УДК 519.6

***Ю. І. ПЕРШИНА, О. В. ШИЛІН***

# ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ ВІДНОВЛЕННЯ ВНУТРІШНЬОЇ СТРУКТУРИ 3D ТІЛА ЗА ВІДОМИМИ ЇЇ ТОМОГРАМАМИ НА СИСТЕМІ ДОВІЛЬНИХ ПЛОЩИН З ВИКОРИСТАННЯМ ІНТЕРФЛЕТАЦІЇ ФУНКЦІЙ

Наведено теорему про інтерфлетаційні властивості оператора відновлення. На її основі побудовано алгоритм для відновленню внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими її томограмами на системі довільних площин з використанням інтерфлетації функцій. Було проведено аналіз останніх досліджень по методам відновлення внутрішньої структури тіла. Також наведено теорему про абсолютну неусувну похибку. Наведені основні випадки виникнення похибки. Виконано чисельну реалізацію методу відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими її томограмами на системі довільних площин з використанням інтерфлетації функцій. Було проведено обчислювальний експеримент для наперед заданого тіла у системі MathCad. У якості томограми використовувалася функція. Наведені графіки функції. Експеримент показав високу точність відновлення. Наведено приклад використання томограми замість функції для відновлення. Далі планується розробити програму для більшої кількості площин та більшої кількості томограм.

**Ключові слова:** інтерфлетація, томограма, відновлення, чисельна реалізація.

Приведена теорема об интерфлетационных свойствах оператора восстановления. На ее основе построен алгоритм для восстановления внутренней структуры трехмерного тела по известным ее томограммам на системе произвольных плоскостей с использованием интерфлетации функций. Был проведен анализ последних исследований методов восстановления внутренней структуры тела. Также приведена теорема об абсолютной неустраняемой погрешности. Приведены основные случаи возникновения погрешности. Выполнена численная реализация метода восстановления внутренней структуры трехмерного тела по известным ее томограммам на системе произвольных плоскостей с использованием интерфлетации функций. Был проведен вычислительный эксперимент для заранее заданного тела в системе MathCad. В качестве томограммы использовалась функция. Приведены графики функции. Эксперимент показал высокую точность восстановления. Приведен пример использования томограммы вместо функции для восстановления. Далее планируется разработка программы для большего количества плоскостей и большего количества томограмм.

**Ключевые слова:** интерфлетация, томограмма, восстановление, численная реализация.

A theorem about interflatation properties of the restoration operator is given in this article. An algorithm of internal structure restoration for a three-dimensional body based on its known tomograms on arbitrary planes using function interflatation is formulated. Analysis of recent research methods for restoration of the body internal structure is conducted. Also a theorem about the absolute permanent error is given. The main cases of error occurrence are outlined. The numerical implementation of the method of restoration of the internal structure of a three-dimensional body based on its known tomograms on arbitrary planes using function interflatation is carried out. A computational experiment for a predesigned body is conducted in the MathCad system. A function is used as a tomogram. Graphs of the function are given. The experiment shows a high level of restoration accuracy. An example of a tomogram used instead of a function for the restoration is proposed. The development of a program for more planes and tomograms is planned.

**Key words:** interflatation, tomogram, restoration, numerical implementation.

**Вступ.** У кінці 20-го – на початку 21-го ст. на розвиток медичної науки та охорони здоров’я значно вплинуло використання математичних методів вивчення і аналізу стану (поведінки) об’єктів і систем.

У біології, медицині та охороні здоров’я до кола явищ, досліджуваних за допомогою математичних методів, входять процеси, що відбуваються на рівні цілісного організму, його систем, органів і тканин (в нормі та при патології); захворювання та способи їх лікування; прилади та системи медичної техніки; біологічні процеси, що відбуваються на молекулярному рівні. Ступінь математизації наукових дисциплін служить об’єктивною характеристикою глибини знань про досліджуваний предмет.

Починаючи з 40-х рр. 20 ст. математичні методи проникають в медицину та біологію через кібернетику та інформатику. Найбільш розвинені вони в біофізиці, біохімії, генетиці, фізіології, медичному приладобудуванні, створенні біотехнічних систем, у медичній техніці.

Кінець 20-го століття відмічений інтенсивним розвитком і широким впровадженням одного з видатних досягнень медичної техніки – *комп’ютерної томографії*. В основі радонівської комп’ютерної томографії лежать теоретичні результати досліджень німецького вченого *Й. Радона* [1], який на початку 20-го ст. розвинув теорію перетворення функцій багатьох змінних (це перетворення зараз відоме як *перетворення Радона*).

Згідно з перетворенням Радона функцію багатьох змінних можна характеризувати не тільки її значеннями у точках багатовимірного простору, але також інтегралами від цієї функції, взятими за нескінченною сукупністю ліній або площин (якщо кількість змінних більше двох). На практиці інформація про функцію може бути отримана тільки у вигляді фіксованого числа вказаних інтегралів, отриманих за деякою скінченною множиною ліній або поверхонь. Тому практична реалізація ідей Й. Радона у вигляді комп’ютерних томографів, що використовують опромінення об’єкта рентгенівськими променями, з’явилася лише в кінці 20-го ст.

