УДК 517.968.519.6

Т. С. ПОЛЯНСКАЯ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО РОДА С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЯДРОМ, ЗАДАННОЕ НА СИСТЕМЕ ИНТЕРВАЛОВ

Розглянуто інтегральне рівняння першого роду з логарифмічним ядром, до якого наводить ряд задач дифракції хвиль. Це рівняння зведено до системи інтегральних рівнянь на відрізку. Проведена дискретизація цієї системи на основі методу дискретних особливостей. Введені пари гільбертових просторів і оператори у них, відповідні заданій і дискретної задачам. З їх допомогою доведена однозначна розв'язність дискретної задачі і дано строге обгрунтування оцінки швидкості збіжності рішення дискретної задачі до точного рішення інтегрального рівняння.

Ключові слова: інтегральні рівняння, логарифмічне ядро, метод дискретних особливостей.

Рассмотрено интегральное уравнение первого рода с логарифмическим ядром, к которому приводит ряд задач дифракции волн. Это уравнение сведено к системе интегральных уравнений на отрезке. Проведена дискретизация этой системы на основе метода дискретных особенностей. Введены пары гильбертовых пространств и операторы в них, соответствующие заданной и дискретной задачам. С их помощью доказана однозначная разрешимость дискретной задачи и дано строгое обоснование оценки скорости сходимости решения дискретной задачи к точному решению интегрального уравнения.

Ключевые слова: интегральные уравнения, логарифмическое ядро, метод дискретных особенностей.

We consider an integral equation of the first kind with a logarithmic kernel, which arises in a number of problems of wave diffraction. This equation is reduced to a system of integral equations on a segment. Discretization of this system is carried out on the basis of the method of discrete singularities. A pair of Hilbert spaces and operators in them corresponding to predetermined and discrete problems is introduced. With their help, we prove the unique solvability of the discrete problem and give a rigorous justification of the rate of convergence of the solution of the discrete problem to the exact solution of the integral equation.

Key words: integral equations, logarithmic kernel, the method of discrete singularities.

Введение и постановка задачи. Ряд задач математической физики приводит к необходимости решать интегральные уравнения и системы интегральных уравнений первого рода с логарифмическими особенностями [1]. В статье рассмотрен и обоснован численный метод дискретных особенностей [2, 3] решения таких интегральных уравнений на сис-теме интервалов.

Рассматривается интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi}\int_S F(x)\ln|x-x_0|\,dx+\frac{1}{\pi}\int_S K(x_0,x)F(x)\,dx=f(x_0),\ x_0\in S \tag{1}$$

относительно неизвестной функции $F(x)$. Здесь $S=\bigcup_{i=1}^{m}(a_i,b_i)$, $-\infty<a_1<b_1<\ldots<a_m<b_m<+\infty$, ядро $K(x_0,x)$ – достаточно гладкое.

Обозначим:

$F_j(x)=F(x)$ при $x\in(a_j,b_j)$, $j=\overline{1,m}$, $f_i(x_0)=f(x_0)$ при $x_0\in(a_i,b_i)$, $i=\overline{1,m}$, $K_{ij}(x_0,x)=K(x_0,x)$ при $x_0\in(a_i,b_i)$, $x\in(a_j,b_j)$, $i,\ j=\overline{1,m}$.

Тогда уравнение (1) эквивалентно системе интегральных уравнений

$$\sum_{j-1}^{m}\frac{1}{\pi}\int_{a_j}^{b_j}F_j(x)\ln|x-x_0|dx+\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int_{a_j}^{b_j}K_{ij}(x_0,x)F_j(x)\,dx=f_j(x_0),\quad x_0\in(a_i,b_i),\quad i=\overline{1,m}. \tag{2}$$

Выражение $|x-x_0|$ обращается в нуль тогда и только тогда, если x и x_0 принадлежат одному и тому же интервалу, то есть при $j=i$.

Поэтому систему (2) можно переписать следующим образом

$$\frac{1}{\pi}\int_{a_i}^{b_i}F_i(x)\ln|x-x_0|\,dx+\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int_{a_j}^{b_j}\Big[K_{ij}(x_0,x)+(1-\delta_{ij})\ln|x-x_0|\Big]F_j(x)\,dx=f_i(x_0),\quad x_0\in(a_i,b_i),\quad i=\overline{1,m}. \tag{3}$$

Функции $F_i(x)$ ищем (из физических соображений) в таком виде:

$$F_i(x)=\frac{u_i(x)}{\sqrt{(x-a_i)(b_i-x)}},\ i=\overline{1,m}.$$

Тогда система (3) принимает вид

$$\frac{1}{\pi}\int_{a_i}^{b_i}\frac{u_i(x)}{\sqrt{(x-a_i)(b_i-x)}}\ln|x-x_0|\,dx+\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int_{a_j}^{b_j}\Big[K_{ij}(x_0,x)+(1-\delta_{ij})\ln|x-x_0|\Big]\frac{u_i(x)}{\sqrt{(x-a_j)(b_j-x)}}=f_i(x_0),$$

$$x_0\in(a_i,b_i),\quad i=\overline{1,m}. \tag{4}$$

Обозначим $\varphi_k(t)=\frac{1}{2}\left[(b_k-a_k)t+a_k+b_k\right]$ и произведём в системе (2) замену переменных:

$$x=\varphi_i(t) \text{ при } x\in(a_i,b_i),\ -1<t<1,\ i=\overline{1,m},$$
$$x_0=\varphi_i(t_0) \text{ при } x_0\in(a_i,b_i),\ -1<t_0<1,\ i=\overline{1,m}.$$

Тогда при $x\in(a_i,b_i)$, $x_0\in(a_i,b_i)$ имеем равенство $\ln|x-x_0|=\ln|t-t_0|+\ln\left|\frac{1}{2}(b_i-a_i)\right|$ $|t|<1$, $|t_0|<1$.

