить линии разрыва экспериментально заданной разрывной функции и выбрать оптимальные узлы сетки приближающего разрывного билинейные сплайна. Рассмотрены примеры, подтверждающие эффективность предложенного метода. Далее планируется разработать обобщающий алгоритм восстановления разрывной функции, разрывы которой будут лежать на более сложных линиях

Ключевые слова: разрывная билинейная интерполяция, линии ε – разрыва, разрывная аппроксимация.

The paper deals with justification of the method for reconstructing a discontinuous function of two variables by interpolation data and an algorithm for finding the lines of discontinuity, using discontinuous interpolation or approximation bilinear splines and the region's rectangulation. Information about the function is its one-way values at the nodes of the rectangular grid, and the discontinuous lines are not known in advance and do not coincide with the lines of rectangulation. Theorems on the necessary number of iterations of the proposed method for achieving the required accuracy are proved. The concept of ε – continuity of a function of two variables is introduced. On the basis of this algorithm, an algorithm for detecting the lines of discontinuity of the first kind of a bilinear two variables function using a discontinuous approximate bilinear spline was developed. The proposed method makes it possible to determine the lines of discontinuity of an experimentally given discontinuous function and to select the optimal grid nodes for the approximating discontinuous bilinear spline. The examples that confirm the effectiveness of the proposed method are considered. Further, it is planned to develop a general algorithm for restoring a discontinuous function, the discontinuities of which lie on more complex lines.

Key words: discontinuous bilinear interpolation, ε – discontinuous lines, discontinuous approximation.

Вступ. Впродовж багатьох століть розвитку людства історія відмічає нерівномірність як природних, так і соціальних явищ, які супроводжували цей розвиток (землетруси, війни, економічні кризи, засухи, наводнення, падіння метеоритів тощо належать до явищ, процесів, які описуються розривними функціями). Також існує багато практично важливих наукових та технічних галузей, в яких об'єкти дослідження математично описуються величинами, що зазнають розрив. Такі об'єкти часто виникають в задачах, які використовують дистанційні методи і, зокрема, в задачах томографії. В багатьох задачах геофізики встановлення місця розташування границь, що розділяють блоки з різними фізичними властивостями, є першим етапом в подальших дослідженнях, направлених на визначення фізичних величин, що характеризують внутрішню будову Землі. В комп'ютерній томографії при дослідженні внутрішньої структури тіла корисно враховувати його неоднорідність, тобто різну щільність в різних частинах тіла (кістки, серце, шлунок тощо мають різну щільність, тобто щільність всього тіла є функцією з розривами першого роду на системі ліній чи поверхонь).

Для багатьох промислових підприємств наявність засобів неруйнівного контролю якості продукції на різних етапах її виробництва є актуальним завданням. Рентгенівські засоби неруйнівного контролю не мають альтернативи в тих випадках, де параметрами контролю якості виробів можуть бути внутрішні геометричні розміри складових частин виробів, просторове розташування внутрішніх деталей, структура матеріалів і наповнювачів, наявність домішок, раковин або тріщин. Необхідно відзначити, що при неруйнівному контролі великогабаритних виробів (з радіаційної товщиною більшою 1000 мм) не можуть бути застосовані традиційні методи плівкової рентгенографії через високу вартість витратних матеріалів і тривалого часу контролю. Найбільш перспективними, в даному випадку, є методи цифрової радіографії, особливо обчислювальна томографія. Обчислювальні томографічні системи неруйнівного контролю на сьогодні є єдиними технічними засобами, які дозволяють визначити місце розташування і геометричні розміри прихованих дефектів в контрольованому виробі, а також контроль вироба в реальному масштабі часу його технологічного виготовлення.

Той факт, що на сьогоднішній день не існує загальної теорії описів вказаних явищ та процесів, говорить про актуальність створення теорії наближення розривних функцій розривними конструкціями та розробки методів виявлення точок або ліній розриву функції, оскільки вказані явища відіграють величезну роль в житті людства. Тому кожний крок, направлений на створення теоретичного підґрунтя опису вказаних явищ та процесів, без сумніву, може значно змінити подальший розвиток людства і всієї планети в цілому.

Аналіз останніх досліджень. Задача наближення неперервних функцій неперервними сплайнами з достатньою повнотою описана в багатьох роботах, наприклад, в роботах [1] – [3]. Існують багато технічних задач, в яких наближуюча функція не обов'язково є гладкою, іноді допустима її розривність – лише б похибка наближення була достатньо мала. Наближення такого типу раніше детально не розглядалося, існують тільки підходи до розв'язання такого типу задач, які працюють для частинних випадків. Для того, щоб розв'язувати широке коло наукових та технічних задач, корисні рівномірні наближення негладкими та розривними функціями. Робота *Попова Б. А.* [4] присвячена рівномірному наближенню раціональними чебишевськими розривними, неперервними та інтерполяційними сплайнами неперервних функцій. Але ця робота не відповідає на питання, що робити з розривною функцією. В своїх роботах *Петухов А. П.* [5] досліджує наближення розривних функцій в *метриці Хаусдорфа*. Існують методи розв'язання крайових задач з розривними розв'язками, в розвиток яких внесли значний вклад такі вчені, як *Сергієнко І. В.*, *Дейнека В. С.*, *Скопецький В. В.*, *Литвин О. М.* та інші [6] – [11]. В роботах *А. Л. Агеева*, *Т. В. Антонової* [12] – [15] запропонований метод визначення числа точок розриву та їх положення на основі використання *явища Гіббса*. Але для цього потрібна додаткова інформація: найменша та найбільша величини стрибків наближуючої функції. Крім того припускається, що інтервали, в яких знаходяться явища Гіббса, не перетинаються, тобто неможливо відділити точки розриву, що знаходяться близько один від одного. Згадані методи наближення розривних функцій в якості вхідної інформації використовують інтерполяційні дані функції. Але є багато технічних і наукових галузей, в яких вирішуються задачі відновлення за відомими даними у вигляді проекції функції вздовж системі ліній або площин (дистанційні методи). Саме таким методам були присвячені розробки авторів статті. Були розроблені нові інформаційні оператори – *інтерлінація*, *інтерфлетація*, *інтерлокація*, *інтерстріпація*. Але практично не було ще достатньо приділено уваги використанню методів дослідження неоднорідних відновлюваних тіл.