На сучасному етапі використання математичних методів у медицині, зокрема у медичній діагностиці, нерозривно пов’язане з візуалізацією внутрішніх структур біомедичних об’єктів. Різні методи візуалізації ґрунтуються на різноманітних фізичних взаємодіях електромагнітного випромінювання з матеріалами, середовищами, біотканинами і, як наслідок, забезпечують вимірювання різних фізичних властивостей об’єктів. До сучасних методів діагностики відносяться рентгенівське дослідження, рентгенівська комп'ютерна томографія, ультразвукове дослідження, магнітно-резонансна томографія, та ін.

Сьогодні лікарі мають змогу візуалізувати стан будь-якого внутрішнього органа людини на плівці або екрані монітора з роздільною здатністю до 1 мм не тільки у двовимірному, але й у тривимірному вигляді (*спіральна комп'ютерна томографія*); віртуально повернути і роздивитися орган у різних ракурсах навіть під час функціонування (наприклад, скорочення серця) в реальному вимірі часу (магнітно-резонансна томографія). Удосконалені можливості тривимірних зображень дали змогу більш ефективно супроводжувати хірургічні та інтервенційні процедури і революціонізували шляхи дослідження патологічних процесів.

За останні десятиліття у сфері комп'ютерної томографії відбулося значне удосконалення алгоритмів, програмних засобів та апаратної реалізації: зросла швидкість, точність та якість візуалізації перетинів досліджуваного тіла на моніторах комп'ютерних томографів. Розвиваються нові напрямки комп'ютерної томографії, в основі яких лежать дещо інші підходи, ніж ті, що витікають безпосередньо з праць Й. Радона – магнітно-резонансна томографія, ультразвукова томографія, оптична томографія та інші види томографічного відновлення, які можуть не використовувати опромінення об'єкта рентгенівськими променями.

Проте, практична реалізація томографічного методу ще далека від оптимальності через ряд причин: наприклад, недостатньо обґрунтованою є кількість проекцій (даних Радона), яку використовують сучасні рентгенівські комп'ютерні томографи для відновлення об'єкта у заданому перетині (тобто не обґрунтована доза опромінення об'єкта); інша причина полягає у тому, що сучасні комп'ютерні томографи при відновленні об'єкта у заданому перетині демонструють *артефакти* – не властиві реальному об'єкту структури – тіні, нечіткість зображення, вкраплення тощо.

У практиці дослідження томографічних зображень часто виникає задача отримання зображення перетину тіла у тих площинах, для яких немає зображення, за відомими зображеннями у деякій сукупності перетинів.

Особливо важливою є задача побудови тривимірних моделей на основі томографічних даних в різні моменти часу. Ця задача є дуже складною у зв'язку з великими масивами інформації, яка використовується на кожному етапі часу, а також у зв'язку з обмеженнями на візуалізацію результатів відновлення в моменти часу, що не співпадають з моментами, для яких представлені експериментальні дані.

Таким чином, актуальною є розробка та дослідження методу відновлення динамічної внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими її томограмами, що поступають з комп'ютерного томографа.

**Аналіз останніх досліджень.** У 1917 р. німецький математик Й. Радон [1] вивів формулу обернення для відображення. У галузі медицини застосування перетворення Радона привело до зародження томографії.

Останнім часом у практиці проведення медичних досліджень широко застосовуються комп'ютерні томографи [2 – 4], які дозволяють відновлювати внутрішню структуру тіла без виконання його розтину. При цьому виник новий клас задач – відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими її томограмами на декількох площинах.

У роботі [5] наведені функції MATLAB, які використовуються при обчисленні і візуалізації прямого і зворотного двовимірного перетворення Радона – математичного методу, що лежить в основі томографії.

У роботі *Л. А. Халфіна* [6] пропонується оригінальний підхід до розв'язання плоскої задачі рентгенівської комп'ютерної томографії, що не використовує пряме та обернене перетворення Радона.

Одна з головних проблем при відновленні внутрішньої структури $3D$ тіла – це *шуми*. У статті [7] наведені результати досліджень фільтрації артефактів і шумів на томографічних зображеннях, які показали високу ефективність застосування комбінованих фільтрів, заснованих на нелінійних методах фільтрації.

У [8] проведено математичне моделювання у надвеликих задачах поширення ультразвукових хвиль. У [9] розробляються масштабовані програми у зворотній задачі ультразвукової томографії.

Дана робота присвячена розв'язанню задачі відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими томограмами, що лежать на системі довільно розташованих площин. Розроблений в статті метод є узагальненням методів, розроблених авторами в роботах [10 – 11] та є більш точним, ніж відомі методи авторів [12 – 14].

У статтях [15, 16] авторами наведено розв'язання 3D задачі комп'ютерної томографії за відомими томограмами на системі довільних площин

***Означення 1.*** Інтерфлетацією функції [17, с. 37] $f(x_1, \dots, x_n)$, яка залежить від $n$ змінних за допомогою її слідів (або слідів її похідних до заданого порядку $\le N$) на $M$ поверхнях розмірності $m$ є відновлення (можливо, наближене) функції $f$ у довільних точках заданої області. Якщо $m = 0$, то таке наближення є загальновідомою інтерполяцією функції за допомогою її значень в $M$ точках (для $n \ge 1$). Якщо $m = 1$ (для $n \ge 2$), то таке наближення називається *інтерлінацією* (інколи *blending function interpolation* – *мішаною інтерполяцією функцій*) на $M$ лініях.

***Означення 2.*** *Слідом функції* $f(x, y, z)$ на площині $\Pi_k : \omega_k(x, y, z) = 0$ будемо називати функцію двох змінних ($(x, y)$ або $(x, z)$, або $(y, z)$, або параметра $t$) $\varphi_k(x, y)$, або $\varphi_k(x, z)$, або $\varphi_k(y, z)$, або $\varphi_k(t) = (x_k(t)$, $y_k(t)$, $z_k(t`)$, яка на кожній точці цієї площини $\Pi_k$ набуває таких самих значень, що і функція $f(x, y, z)$:

$$f\Big|_{\Pi_k} = \varphi_k\Big|_{\Pi_k}, \; k = \overline{1, m}. \tag{1}$$

***Означення 3.*** [10, с. 62]. *Інтерфлетацією функції* $f(x, y, z)$ (від англ. *inter* – між, *flat* – площина) називається відновлення (можливо, наближене) функції $f(x, y, z)$ у точках між площинами $\Pi_k$ : $\omega_k(x, y, z) = 0$ за допомогою її слідів (1) на цих площинах.

***Означення 4.*** [10, с. 65]. Томограмою $\mathrm{T}_k(\overline{x})$ (рис. 1) (слідом функції $f(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ на площині $\omega_k(x) = 0$ за умови, що всі три коефіцієнти не дорівнюють нулю) будемо називати одну з трьох функцій (2):

$$\mathrm{T}_k(\overline{x}) = \begin{cases} f(x_{1k}(x_2, x_3), x_2, x_3) \\ f(x_1, x_{2k}(x_1, x_3), x_3) \\ f(x_1, x_2, x_{3k}(x_1, x_2)) \end{cases} = \begin{cases} f((\gamma_k - a_{k2}x_2 - a_{k3}x_3)/a_{k1}, x_2, x_3), \ a_{k1} \neq 0 \\ f(x_1, (\gamma_k - a_{k1}x_1 - a_{k3}x_3)/a_{k2}, x_3), \ a_{k2} \neq 0 \\ f(x_1, x_1, (\gamma_k - a_{k1}x_1 - a_{k2}x_2)/a_{k3}), \ a_{k3} \neq 0 \end{cases} \overline{x} = \begin{cases} (x_1, x_2), \ \ x_3 = 0 \\ (x_1, x_3), \ \ x_2 = 0 \\ (x_2, x_3), \ \ x_1 = 0 \end{cases}; \quad (2)$$

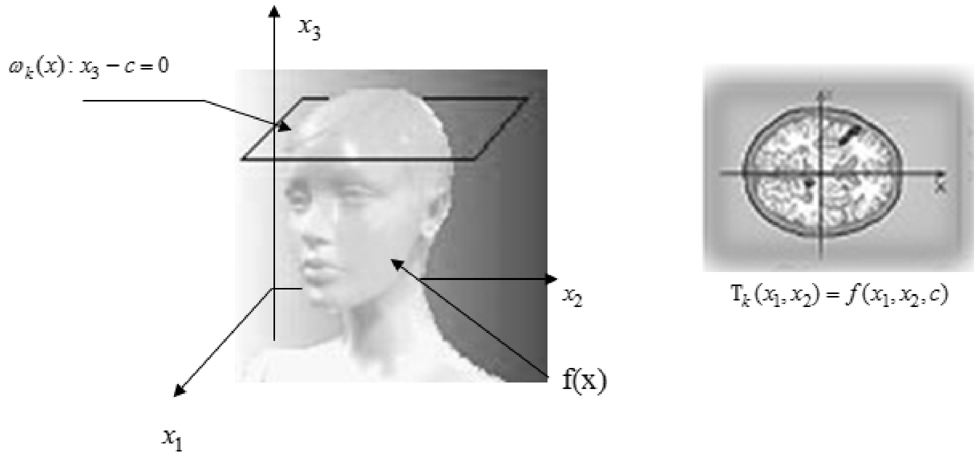


Рис. 1 – Графічна ілюстрація поняття томограми.