Якщо наближувати розривну функцію неперервними тригонометричними функціями, виникає явище Гіббса. Для боротьби із згаданим явищем були розроблені різні фільтри [16] – [18]. В останні кілька десятиліть були розроблені методи, які пом'якшують явище Гіббса в *розкладанні Фур'є* від розривних функцій. Але повного видалення явища Гібса ні фільтри, ні згадані методи не дають. В роботах [19, 20] розроблені методи відновлення ліній розриву за допомогою *вейвлетів*. Ці методи відновлення використовують полігармонійні вейвлети, які мають нескінчений носій. Такого типу конструкції в загалі кажучи можуть привести до згладжування сигналу, який досліджується, і вимагають додаткового аналізу отриманих результатів. Існує цикл робіт, в яких розв'язується задача відновлення розривів саме в комп'ютерній томографії, істотно використовуючи стандартні методи, а саме пряме та оберенене *перетворення Радона*. Першою такою роботою є стаття *Vainberg E. I.* [21]. Розвиток цієї методології, а саме розвиток алгоритмічних засобів відновлення множини розривів здійснювали, у рамках локальної томографії, такі дослідники, як *Faridani A.*, *Finch D. V.*, *Ritman E. L.*, *Smith K. T.*, *Louis A. K.*, *Maass P.* Деякі підходи, що дозволяють відновити те тільки множину розривів, але й величини скачків за перетворення Радона, запропоновані в роботах *Ramachandran G. N.*, *Lakshminarayanan A. N.*, *Ramm A. G.* [22]. Як продовження такого підходу за останні 5 років з'явився цикл робіт новосибірських вчених [23], [24]. Ці роботи базуються на використанні прямого та оберненого перетворення Радона. Як відомо, пряме перетворення Радона є інтегральним перетворенням, і за результатом цього перетворення отримуються функції, які мають більш високу гладкість, ніж перетворювана функція. Тобто в результаті задача при такому підході формулюється наступним чином: знайти оригінальну функцію з розривами першого роду на деякій системі ліній за допомогою інформації, яка може і не містити цих розривів. В статтях [25, 26] авторами розроблені методи, що пом'якшують явище Гіббса, але повністю його не видаляють.

В роботах [27] – [29] авторами запропонований, обґрунтований та досліджений метод відновлення розривної функції однієї змінної та алгоритм виявлення точок ε – розриву. В роботі [29] представлений алгоритм виявлення ліній ε – розриву функцій двох змінних за допомогою розривних апроксимаційних сплайнів. В даній статті пропонується обґрунтування цього методу у вигляді теорем про збіжність ітераційного процесу та кількості ітерацій, що потрібно зробити для виявлення ліній ε – розриву.

Постановка задачі. Нехай задана білінійна функція двох змінних $f(x,y)$ в області $D=[0,1]^2$ та задане деяке розбиття на елементи (прямокутники)

$$\Pi_{i,j}=[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}],\quad 0=x_1<x_2<\ldots<x_m=1,\ \ 0=y_1<y_2<\ldots<y_n=1 .$$

Причому розташування ліній розриву функції $f(x,y)$ невідоме. В якості експериментальних даних будемо використовувати скінченну кількість інтерполяційних значень розривної функції $f(x,y)$ у кутах заданої прямокутної сітки

$$C_{i,j}^{++}=f(x_i+0,y_i+0),\quad C_{i,j}^{-+}=f(x_i-0,y_j+0),$$

$$C_{i,j}^{+-}=f(x_i+0,y_j-0),\quad C_{i,j}^{--}=f(x_i-0,y_i-0).$$

Треба побудувати та дослідити метод відновлення розривної білінійної функції $f(x,y)$ та виявити лінії $\varepsilon-$розриву.

Метод виявлення ліній $\varepsilon-$розриву. Нехай в області $D=[0,1]^2$ задано розривну функцію $f(x,y)$ та деяке розбиття на елементи (прямокутники)

$$\Pi_{i,j}=[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}],\quad 0=x_1<x_2<\ldots<x_m=1,\ \ 0=y_1<y_2<\ldots<y_n=1 .$$

Причому розташування ліній розриву функції $f(x,y)$ невідоме. Як експериментальні дані будемо використовувати скінченну кількість інтерполяційних значень розривної функції $f(x,y)$ у кутах заданої прямокутної сітки:

$$C_{i,j}^{++}=\lim_{\substack{x\to x_i+0\\ y\to y_j+0}} f(x,y),\quad C_{i,j}^{-+}=\lim_{\substack{x\to x_i-0\\ y\to y_j+0}} f(x,y),$$

$$C_{i,j}^{+-}=\lim_{\substack{x\to x_i+0\\ y\to y_j-0}} f(x,y),\quad C_{i,j}^{--}=\lim_{\substack{x\to x_i-0\\ y\to y_j-0}} f(x,y).$$

Перенумеруємо задані значення матриці C як показано на рис. 1. Тобто, як вхідні дані використовується матриця значень $C_{p,\ell}$, $p=\overline{1,n\cdot m}$, $\ell=\overline{1,4}$, розривної функції $f(x,y)$, де p – номер прямокутного елемента, що розглядається.

Для подальшого викладення введемо поняття $\varepsilon-$*неперервності функції.*

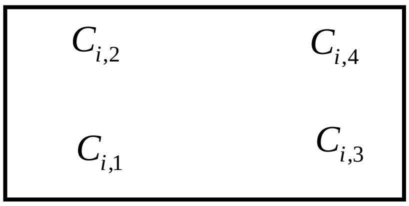


Рис. 1– Формування матриці невідомих значень розривної функції в $i-$му прямокутному елементі.

Означення 1. Якщо

$$\left|\lim_{x\to x_q+0} f(x,y)-\lim_{x\to x_q-0} f(x,y)\right|<\varepsilon,\ \forall y,$$

то функцію $f(x,y)$ будемо називати $\varepsilon-$неперервною на лінії $x=x_q$, аналогічно, якщо

$$\left|\lim_{y\to y_s+0} f(x,y)-\lim_{y\to y_s-0} f(x,y)\right|<\varepsilon,\ \forall x,$$

то функцію $f(x,y)$ будемо називати $\varepsilon-$*неперервною на лінії* $y=y_s$.

Означення 2. Якщо виконуються всі чотири нерівності з означення 1 у точці (x_q,y_s):

$$\left|\lim_{\substack{x\to x_q+0\\ y\to y_s+0}} f(x,y)-\lim_{\substack{x\to x_q-0\\ y\to y_s+0}} f(x,y)\right|<\varepsilon,\quad \left|\lim_{\substack{x\to x_q+0\\ y\to y_s+0}} f(x,y)-\lim_{\substack{x\to x_q+0\\ y\to y_s-0}} f(x,y)\right|<\varepsilon,$$

$$\left|\lim_{\substack{x\to x_q-0\\ y\to y_s+0}} f(x,y)-\lim_{\substack{x\to x_q-0\\ y\to y_s-0}} f(x,y)\right|<\varepsilon,\quad \left|\lim_{\substack{x\to x_q-0\\ y\to y_s-0}} f(x,y)-\lim_{\substack{x\to x_q+0\\ y\to y_s-0}} f(x,y)\right|<\varepsilon,$$

то функцію $f(x,y)$ будемо називати $\varepsilon-$*неперервною в точці* (x_q,y_s).

Означення 3. Якщо $f(x,y)$ є $\varepsilon-$неперервною $\forall(x,y)\in\Pi_{i,j}$, то будемо її називати $\varepsilon-$*неперервною в усьому прямокутному елементі* $\Pi_{i,j}$.

Розглянемо випадок виявлення ліній розриву білінійної розривної функції.

Теорема 1. *Якщо* $f(x,y)\in C^{-1}[0;1]^2$ *має одну точку розриву першого роду*

$$x^* = \frac{m}{2^k}, y^* = \frac{p}{2^k} m, k, p \in N,\ m < 2^k,\ p < 2^k,$$

то її можна виявити за не більше ніж k *ітерацій.*

Доведення будемо виконувати методом математичної індукції.

Нехай $k = 1,\ \ell = 1$. Для визначеності будемо вважати $m = 1,\ p = 1$, тобто $x^* = \frac{1}{2},\ y^* = \frac{1}{2}$.