***Теорема 1.*** [15, с. 235] *Оператор* $L_{ikl}(x) \in C(R^3)$ *вигляду*

$$L_{ikl}(x) = [L_{ik}^l + L_{kl}^i + L_{li}^k - L_{li}^k L_{kl}^i - L_{kl}^i L_{li}^k - L_{li}^k L_{ik}^l + L_{ik}^l L_{kl}^i L_{li}^k](x),$$

*де*

$$L_{ik}^l(x) = T_l(u_{ik}^l(x)), \ L_{ik}^l L_{kl}^i(x) = T_l(w_k(x)), \ \ L_{ik}^l L_{kl}^i L_{li}^k(x) = T_k(\overline{x})\Big|_{\omega_i(x)=0, \ \omega_l(x)=0}.$$

*є оператором інтерфлетації функції трьох змінних, побудованим на трьох площинах, тобто задовольняє умовам* $T_k(\overline{x}) \in C^r(R^2)$, $r \geq 0$ *та умовам С. М. Нікольського* [18, с. 183], *які на ребрі* $\Gamma_{kl}$ *зводяться до перевірки рівностей*:

$$T_k(u_{li}^k(x))\Big|_{\omega_l(x)=0} = T_l(u_{il}^l(x))\Big|_{\omega_k(x)=0},$$

*тобто значення томограм на лінії перетину повинні співпадати для всіх томограм, що перетинаються. Аналогічний вигляд мають ці умови на ребрах* $\Gamma_{ik}, \Gamma_{li}$.

В точці $V_{ikl}$ *умови Нікольського* [18] зводяться до перевірки рівностей

$$T_l(u_{ik}^l(x))\Big|_{\omega_i(x)=0, \omega_k(x)=0} = T_k(u_{li}^k(x))\Big|_{\omega_l(x)=0, \omega_i(x)=0} = T_i(u_{kl}^i(x))\Big|_{\omega_k(x)=0, \omega_l(x)=0},$$

***Теорема 2.*** *Нехай внутрішня структура тривимірного тіла описується функцією* $f(x) \in C^r(\Omega)$ $(r \geq 3)$, *яка має томограми* $\mathrm{T}_k(\overline{x})$, $k = \overline{1, N}$, *задані на площинах* $\Pi_k$ *відповідно, та задовольняє умови* $f(x)\big|_{\Pi_s} = T_s(\overline{x})\big|$. *Тоді для похибки* $R_{ikl} f(x) = (I - L_{ikl}) f(x)$ *наближеного відновлення внутрішньої структури* $f(x)$ *оператором* $L_{ikl}(x)$, *побудованим за допомогою даного набору площин та томограм, виконується рівність*

$$R_{ikl} f(x) = \int_0^{\omega 1_i} \int_0^{\omega 2_k} \int_0^{\omega 3_l} \frac{\partial^3}{\partial t_i \, \partial t_k \, \partial t_l} f\left(V_{ikl} + \frac{\tau_{kl}}{\Delta_{kli}} t_i + \frac{\tau_{li}}{\Delta_{lik}} t_k + \frac{\tau_{ik}}{\Delta_{ikl}} t_l\right) dt_i \, dt_k \, dt_l. \quad (3)$$

**Похибка відновлення.**

***Теорема 3.*** *Абсолютна неусувна похибка* $E$ *побудованого інтерфлетанта в припущені, що* $f(x, y, z)$ *на площинах* $\Pi_k$, *тобто відповідні томограми задані наближено* $\delta_k$, *тобто*

$$\left| T_k(\overline{x}) - \tilde{T}_k(\overline{x}) \right| \leq \delta_k, \ k = \overline{1, n},$$

*а також* $\left| T_k(\bar{x})\Big|_{\Pi_i} - \tilde{T}_k(\bar{x})\Big|_{\Pi_i} \right| \le \delta_{ki}$, $k = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, m}$, $\left| T_k(\bar{x})\Big|_{\omega_i(x)=0, \omega_l(x)=0} - \tilde{T}_k(\bar{x})\Big|_{\omega_i(x)=0, \omega_l(x)=0} \right| \le \delta_{kil}$,

*дорівнює*

$$E \le \sum_{(i,k,l)\in M} \delta_i + \delta_k + \delta_l + \delta_i\delta_k + \delta_i\delta_l + \delta_k\delta_l + \delta_i\delta_k\delta_l \, .$$

**Чисельний експеримент.** За теоремою 1 було проведено обчислювальний експеримент для наперед заданого тіла. Для його проведення було розроблено комплекс програм у системі комп’ютерної математики MathCad. Результати експерименту демонструють високу точність відновлення.

Продемонструємо результати роботи програми (*circle*), яка зображує чисельну реалізацію методу відновлення. Програма побудована на основі оператора сплайн-інтерфлетації.

Пропонуються результати візуалізації точного розв’язку та розв’язку, отриманого експериментально, для випадку, коли відома точна функція. У випадку, який розглядається у прикладі, функція $f1(x, y, z)$ є томограмою.

Нехай є функція, наприклад, такого вигляду (4):

$$f1(x,y,z) := \left| \begin{array}{l} 0 \, if\,(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 + (z-0.5)^2 \le 0.2^2 \\ 2 \, if\,(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 + (z-0.5)^2 \cap (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 + (z-0.5)^2 \le 0.2^2 \\ 3 \, if\,(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 + (z-0.5)^2 > 0.5^2 \\ 0 \, otherwise \end{array} \right. . \qquad (4)$$

Функцію (4) задано на області відновлення від 0 до 1 з кроком 0,1.

Нижче представлено графіки функції $f1(x, y, z)$ (рис. 2), яка лежить на площинах.

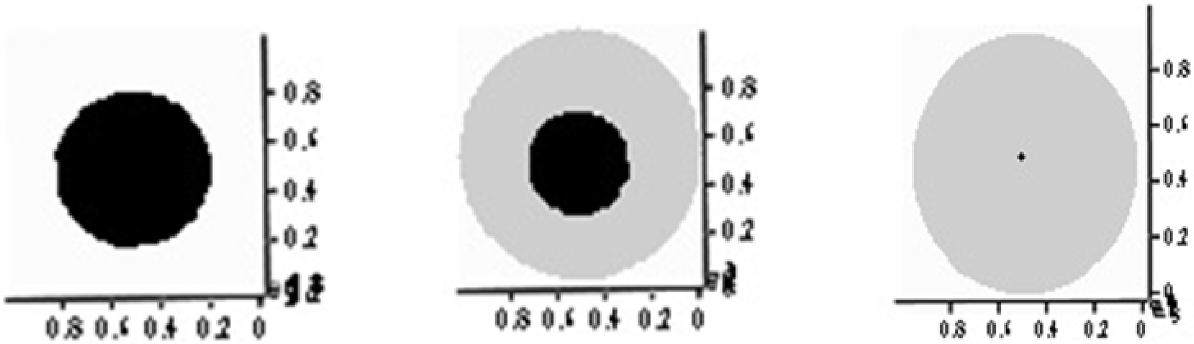


Рис. 2 – Графіки функції $f1(x, y, z)$.

Будуємо оператор сплайн-інтерфлетації на взаємно перпендикулярних лініях $LLL(x, y, z)$, $H(k,t)-$ (допоміжний *поліном Лагранжа* (рис. 3).

$$H(k,t) := \left| \begin{array}{l} s \leftarrow 1 \\ \text{for } j \in 0..n \\ \quad \left| \begin{array}{l} s \leftarrow s \cdot \dfrac{t - X_j}{X_k - X_j} \ \text{ if } j \ne k \\ s \leftarrow s \ \text{ otherwise} \\ s \end{array} \right. \\ s \end{array} \right.$$

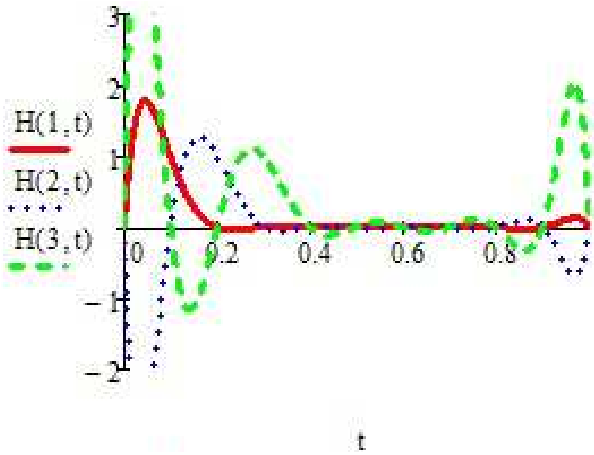


Рис. 3 – Допоміжний поліном Лагранжа та його графік на трьох площинах.

Результати роботи оператора $LLL$ представлені нижче (рис. 4).

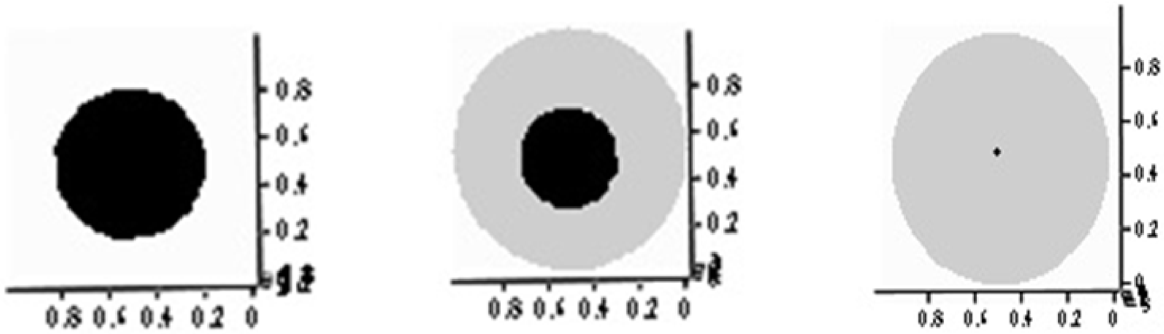

Рис. 4 – Результати роботи оператора $LLL$ .

Виконаємо перевірку точності відновлення функції.

Для цього порівняємо матриці значень базової функції і побудованого оператора сплайн-інтерфлетації (рис. 5).

```
L2(x) :=  for i ∈ 0..10
            for j ∈ 0..10
                y ← i/10
                z ← i/10
                AA_{i,j} ← f1(x,y,z)
          AA
```

```
L3(x) :=  for i ∈ 0..10
            for j ∈ 0..10
                y ← i/10
                z ← i/10
                AA_{i,j} ← LLL(x,y,z)
          AA
```

L2(0.5) − L3(0.5) =

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Рис. 5 – Перевірка точності відновлення функції.