Ітерація 1. За вузли розривного лінійного сплайну $S(x)$ вибираємо рівномірно розташовані вузли

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 1,\ y_0 = 0,\ y_1 = \frac{1}{2},\ y_2 = 1,$$

тобто розбиваємо область визначення функції на прямокутні елементи $\Pi_{ij},\ j, i = 0,1,2$.

Будуємо розривний лінійний сплайн за формулою

$$S(x, y) = p_{ij}(x, y) = C_{i,j}^{++} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{y - y_{j+1}}{y_j - y_{j+1}} + C_{i+1,j}^{-+} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - y_{j+1}}{y_j - y_{j+1}} +$$

$$+ C_{i,j+1}^{+-} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} + C_{i+1,j+1}^{--} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j},\ (x, y) \in \Pi_{ij}.$$

Для початкового наближення як параметри $C_k^{\pm}$ візьмемо односторонні значення функції $f(x)$ у потрібних вузлах.

Для знаходження параметрів використовуємо *метод найменших квадратів* в інтегральній формі. Запишемо функціонал, який треба мінімізувати:

$$J(C) = \sum_{\Pi_{i,j} \subset D} \iint_{\Pi_{i,j}} [f(x, y) - S(x, y)]^2\, dxdy \to \min_C,$$

$$J(C) = \int_0^1\int_0^1 (f(x, y) - S(x, y))^2 dx = \iint_{\Pi_{11}} (f(x, y) - S(x, y))^2 dx + \iint_{\Pi_{12}} (f(x, y) - S(x, y))^2 dx +$$

$$+ \iint_{\Pi_{21}} (f(x, y) - S(x, y))^2 dx + \iint_{\Pi_{22}} (f(x, y) - S(x, y))^2 dx. \tag{1}$$

$J(C) = 0$, оскільки $f(x, y)$ є кусково-лінійною розривною функцією і тому $f(x, y) - S(x, y) \equiv 0$.

Отже, для випадку, коли розривна лінійна функція має одну точку розриву $x^* = \frac{1}{2},\ y^* = \frac{1}{2},\ k = 1,\ \ell = 1$, і для відновлення такої функції достатньо однієї ітерації.

Нехай $k = 2,\ \ell = 2$. Для визначеності будемо вважати $m = 1,\ p = 1$, тобто $x^* = \frac{1}{2^2},\ y^* = \frac{1}{2^2}$.

Ітерація 2. При побудові сплайну $S(x, y)$ функціонал буде мати вигляд

$$J(C) = \int_0^1\int_0^1 (f(x, y) - S(x, y))^2 dx = \iint_{\Pi_{11}} (f(x, y) - S(x, y))^2 dx,$$

оскільки інші інтеграли дорівнюють нулю, бо $f(x, y)$ є лінійною неперервною функцією на інтервалі $(0,5;1)$.

Інтервал, на якому $J(C) \neq 0$, ділимо на чотири рівні частини, вводячи нові вузли $x = \frac{1}{4},\ y = \frac{1}{4}$. Тобто маємо новий набір вузлів $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{2^2},\ x_2 = \frac{1}{2^1};\ y_0 = 0,\ y_1 = \frac{1}{2^2},\ y_2 = \frac{1}{2^1}$. І, повторюючи крок 1, отримуємо

$$J(C) = \iint_{\Pi_{11}} (f(x, y) - S(x, y))^2 dxdy = \int_0^{\frac{1}{4}}\int_0^{\frac{1}{4}} (f(x, y) - S(x, y))^2 dxdy +$$

$$+ \int_0^{\frac{1}{4}}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (f(x, y) - S(x, y))^2 dxdy + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{4}} (f(x, y) - S(x, y))^2 dxdy + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (f(x, y) - S(x, y))^2 dxdy = 0.$$

Аналогічний результат буде у випадку $m = 3,\ k = 2,\ p = 3,\ \ell = 2$.

Отже, для виявлення точки розриву $x^* = \frac{m}{2^k},\ k = 2,\ y^* = \frac{p}{2^\ell},\ \ell = 2$ потрібні 2 ітерації.

Нехай для виявлення точки розриву $x^* = \frac{m}{2^k},\ y^* = \frac{p}{2^\ell},\ m = 1,\ k = n,\ p = 1,\ \ell = n$ потрібно n ітерацій, тобто на $n-$й ітерації розривний сплайн $S(x, y)$ будуємо на сітці

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{2^n},\ x_2 = \frac{1}{2^{n-1}};\ y_0 = 0,\ y_1 = \frac{1}{2^n},\ y_2 = \frac{1}{2^{n-1}}$$

і мінімізуючий функціонал має вигляд

$$J(C) = \int_0^{\frac{1}{2^n}}\int_0^{\frac{1}{2^n}} (f(x, y) - S(x, y))^2\, dxdy + \int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}}\int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} (f(x, y) - S(x, y))^2\, dxdy +$$

$$+\int_0^{\frac{1}{2^n}}\int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} (f(x, y) - S(x, y))^2\, dxdy + \int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}}\int_0^{\frac{1}{2^n}} (f(x, y) - S(x, y))^2\, dxdy = 0.$$

Доведемо, що для виявлення точки розриву $x^* = \frac{m}{2^k},\ y^* = \frac{p}{2^\ell},\ m = 1,\ k = n+1,\ p = 1,\ \ell = n+1$ потрібно $(n+1)$-а ітерація. Для цього випадку

$$J(C) = \int_0^{\frac{1}{2^{n+1}}}\int_0^{\frac{1}{2^{n+1}}} (f(x, y) - S(x, y))^2\, dxdy + \int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^n}}\int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^n}} (f(x, y) - S(x, y))^2\, dxdy +$$

$$+\int_0^{\frac{1}{2^{n+1}}}\int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^n}} (f(x, y) - S(x, y))^2\, dxdy + \int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^n}}\int_0^{\frac{1}{2^{n+1}}} (f(x, y) - S(x, y))^2\, dxdy \neq 0,$$

оскільки $f(x)$ є лінійною неперервною функцією на всіх прямокутних елементах, крім того елемента, куди потрапила точка розриву.

Прямокутний елемент, на якому $J(C) \neq 0$, ділимо на чотири рівні частини, вводячи новий вузол $\left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ (тобто робимо $(n+1)$-у ітерацію). І будуючи на новій трійці вузлів $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{2^{n+1}},\ x_2 = \frac{1}{2^n}$ розривний сплайн, отримуємо

$$J(C) = \int_0^{\frac{1}{2^{n+1}}} (f(x) - S(x))^2\, dx + \int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^n}} (f(x) - S(x))^2\, dx = 0,$$

тому що точка $x = \frac{1}{2^{n+1}}$ є точкою розриву.

Тобто розрив виявлено за $(n+1)$-у ітерацію.

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Якщо* $f(x, y) \in C^{-1}[0;1]^2$ *є кусково-лінійною функція і має одну точку розриву першого роду* (x^*, y^*), *то виявити її можна за* $k = \lceil -\log_2 2\varepsilon \rceil$ *ітерацій з похибкою* ε.

Доведення. Опишемо алгоритм виявлення точки $\varepsilon-$-розриву.

Крок 1. Обираємо рівномірну сітку області $[0;1]^2$: $x_0 = 0,\ x_1 = 0{,}5,\ x_2 = 1$ і $y_0 = 0,\ y_1 = 0{,}5,\ y_2 = 1$. І будуємо на цій сітці *розривний білінійний сплайн* $S(x, y)$. Функціонал, який треба мінімізувати, має вигляд (1). Три інтеграли в цьому виразі будуть дорівнювати нулю, оскільки на прямокутних елементах, за якими ведеться інтегрування, функція є неперервною і лінійною.