Також перевіримо максимуми і минимуми базової функції і побудованого оператора сплайн-інтерфлетації:

$$\max(L2(0.45)) = 3, \max(L3(0.45) = 3, \min(L2(0.45)) = 0, \min(L3(0.45)) = 0.$$

Отже, побудований оператор сплайн-інтерфлетації точно наближує задану функцію.

Також можливе використання томограми замість функції. Результати можна побачити на рис. 6 – 7.

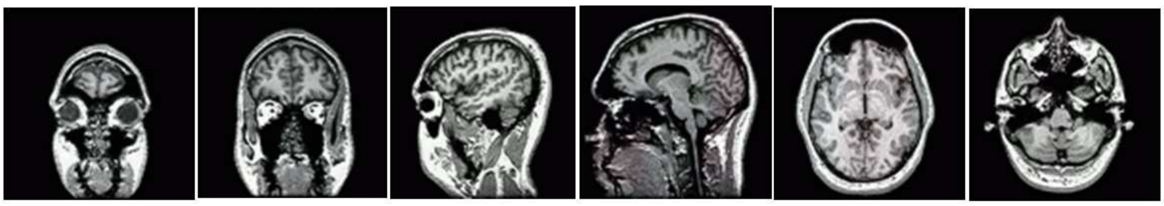

Рис. 6 – Приклади томограм, що використовуються для відновлення.

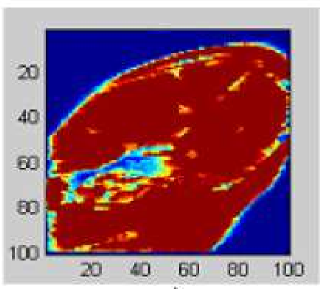


Рис. 7 – Результати відновлення щільності $f(x, y, z)$ запропонованим методом в площині $x + y + 10z = 0$ .

**Перспективи подальших досліджень.** Автори вважають перспективним розвиток методу відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими її томограмами на системі довільних площин з використанням інтерфлетації функцій, оскільки, як вже було зазначено, задачі з відновлення внутрішньої структури $3D$ тіла є дуже актуальними.

Наступним кроком автори планують розробити програму для більшої кількості площин.

**Висновки.** З чисельного експерименту робимо висновок, що побудований оператор сплайн-інтерфлетації за відомими томограмами (слідами) на системі довільно розташованих площин точно відновив функцію, чого неможливо досягнути за допомогою операторів інтерполяції, які використовуються в сучасних методах комп'ютерної томографії. Але для запобігання похибки (шумів) треба більш точно фіксувати об'єкт та задавати більш короткий інтервал між проекціями.

Викладений метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою операторів інтерфлетації у випадку відомих томограм, що лежать на системі довільних площин, є узагальненням розробленого авторами методу відновлення за відомими томограмами на системі трьох груп перерізаних площин і має таку ж високу точність.