Крок 2. Інтервал, на якому $J(C) \neq 0$, ділимо на чотири рівні частини, вводячи нові вузли в сітку. Нехай для визначеності це інтервал $\left[0;\ \frac{1}{2}\right] \times \left[0;\ \frac{1}{2}\right]$ і обираємо вузли $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{2^2},\ x_2 = \frac{1}{2},\ y_0 = 0,\ y_1 = \frac{1}{2^2},\ y_2 = \frac{1}{2}.$

Знову ж будуємо сплайн на нових вузлах і один з інтегралів в мінімізуючому функціоналі не буде дорівнювати нулю.

Знайдемо критерій зупинки ітераційного процесу.

Треба знайти такий найближчий до точки $\varepsilon-$розриву прямокутний елемент

$$\left(\frac{m}{2^k},\ \frac{m+1}{2^k}\right)\times\left(\frac{p}{2^\ell},\ \frac{p+1}{2^\ell}\right),\ m, k,\ p,\ \ell\in N,\ m<2^k,\ \ p<2^\ell,$$

що виконується умова

$$\left|\frac{m+1}{2^k}-\frac{m}{2^k}\right|<2\varepsilon\Rightarrow\frac{1}{2^k}<2\varepsilon\Rightarrow 2^k>\frac{1}{2\varepsilon}\Rightarrow k>\log_2\frac{1}{2\varepsilon}=-\log_2(2\varepsilon).$$

Аналогічно, $\left|\frac{p+1}{2^\ell}-\frac{p}{2^\ell}\right|<2\varepsilon\Rightarrow\ell>-\log_2(2\varepsilon).$

Оскільки $k,\ell\in N$, то $k=\lceil-\log_2(2\varepsilon)\rceil,\ \ \ell=\lceil-\log_2(2\varepsilon)\rceil$, а $n=k=\ell$ – номер ітерації (кроку), на якій потрібно зупинити ітераційний процес, m та p задовольняють нерівності

$$\frac{m}{2^k}<x^*<\frac{m+1}{2^k}\Rightarrow m<x^*\cdot 2^k,\ \ m>x^*\cdot 2^k-1;\ \ \frac{p}{2^\ell}<y^*<\frac{p+1}{2^\ell}\Rightarrow p<y^*\cdot 2^\ell,\ \ p>y^*\cdot 2^\ell-1.$$

Оскільки $m,\ p\in N$, то $m=\lfloor x^*\cdot 2^k\rfloor,\ \ p=\lfloor y^*\cdot 2^\ell\rfloor$.

Тобто на $n-$ітерації знайдемо точку $\varepsilon-$розриву $(x^*,\ y^*)$, яка потрапить в $\varepsilon-$квадрат

$$\left(\frac{\lfloor x^{**}\cdot 2^k\rfloor}{2^k},\ \frac{\lfloor x^{**}\cdot 2^k\rfloor+1}{2^k}\right)\times\left(\frac{\lfloor y^{**}\cdot 2^\ell\rfloor}{2^\ell},\ \frac{\lfloor y^{**}\cdot 2^\ell\rfloor+1}{2^\ell}\right),$$

де $(x^{**},\ y^{**})$ – точка розриву, що знайдена викладеним вище методом виявлення ліній розриву.

Тобто $(x^*,\ y^*)\in\left(\frac{\lfloor x^{**}\cdot 2^k\rfloor}{2^k},\ \frac{\lfloor x^{**}\cdot 2^k\rfloor+1}{2^k}\right)\times\left(\frac{\lfloor y^{**}\cdot 2^\ell\rfloor}{2^\ell},\ \frac{\lfloor y^{**}\cdot 2^\ell\rfloor+1}{2^\ell}\right).$

Теорему 2 доведено.

Приклад 1. Нехай розривна білінійна функція $f(x,\ y)$ має розрив першого роду в точці

$$(x^*,\ y^*)=(\pi,\pi-3)\approx(3.14.15.92.65;\ \ 0.14159265).$$

Складемо таблицю результатів виявлення точки $\varepsilon-$розриву (табл. 1), тобто ε – інтервал, та номер ітерації в залежності від заданої похибки ε.

Таблиця 1– Кількість ітерацій для досягнення похибки ε.

Похибка ε	Номер ітерації, n	$\varepsilon-$-квадрат
0,01	5	(3,125; 3,15625)×(0,125; 0.15625)
0,001	8	(3,140625; 3,1445313)×(0.140625; 0.142531)
0,0001	12	(3,141357; 3,1416016)×(0.1413574; 0.141602)

Означення 4. Базисним розривним білінійним сплайном на елементі $[0;1]^2$ будемо називати сплайн

$$B(x,\ y)=\begin{cases}h(x,\ y),\ \ (x,\ y)\in[0;1]^2;\\ 0,\qquad\quad (x,\ y)\notin[0;1]^2,\end{cases}$$

де $h(x,\ y)$ – білінійний неперервний поліном.

Теорема 3. *Довільну розривну білінійну функцію* $f(x,\ y)$ *зі скінченною кількістю розривів першого роду можна представити у вигляді суми базисних розривних сплайнів.*

Дійсно, завжди, знайдуться такі $M, L\in N$ і параметри $C_{i,j}^{\pm\pm}$, що білінійну розривну функцію можна записати у вигляді

$$f(x,\ y)=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{L}B(Mx-i;Ly-j;\ C_{i,j}^{\pm\pm}),\ \ C_{i,j}^{\pm\pm}=f\left(\frac{i}{M}\pm 0,\ \frac{j}{L}\pm 0\right).$$

Викладемо алгоритм знаходження ліній $\varepsilon-$розриву покроково.

Крок 1. Будуємо розривний апроксимаційний сплайн на заданих вузлах $(x_i,\ y_j),\ \ i=\overline{1,n-1},\ \ j=\overline{1,m-1}$ з параметрами $C_{k,\ell}$, $k=\overline{1,(m-1)\cdot(n-1)}$, $\ell=\overline{1,4}$. І знаходимо матрицю невідомих коефіцієнтів сплайну з умови (1), обчислюючи функціонал $J(C)$.

Крок 2. Знаходимо інтервали, на яких

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{y_\ell}^{y_{\ell+1}}(f(u,v)-S(u,v))^2\,dt\neq 0,\ k,\ell=\overline{1,n-1}.$$

Обчислюємо довжину інтервалів $d_k=x_{k+1}-x_k$, $g_\ell=y_{\ell+1}-y_\ell$. Якщо $d_k<2\varepsilon$, $g_\ell<2\varepsilon$, то інтервали $(x_k,x_{k+1})\times(y_\ell,\ y_{\ell+1})$ є ε – прямокутником точок розриву (ε – розрив), і ітераційний процес закінчено. Якщо ці умови не виконуються, то знайдені прямокутні елементи ділимо на чотири частини, якщо не виконується одна з цих нерівностей, то прямокутний елемент ділимо на 2 частини. Інші інтеграли дорівнюють нулю, оскільки $f(x)$ є кусково-лінійною функцією. Отримуємо новий набір вузлів. І повторюємо крок 1.

Крок 3. Як вузли розривного сплайну обираємо кутові точки області визначення розривної функції та точки ε – розриву (x_m,y_z), $m=\overline{1,M}$, $z=\overline{1,Z}$, враховуючи $C^{\pm,\pm}_{m,z}=f(x_m\pm\varepsilon,y_z\pm\varepsilon)$, $m=\overline{1,M}$, $z=\overline{1,Z}$. Сукупність знайдених точок ε – розриву створює лінії ε – розриву.

Зауваження 1. Прямокутні елементи, на які розбивається область визначення розривної функції, можуть мати довільно малі висоти і довжини, тобто можуть вироджуватися в лінії (одновимірний випадок).

Наведемо модифікований алгоритм виявлення ліній розриву для випадку нелінійної функції двох змінних. Оскільки наближувати її будемо білінійним розривним сплайном, то окрім значення ε знадобиться точність наближення δ.

Викладемо модифікований алгоритм покроково.

Крок 1. Будуємо розривний апроксимаційний сплайн на заданих вузлах (x_i,y_j), $i=\overline{1,n-1}$, $j=\overline{1,m-1}$, який на кожному елементі розбиття може мати однаковий аналітичний вигляд $p_{ij}(x,y,C)$ з різними параметрами та з невідомими $C_{k,\ell}$, $k=\overline{1,(m-1)\cdot(n-1)}$, $\ell=\overline{1,4}$. І знаходимо матрицю невідомих коефіцієнтів сплайну з умови (1). Після підстановки знайдених коефіцієнтів в сплайн отримаємо розривний сплайн, що складається з функцій $p_{ij}(x,y)$, $i=\overline{1,m-1}$, $j=\overline{1,n-1}$.

Крок 2. На кожному прямокутному елементі розбиття $\Pi_{i,j}$, $i=\overline{1,m-1}$, $j=\overline{1,n-1}$ обчислюємо значення

$$J^*_{ij}=\max_{\substack{x_i\le x\le x_{i+1}\\ y_j\le y\le y_{j+1}}}J_{ij}(x,y),\ J_{ij}(x,y)=\left|f(x,y)-p_{ij}(x,y)\right|.$$

Крок 3. Вилучаємо з розгляду ті прямокутні елементи, на яких побудований білінійний сплайн є ε – неперервним та на яких задовольняється точність наближення. Прямокутні елементи, що залишилися $\Pi_{r,q}$, $r=\overline{1,n1}$, $q=\overline{1,n2}$, ділимо на чотири рівні прямокутника, вводячи нові лінії всередині обраного прямокутного елемента (рис. 2). Наприклад, якщо ділимо $\Pi_{u,v}$, $u<m$, $v<n$, то вводимо до розгляду лінії всередині

$$\Pi_{u,v}:x=x^*,\ y_v<y<y_{v+1};\ \ y=y^*,\ x_u<x<x_{u+1},\ \ x^*=x_u+\frac{x_{u+1}-x_u}{2},\ y^*=y_v+\frac{y_{v+1}-y_v}{2}. \tag{2}$$

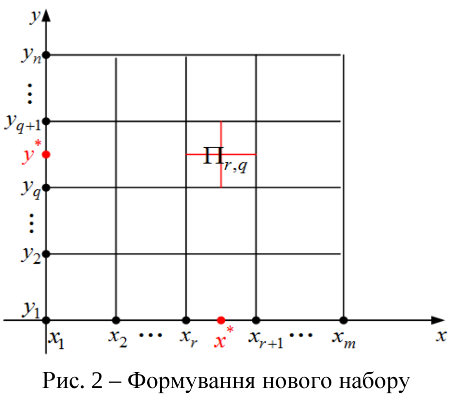


Рис. 2 – Формування нового набору прямокутних елементів шляхом ділення на чотири частини елементів, де функція не є ε – неперервною.

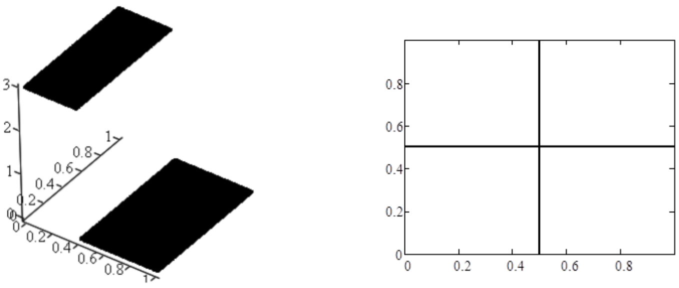
Крок 4. Для отриманого набору прямокутних елементів знову будуємо апроксимаційні сплайни за формулами (3.1) та (3.3) Далі перевіряємо виконання умови

$$\max_{\substack{x\in[0,1]\\ y\in[0,1]}}\left|f(x,y)-S(x,y)\right|<\delta,$$

де δ – задана точність наближення. Якщо ця умова виконується, то отримали набір відрізків прямих вигляду (2), які і складають лінії розриву заданої розривної функції $f(x,y)$. Якщо вказана умова не виконується, то повертаємося до кроку 3.

Приклад 1. Нехай в області $G=[0,1]\times[0,1]$ задано функцію (рис. 3, *а*)

$$f(x,y)=\begin{cases}3, & 0\le x\le 0,4;\\ 0, & 0,4<x\le 1.\end{cases}$$



а *б*

Рис. 3 – Графічний вигляд: *а* – функції $f(x, y)$, *б* – прямокутної сітки для наближувального сплайну.

Тобто функція має один розрив першого роду на лінії $x = 0,4$.

Обираємо сітку так, щоб вона не збігалася з лінією розриву заданої функції $x_1 = 0,\ \ x_2 = 0,5,$ $x_3 = 1,\ \ y_1 = 0,\ y_2 = 0,5,\ y_3 = 1$ (рис. 3, *б*).

Вважаємо заданими значення розривної функції у кутах заданої сітки, тобто

$$f(0,0) = 3,\quad f(0;0,5) = 3,\quad f(0,5;0) = 0,$$
$$f(0,5;0,5) = 0,\quad f(0;1) = 3,\quad f(0,5;1) = 0,$$
$$f(1;0) = 0,\quad f(1;0,5) = 0,\quad f(1;1) = 0.$$

Але для методу потрібно знати односторонні значення функції $f(x, y)$ у кутах заданої сітки. Тому, як експериментальні дані, візьмемо елементи наступної матриці (початкові дані):

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

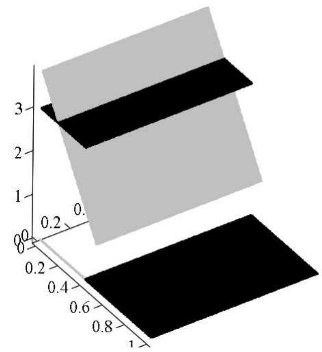
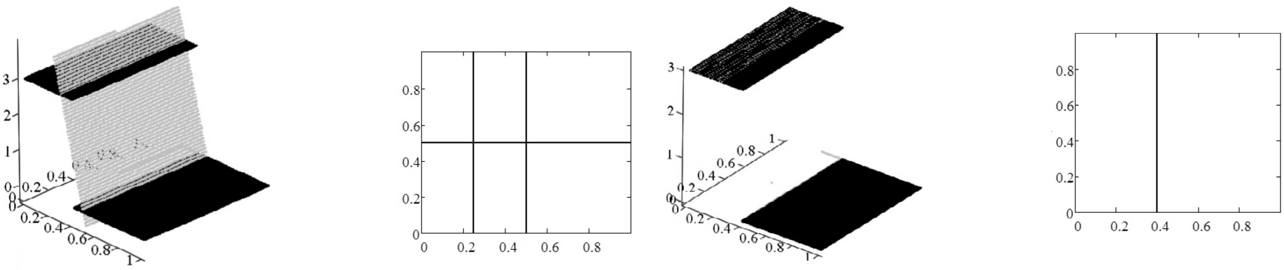


Рис. 4 – Графічний вигляд наближуваної функції (сірий колір) та побудованого сплайну (чорний колір).