**Список літератури**


1. *Radon J.* Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralverte langs gewisser Manningfaltigkeiten. Berichte Sachsische Academie der Wissenschaften. – Leipzig, Mathem. – Phys. – K1, 69, 1917. – P. 262 – 267.
2. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии (пер. с англ.). – М. : Мир, 1990. – 279 с.
3. *Хермен Г.* Восстановление изображений по проекциям: основы реконструктивной томографии (пер. с англ.). – М. : Мир, 1983. – 350 с.
4. *Хелгасон С.* Преобразование Радона (пер. с англ.). – М. : Мир, 1983. – 152 с.
5. *Доля П. Г.* Математические методы компьютерной томографии // Харьковский национальный университет, мех.-мат. факультет. – Харьков : ХНУ, 2012. – 65 с.
6. *Халфин Л. А.* Об одной альтернативе традиционной вычислительной томографии // Зап. научн. семин. ЛОМИ. – Ленинград : Наука, 1990. – С. 271 – 278.
7. *Ласьков В. В., Симонов Е. Н.* Методы фильтрации изображений в рентгеновской компьютерной томографии // Вестник ЮУрГУ. Серия : «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – Челябинск : Южно-Уральский государственный университет, 2014. – Т.14. – № 3 – С. 29 – 33.
8. *Агаян Г. М., Воеводин В. В., Романов С. Ю.* О применимости послойных моделей в решении трехмерных задач ультразвуковой томографии // Вычислительные методы и программирование. – М. : МГУ, 2013. – Т. 14. – С. 533 – 542.
9. *Воеводин В. В., Овчинников С. Л., Романов С. Ю.* Разработка высокоэффективных масштабируемых программ в задаче ультразвуковой томографии // Вычислительные методы и программирование. – М. : МГУ, 2012. – Т. 13. – С. 307 – 315.
10. *Сергієнко І. В., Литвин О. М., Першина Ю. І.* Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням інтерфлетації функцій // Монографія. – Харків, 2008. – 160 с.
11. *Литвин О. М., Першина Ю. І.* Математична модель відновлення внутрішньої структури тривимірного об'єкта за відомими його томограмами з використанням інтерфлетації функцій // Доповіді НАНУ. – 2005. – №1. – С. 20 – 24.
12. *Likhachev A. V., Pickalov V. V.* A new method for deriving unknown additive background in projection in three-dimensional tomography // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2002. – Vol. 42. – № 3. – P. 341 – 352.
13. *Трофимов О. Е., Тюренкова Л. В.* Об одном способе восстановления изображения по многоракурсной томограмме. – Новосибирск : ИА Э СО АН СССР, 1989. – 28 с.
14. *Пикалов В. В., Лихачев А. В.* Сравнение алгоритмов спиральной томографии // Вычислительные методы программирования. –2004. – № 5. – С. 170 – 183.
15. *Першина Ю. І., Шилін О. В.* Відновлення внутрішньої структури $3D$ об'єкта за відомими томограмами на системі довільних площин // Інформатика та системні науки (ІСН – 2016) : матеріали VII Всеукраїнської науково-практичної конференції за міжнародною участю, (м. Полтава, 10 – 12 березня 2016 р.). – Полтава : ПУЕТ, 2016. – С. 233 – 236.
16. *Першина Ю. І., Шилін О. В., Пасічник В. О.* Розв'язання $3D$ задачі комп'ютерної томографії за відомими томограмами на системі довільних площин // Штучний інтелект. – К. : 2015, № 3 – 4. – С. 60 – 69.
17. *Литвин О. М., Матвєєва С. Ю., Межуєв В. І.* Метамодель для математичного моделювання поверхні тіла на основі даних радіолокації // Управляющие системы и машины. – Бердянськ : Бердянський державний педагогічний університет, 2010. – № 3. – С. 33–46.
18. *Никольский С. М.* Граничные свойства функций, определенных на области с угловыми точками // Математический сборник. – 1958. – Т. 45 (87). № 2. – С. 181 – 194.


**References (transliterated)**


1. Radon J. Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralverte langs gewisser Manningfaltigkeiten. Berichte Sachsische Academie der Wissenschaften [On the determination of functions by their integral values in certain spheres. Reports for the Academy of Sciences]. *Leipzig. Mathem.* Publ., 1917, pp. 262–267.
2. Natterer F. *Matematicheskie aspekty kompyuternoy tomografii* [Mathematical aspects of computer tomography]. Moscow, Mir, 1990. 279 p.
3. Hermen G. *Vosstanovlenie izobrazheniy po proektsiyam: osnovy rekonstruktivnoy tomografii* [Image restoration by projections: fundamentals of restoration tomography]. Moscow, Mir Publ., 1983. 350 p.
4. Helgason S. *Preobrazovanie Radona* [Radon transformation]. Moscow, Mir Publ., 1983. 152 p.
5. Dolya P. G. *Matematicheskie metodyi komp'yuternoy tomografii* [Mathematical methods of computer tomography]. Kharkiv, KHNU Publ., 2012. 65 p.
6. Halfin L. A. Ob odnoy al'ternative traditsionnoy vychislitel'noy tomografii [On an alternative for traditional computational tomography]. *Zap. nauchn. semin. LOMI* [Mathematical notes of Leningrad Department of Mathematics University]. Leningrad, Nauka Publ., 1990, pp. 271–278.
7. Lyas'kov V. V., Simonov E. N. Metody fil'tratsii izobrazheniy v rentgenovskoy komp'yuternoy tomografii [Methods of image filtration in X-ray computer tomography]. *Vestnik YuUrGU. Seriya «Komp'yuternye tekhnologii, upravlenie, radioelektronika»* [Bulletin of SUSU. Series: «Computer technologies, control, radioelectronics»]. Chelyabinsk, Yuzhno-Ural'skiy gosudarstvennyy universitet Publ., 2014, vol. 14, no. 3, pp. 29–33.
8. Agayan G. M., Voevodin V. V., Romanov S. Yu. O primenimosti posloynykh modeley v reshenii trekhmernykh zadach ul'trazvukovoy tomografii

[On using layered models for solving 3*D* problems of ultrasonic tomography]. *Vychislitel'nye metody i programmirovanie* [Computational methods and programming]. Moscow, MGU Publ., 2013, vol. 14, pp. 533–542.

**9.** Voevodin V. V., Ovchinnikov S. L., Romanov S. Yu. Razrabotka vysokoeffektivnykh masshtabiruemykh programm v zadache ul'trazvukovoy tomografii [Development of efficient scalable programs for ultrasonic tomography problems]. *Vychislitel'nye metody i programmirovanie* [Computational methods and programming]. Moscow, MGU Publ., 2012, vol. 13, pp. 307–315.

**10.** Sergiyenko I. V., Lytvyn O. M., Pershyna Yu. I. *Matematychne modelyuvannya v komp'yuterniy tomografiyi z vykorystannyam interfletatsiyi funktsiy : monografiya* [Mathematical modeling in computer tomography with the use of function interflatation : monograph]. Kharkiv, 2008. 160 p.