Тобто на першій ітерації лівосторонні та правосторонні значення функції вважаємо рівними.

Далі будуємо розривний апроксимаційний сплайн та знаходимо матрицю коефіцієнтів C за методом найменших квадратів в інтегральній формі (рис. 4). Задамо точність наближення $\varepsilon = 0,01$.

Результати розробленого методу, а також деякі проміжні ітерації, наведено на рис. 5



а *б*

Рис. 5 – Результати відновлення розривної функції в прикладі 1: *а* – проміжна ітерація; *б* – кінцевий результат.

Тобто розривний сплайн $P(x, y)$ наблизив розривну функцію $f(x, y)$ з точністю ε.

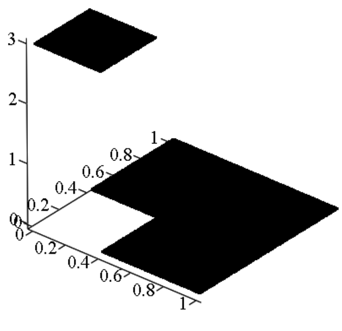


Рис. 6 – Графічний вигляд наближуваної функції.

Приклад 2. Нехай в області $G = [0,1]\times[0,1]$ задано функцію (рис. 6):

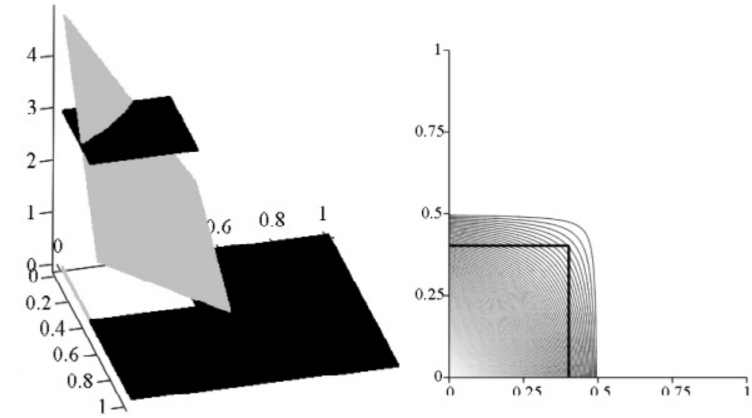
$$f(x, y) = \begin{cases} 3,\ \ 0 \le x \le 0,4;\ 0 \le y \le 0,4; \\ 0,\ 0,4 < x \le 1;\ \ 0,4 < y \le 1. \end{cases}$$

Оберемо таку саму сітку, як і в попередньому прикладі.

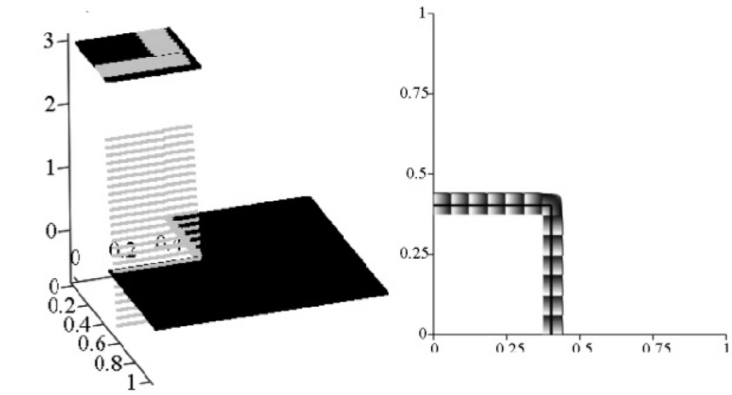
Задана функція має розриви на лініях $x = 0,4,\ \ y = 0,4$. За початкове наближення оберемо наступну матрицю:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

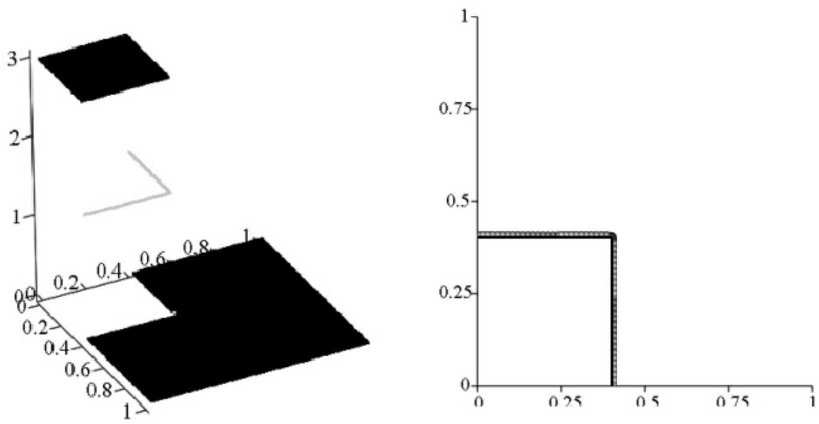
Побудуємо апроксимаційний сплайн на заданій сітці вузлів та задамо таку саму точність наближення. На рис. 7 наведено деякі проміжні результати наближення розривної функції та зображення сітки наближуючого сплайну для отриманого результату. Тобто отримали розривний сплайн (рис. 7, *в*), який наближує задану розривну функцію з точністю 0,01. Також визначили відрізки, на яких дана функція має розрив.



а



б



в

Рис. 7 – Результати відновлення розривної функції в прикладі 2: *а*, *б* – проміжні ітерації; *в* – кінцевий результат.

Тобто ми отримали розривний сплайн, який наближує задану розривну функцію з точністю 0,01. Також отримали відрізки, на яких дана функція потерпає розрив.

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають перспективним розвиток теорії наближення розривних функцій багатьох змінних розривними сплайнами та побудову математичних моделей розривних процесів на основі розробленої теорії, оскільки, як вже було зазначено, задачі дослідження процесів, що мають розриви, виникають досить часто.

Наступним кроком автори планують розробити узагальнюючий алгоритм відновлення розривної функції, розриви якої будуть лежати на більш складних лініях.

Висновки. В статті проведене обґрунтування методу виявлення ліній $\varepsilon-$розриву функцій двох змінних за допомогою розривних апроксимаційних сплайнів у вигляді доведених теорем про збіжність ітераційного процесу та кількості ітерацій, що потрібно зробити для виявлення ліній $\varepsilon-$розриву. Викладений метод дозволяє визначити лінії розриву експериментально заданої розривної функції та обрати оптимальні вузли сітки наближуючого розривного білінійного сплайну. Наведені приклади, що підтверджують викладену теорію.

Список літератури

1. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения. – М. : Наука, 1984. – 352 с.
2. *Завьялов Ю. С.*, *Квасов Б. И.*, *Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. – М. : Наука, 1980. – 352с.
3. *Гаврилюк І. П.*, *Макаров В. Л.* Методи обчислень. – К. : Вища школа, 1995. – 367 с.
4. *Попов Б. А.* Равномерное приближение сплайнами. – К. : Наукова думка, 1989. – 272 с.
5. *Петухов А. П.* О приближении разрывных функций в метрике Хаусдорфа // Математические заметки. – 1985. – Т. 32. – № 1. – С. 25 – 40.
6. *Дейнека В. С.* Численное решение краевой задачи, допускающей разрыв решения // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1982. – № 11. – С. 28 – 31.
7. *Дейнека В. С.*, *Сергієнко І. В.*, *Скопецький В. В.* Задачі на власні значення з розривними власними функціями та їх чисельні розв'язки // Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51, № 10. – С. 1317 – 1323.
8. *Дейнека В. С.*, *Сергиенко И. В.* Анализ многокомпонентных распределенных систем и оптимальное управление. – К. : Наукова думка, 2007. – 703 с.
9. *Дейнека В. С.*, *Сергиенко И. В.* Модели и методы решения задач в неоднородных средах. – К. : Наукова думка, 2001. – 606 с.
10. *Дейнека В. С.*, *Сергиенко И. В.* Оптимальное управление неоднородными распределенными системами. – К. : Наукова думка, 2003. – 506с.
11. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Х. : Основа, 2002. – 544 с.
12. *Агеев А. Л.*, *Антонова Т. В.* Регуляризирующие алгоритмы выделения разрывов в некоторых задачах // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48. – № 8. – С. 1362 – 1370.
13. *Агеев А. Л.*, *Антонова Т. В.* Аппроксимация линий разрыва зашумленной функции двух переменных // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2012. – Т.15. – № 1(49). – С. 3 – 13.
14. *Агеев А. Л.*, *Антонова Т. В.* О задаче разделения особенностей // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 11. – С. 1 – 7.
15. *Агеев А. Л.*, *Антонова Т. В.* О локализации разрывов первого рода для функций ограниченной вариации // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2012. – Т.18. – № 1. – С. 56 – 68.
16. *Gottlieb D.*, *Shu C. W.*, *Solomonoff A.*, *Vandeven H.* On the Gibbs phenomenon I: recovering exponential accuracy from the Fourier partial sum of a non-periodic analytic function // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 1992. – N. 43. – P. 81 – 98.
17. *Yin J.*, *De Pierro A. R.*, *Wei M.* Reconstruction of a compactly supported function from the discrete sampling of its Fourier transform // IEEE Transactions on Signal Processing. – 1999. – Vol. 47. – N. 12. – P. 3356 – 3364.
18. *Madja A.*, *McDonough J.*, *Osher S.* The Fourier Method for Nonsmooth Initial Data // Math. Comp. – 1978. – N. 32. – P.1041 – 1081.
19. *Lopez de Silanesa M. C.*, *Parrab M. C.*, *Pasadasc M.*, *Torrensd J. J.* Spline approximation of discontinuous multivariate functions from scattered data // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2001. – N. 131. – P. 281 – 298.
20. *Rossini M.* Detecting discontinuities in two-dimensional signals sampled on a grid // Journal of Numerical Analysis, Industrial and Apply Mathematics. – 2007. – Vol. 1. – N. 1. – P. 1 – 13.
21. *Vainberg E. I.*, *Kazak I. A.*, *Faingoiz M. L.* X-ray computerized back projection tomography with _ltration by double di_erentiation. Procedure and information features // Soviet J. Nondest. Test. – 1985. – N. 21. – P. 106 – 113.
22. *Ramachandran G. N.*, *Lakshminarayanan A. V.* Three-dimensional reconstruction from radiograph and electron micrographs: application of convolutions instead of Fourier transforms // Proc. Nat. Acad. Sci. US. – 1971. – P. 2236 – 2240.
23. *Светов И. Е.*, *Полякова А. П.* Сравнение двух алгоритмов численного решения задач двумерной векторной томографии // Сибирские электронные математические известия. – 2013. –Т. 10. – С. 90 – 108.
24. *Louis A. K.* Feature Reconstruction in inverse problems // Inverse problems. – 2011. – V. 27 – 065010 doi: 10.1088/0266–5611/6/065010.
25. *Tampos A. L.*, *Lope J. E. C.*, *Hesthaven Jan S.* Accurate reconstruction of discontinuous functions using the singular pade-chebyshev method // IAENG International Journal of Applied Mathematics. – 2013. –vol. 42. – num. 4. – P. 242 – 249.
26. *Abdul J.*, *Jerri Ed.* Advances in the Gibbs Phenomenon // Clarkson University Σ Sampling Publishing Potsdam, New York Copyright. – 2011. – 424 p.
27. *Литвин О. М.*, *Першина Ю. І.* Наближення розривної функції розривним сплайном, коли вузли сплайну не збігаються з розривами функції // Праці ІПММ НАН України. – 2012. – Т. 24. – С. 157 – 165.
28. *Литвин О. М.*, *Першина Ю. І.*, *Пасічник В. О.* Дослідження методу знаходження точок розриву першого роду функції однієї змінної // Вісник НТУ «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ». – 2015. – № 6(1115) – С. 67 – 76.
29. *Литвин О. Н.*, *Першина Ю. И.*, *Сергиенко И. В.* Восстановление разрывных функций двух переменных, когда линии разрыва неизвестны (прямоугольные элементы) // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 4. – С. 126 – 134.

References (transliterated)

1. Korneychuk N. P. *Splayny v teorii priblizheniya* [Splines in approximation theory]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 352 p.
2. Zav"yalov Yu. S., Kvasov B. I., Miroshnichenko V. L. *Metody splayn-funktsiy* [Methods of spline function]. Moscow, Nauka publ., 1980. 352 p.
3. Gavrilyuk I. P., Makarov V. L. *Metody obchyslen'* [Methods of computation]. Kyiv, Vyscha shkola Publ., 1995. 367 p.
4. Popov B. A. *Ravnomernoe priblizhenie splaynami* [Uniform approximation by splines]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1989. 272 p.
5. Petukhov A. P. O priblizhenii razryvnykh funktsiy v metrike Khausdorfa [Approximation of discontinuous functions in the Hausdorff metric]. *Matematicheskie zametki* [Math notices]. 1985, vol. 32, no. 1, pp. 25–40.
6. Deyneka B. S. *Chislennoe reshenie kraevoy zadachi, dopuskayuschey razryv resheniya* [Numerical solution of a boundary-value problem admitting a solution discontinuity]. *Dop. AN URSR. Ser. A.* [Reports of the National Academy of Sciences of the USSR]. 1982, no. 11, pp. 28–31.
7. Deyneka V. S., Sergiyenko I. V., Skopets'kyy V. V. Zadachi na vlasni znachennya z rozryvnymy vlasnymy funktsiyamy ta yikh chysel'ni rozv"yazky [Eigenvalue problems with discontinuous eigenfunctions and their numerical solutions]. *Ukrainskiy matematicheskiy zhurnal* [Ukrainian mathematical journal]. 1999, vol. 51, no. 10, pp. 1317–1323.
8. Deyneka V. S., Sergienko I. V. *Analiz mnogokomponentnykh raspredelennykh sistem i optimal'noe upravlenie* [Analysis of multicomponent distributed systems and optimal control]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2007. 703 p.
9. Deyneka V. S., Sergienko I. V. *Modeli i metody resheniya zadach v neodnorodnykh sredakh* [Models and methods for solving problems in inhomogeneous media]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2001. 606 p.
10. Deyneka V. S., Sergienko I. V. *Optimal'noe upravlenie neodnorodnymi raspredelennymi sistemami* [Optimum control of heterogeneous distributed systems]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2003. 506p.
11. Lytvyn O. M. *Interlinatsiya funktsiy ta deyaki yiyi zastosuvannya* [Interlination of functions and some of its applications]. Kharkiv, Osnova Publ., 2002, 544 p.
12. Ageev A. L., Antonova T. V. Regulyariziruyuschie algoritmy vydeleniya razryvov v nekotorykh zadachakh [Regularizing algorithms for isolating discontinuities in some problems]. *Zhurnal vyichislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics]. 2008, vol. 48, no. 8, pp. 1362–1370.
13. Ageev A. L., Antonova T. V. Approksimatsiya liniy razryva zashumlennoy funktsii dvukh peremennykh [Approximation of the lines of discontinuity of a noisy function of two variables]. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki* [Siberian Journal of Industrial Mathematics]. 2012, vol. 15, no. 1 (49), pp. 3–13.