**11.** Lytvyn O. M., Pershyna Yu. I. Matematychna model' vidnovlennya vnutrishn'oyi struktury tryvymirnogo ob"yekta za vidomymy yogo tomogramamy z vykorystannyam interfletatsiyi funktsiy [Mathematical model of internal structure restoration for a 3*D* object internal structure restoration using function interflatation]. *Dopovidi NANU* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2005, no. 1, pp. 20–24.

**12.** Likhachev A. V., Pickalov V. V. A new method for deriving unknown additive background in projection in three-dimensional tomography. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2002, vol. 42, no. 3, pp. 341–352.

**13.** Trofimov O. E., Tyurenkova L. V. *Ob odnom sposobe vosstanovleniya izobrazheniya po mnogorakursnoy tomogramme* [On a method for image restoration based on multiangle tomogram]. Novosibirsk, IA E SO AN SSSR Publ., 1989. 28 p.

**14.** Pikalov V. V., Likhachev A. V. Sravnenie algoritmov spiral'noy tomografii [Comparison of spiral tomography algorithms]. *Vychislitel'nye metody programmirovaniya* [Computational programming methods]. 2004, no. 5, pp. 170–183.

**15.** Pershyna Yu. I., Shylin O. V. Vidnovlennya vnutrishn'oyi struktury 3*D* ob"yekta za vidomymy tomogramamy na systemi dovil'nykh ploshchyn [A 3*D* object internal structure restoration by known tomograms on a system of arbitrary planes]. *Informatyka ta systemni nauky (ICH – 2016) : materially VII Vseukrayins'koyi naukovo-praktychnoyi konferentsiyi za mizhnarodnoyu uchastyu (Poltava, 10 – 12 bereznya 2016)* [Інформатика та системні науки (ІСН – 2016) : матеріали VII Всеукраїнської науково-практичної конференції за міжнародною участю, (м. Полтава, 10 – 12 березня 2016 р.)]. Poltava, PUET Publ., 2016, pp. 233–236.

**16.** Pershyna Yu. I., Shylin O. V., Pasichnyk V. O. Rozv"yazannya 3*D* zadachi komp"yuternoyi tomografiyi za vidomymy tomogramamy na systemi dovil'nykh ploshchyn [Solution for the 3D problem of computer tomography by known tomograms on the system of arbitrary planes]. *Shtuchnyy intelekt* [Artificial intelligence]. Kyiv, 2015, no. 3–4, pp. 60–69.

**17.** Lytvyn O. M., Matvyeyeva S. Yu., Mezhuyev V. I. Metamodel' dlya matematychnogo modelyuvannya poverkhni tila na osnovi danykh radiolokatsiyi [A metamodel for mathematical modeling of the object surface based on radiolocation data]. *Upravlyauschie sistemy i maschyny* [Managed systems and machines]. Berdyansk, Berdyans'kyy derzhavnyy pedagogichnyy universytet Publ., 2010, no. 3, pp. 33–46.

**18.** Nikol'skiy S. M. Granichnye svoystva funktsiy, opredelennykh na oblasti s uglovymi tochkami [Boundary properties of functions determined on a corner point domain]. *Matematicheskiy sbornik* [Mathematical digest]. 1958, vol. 45 (87), no. 2, pp. 181–194.

*Надійшла (received) 16.03.2017*

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

**Чисельна реалізація методу відновлення внутрішньої структури 3D тіла за відомими її томограмами на системі довільних площин з використанням інтерфлетації функції / Ю. І. Першина, О. В. Шилін** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 105 – 111. Бібліогр.: 18 назв. – ISSN 2222-0631.

**Численная реализация метода восстановления внутренней структуры 3D тела по известным её томограмам на системе произвольных плоскостей с использованием интерфлетации функции / Ю. И. Першина, А. В. Шилин** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 105 – 111. Бібліогр.: 18 назв. – ISSN 2222-0631.

**Numerical implementation of the method of a 3D body internal structure restoration based on its known tomograms on arbitrary planes using function interflatation / Iu. I. Pershyna, O. V. Shylin** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 6 (1228). – pp. 105 – 111. Bibliog.: 18 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

***Першина Юлія Ігорівна*** – доктор фізико-математичних наук, доцент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: yulia_pershyna@ukr.net.

***Першина Юлия Игоревна*** – доктор физико-математических наук, доцент, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (057) 771-05-45; e-mail: yulia_pershyna@ukr.net.

***Pershyna Iuliia Igorevna*** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Asistant Professor, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (057) 771-05-45; e-mail: yulia_pershyna@ukr.net.

***Шилін Олександр Вікторович*** – аспірант, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (095) 463-90-61; e-mail: sh.aleks783@gmail.com.

***Шилин Александр Викторович*** – аспирант, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков; тел.: (095) 463-90-61; e-mail: sh.aleks783@gmail.com.

***Shylin Oleksandr Viktorovich*** – Postgraduate Student, Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy, Kharkov; tel.: (095) 463-90-61; e-mail: sh.aleks783@gmail.com.