14. Ageev A. L., Antonova T. V. O zadache razdeleniya osobennostey [On the problem of separation of singularities]. *Izvestiya vuzov. Matematika* [Proceedings of universities. Mathematics]. 2007, no. 11, pp. 1–7.

15. Ageev A. L., Antonova T. V. O lokalizatsii razryvov pervogo roda dlya funktsiy ogranichennoy variatsii [On the localization of discontinuities of the first kind for functions of bounded variation]. *Trudy instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN* [Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences]. 2012, vol. 18, no. 1, pp. 56–68.

16. Gottlieb D., Shu C. W., Solomonoff A., Vandeven H. On the Gibbs phenomenon I: recovering exponential accuracy from the Fourier partial sum of a non-periodic analytic function. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1992, no. 43, pp. 81–98.

17. Yin J., De Pierro A. R., Wei M. Reconstruction of a compactly supported function from the discrete sampling of its Fourier transform. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 1999, vol. 47, no. 12, pp. 3356–3364.

18. Madja A., McDonough J., Osher S. The Fourier Method for Nonsmooth Initial Data. *Math. Comp*. 1978, no. 32, pp.1041–1081.

19. Lopez de Silanesa M. C., Parrab M. C., Pasadasc M., Torrensd J. J. Spline approximation of discontinuous multivariate functions from scattered data. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2001, no. 131, pp. 281–298.

20. Rossini M. Detecting discontinuities in two-dimensional signals sampled on a grid. *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Apply Mathematics*. 2007. vol. 1, no. 1, pp. 1–13.

21. Vainberg E. I., Kazak I. A., Faingoiz M. L. X -ray computerized back projection tomography with filtration by double differentiation. Procedure and information features. *Soviet J. Nondest. Test*. 1985, no. 21, pp. 106–113.

22. Ramachandran G. N., Lakshminarayanan A. V. Three-dimensional reconstruction from radiograph and electron micrographs: application of convolutions instead of Fourier transforms. *Proc. Nat. Acad. Sci. US*. 1971, pp. 2236–2240.

23. Svetov I. E., Polyakova A. P. Sravnenie dvukh algoritmov chislennogo resheniya zadach dvumernoy vektornoy tomografii [Comparison of two algorithms for numerical solution of two-dimensional vector tomography problems]. *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya* [Siberian electronic mathematical news]. 2013, vol. 10, pp. 90–108.

24. Louis A. K. *Feature Reconstruction in inverse problems*. Inverse problems. 2011. vol. 27, 065010 doi: 10.1088/0266–5611/6/065010.

25. Tampos A. L., Lope J. E. C., Hesthaven Jan S. Accurate reconstruction of discontinuous functions using the singular Pade-Chebyshev method. *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, 2013, vol. 42, no. 4, pp. 242–249.

26. Abdul J., Jerri Ed. *Advances in the Gibbs Phenomenon*. Clarkson University Σ Sampling Publishing Potsdam, New York Copyright. 2011. 424 p.

27. Lytvyn O. M., Pershyna Yu. I. Nablyzhennya rozryvnoyi funktsiyi rozryvnym splaynom, koly vuzly splaynu ne zbigayut'sya z rozryvamy funktsiy [Approximation of discontinuous functions by discontinuous spline when the spline nodes do not coincide with function breaks]. *Pratsi instytutu matematyky ta mekhaniky NAN Ukrayiny* [Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics of NAS Ukraine]. 2012, vol. 24, pp. 157–165.

28. Lytvyn O. M., Pershyna Yu. I., Pasichnyk V. O. Doslidzhennya metodu znakhodzhennya tochok rozryvu pershoho rodu funktsiyi odniyeyi zminnoyi [The research method of discontinuous points of the first kind functions of one variable]. *Visnyk NTU «KhPI». Zbirnyk naukovykh prats'. Seriya : Matematychne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnolohiyakh* [Bulletin of NTU "KPI". Collected Works. Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. Kharkiv, NTU «KhPI»Publ., 2015, no. 6 (1115), pp. 67–76.

29. Lytvyn O. N., Pershyna Yu. Y., Serhyenko Y. V. Vosstanovlenie razryvnykh funktsiy dvukh peremennykh, kogda linii razryva neizvestny (pryamougol'nye elementy) [Recovering discontinuous functions of two variables, when the lines of discontinuity are unknown (rectangular elements)]. *Kibernetika i sistemnyiy analiz* [Cybernetics and system analysis]. 2014, no. 4, pp. 126–134.

Надійшла (received) 21.03.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Відновлення розривної функції за інтерполяційними даними з використанням прямокутних елементів / Ю. І. Першина, В. О. Пасічник // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 94 – 104. Бібліогр.: 29 назв. – ISSN 2222-0631.

Восстановление разрывной функции по интерполяционным данным с использованием прямоугольных элементов / Ю. И. Першина, В. А. Пасечник // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 94 – 104. Бібліогр.: 29 назв. – ISSN 2222-0631.

Reconstruction of a discontinuous function by interpolation data using rectangular element / Yu. I. Pershina, V. A. Pasichnik // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 6 (1228). – pp. 94 – 104. Bibliog.: 29 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Першина Юлія Ігорівна – доктор фізико-математичних наук, доцент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: yulia_pershyna@ukr.net.

Першина Юлия Игоревна – доктор физико-математических наук, доцент, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: yulia_pershyna@ukr.net.

Pershyna Iuliia Igorevna – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Asistant Professor, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (057) 771-05-45; e-mail: yulia_pershyna@ukr.net.

Пасічник Валентина Олексіївна – кандидат технічних наук, доцент, Харківська державна академія дизайну і мистецтв, м. Харків; тел.: (0507) 285-51-01; e-mail: pasechnik.va@gmail.com.

Пасечник Валентина Алексеевна – кандидат технических наук, доцент, Харьковская государственная академия дизайна и искусств, г. Харьков; тел.: (0507) 285-51-01; e-mail: pasechnik.va@gmail.com.

Pasichnik Valentina Alekseevna – Candidate of Technical Sciences, Asistant Professor, Kharkiv State Academy of Design and Arts, Kharkov; tel.: (0507) 285-51-01; e-mail: pasechnik.va@gmail.com.