Далее, при $x\in(a_i,b_i)$ получаем $\frac{dx}{\sqrt{(x-a_i)(b_i-x)}}==\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Система (4) после такой замены принимает следующий вид:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u_i(\varphi_i(t))}{\sqrt{1-t^2}}\left(\ln|t-t_0|+\ln\left|\frac{1}{2}(b_i-a_i)\right|\right)dt+\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[K_{ij}(\varphi_i(t_0),\varphi_j(t))+(1-\delta_{ij})\ln\left|\varphi_j(t)-\varphi_i(t_0)\right|\right]\frac{u_j(\varphi_j(t))}{\sqrt{1-t^2}}=$$
$$=f_i(\varphi_i(t_0)),\ |t_0|<1,\ i=\overline{1,m}.$$

Введём обозначения: $v_i(t)=u_i(\varphi_i(t))$, $i=\overline{1,m}$, $f_i(\varphi_i(t_0))=g_i(t_0)$, $i=\overline{1,m}$, $Q_{ij}(t_0,t)=K_{ij}(\varphi_i(t_0),\varphi_j(t))+$ $+(1-\delta_{ij})\ln\left|\varphi_j(t)-\varphi_i(t_0)\right|+\delta_{ij}\ln\left|\frac{1}{2}(b_i-a_i)\right|$, $i,\ j=\overline{1,m}$.

В результате получим систему

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{v_i(t)}{\sqrt{1-t^2}}\ln|t_0-t|\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}Q_{ij}(t_0,t)\frac{v_j(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=g_i(t_0),\ \ |t_0|<1,\ \ i=\overline{1,m}. \qquad (5)$$

Здесь предполагается, что $g_i(t_0)\in C^{\mu,\gamma}_{[-1,1]}$, $Q_{ij}(t_0,t)\in C^{\mu,\gamma}_{[-1,1]}$ по каждой из переменных равномерно относительно другой переменной $(i,\ j=\overline{1,m})$. Через $C^{\mu,\gamma}_{[-1,1]}$ обозначен класс μ раз непрерывно дифференцируемых на $[-1,1]$ функций, $\mu-$е производные которых удовлетворяют *условию Гёльдера* с показателем γ $(0<\gamma\le 1)$.

Введём вектор-функции $\vec{v}(t)=\{v_i(t)\}_{i=1}^{m}$ и $\vec{g}(t_0)=\{g_i(t_0)\}_{i=1}^{m}$ и операторы

$$\left(\hat{B}\vec{v}\right)(t_0)=\left\{(Bv_i)(t_0)\right\}_{i=1}^{m}\equiv\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{v_i(t)}{\sqrt{1-t^2}}\ln|t-t_0|\,dt\right\}_{i=1}^{n},$$

$$\left(\hat{Q}\vec{v}\right)(t_0)=\left\{\sum_{j=1}^{m}\left(Q_{ij}v_j\right)(t_0)\right\}_{i=1}^{m}\equiv\left\{\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{m}\int_{-1}^{1}Q_{ij}(t_0,t)v_j(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt\right\}_{i=1}^{m}.$$

Тогда систему (5) можно записать в операторном виде $\left(\hat{B}+\hat{Q}\right)\vec{v}=\vec{g}$.

Оператор $\hat{B}+\hat{Q}$ в рассматриваемых задачах является непрерывно обратимым в паре пространств $\left(\overline{L}^2_{[-1,1]},\ \overline{L}^2_{[-1,1]}\right)$, где $\overline{L}^2_{[-1,1]}$ – гильбертово пространство вектор-функций $\{v_i(t)\}_{i=1}^{m}$ со скалярным произведением

$$(\vec{u},\vec{v})_I=\sum_{i=1}^{m}\int_{-1}^{1}u_i(t)\bar{v}_i(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}};$$

$\|\vec{u}\|_I$ – норма, порождённая этим скалярным произведением.

Дискретизация системы. Приближённое решение системы (5) ищем в виде вектор-функции

$$\vec{v}_{\bar{n}}(t)=\left\{v_{ni-1}(t)\right\}_{i=1}^{m}\ \ \left(\bar{n}=(n1,n2,...,nm)\right),$$

где $v_{ni-1}(t)\equiv(P_{ni-1}v_i)(t)$ – интерполяционный полином Лагранжа с узлами интерполирования $\{t_{ki}\}_{ki=1}^{ni}=$ $=\left\{\cos\frac{2ki-1}{2ni}\pi\right\}_{ki=1}^{ni}$, из системы интегральных уравнений

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{v_{ni-1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\ln|t-t_0|\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{m}\int_{-1}^{1}\left(P_{ni-1t_0}P_{nj-1t}Q_{ij}\right)(t_0,t)\frac{v_{nj-1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=g_{ni-1}(t_0),\ \ i=\overline{1,m}. \qquad (6)$$

Здесь $g_{ni-1}(t_0)=(P_{ni-1}g_i)(t_0)$.

Рассматривая $i-$е уравнение $(i=\overline{1,m})$ системы (6) в узлах интерполирования многочлена $(P_{ni-1}g_i)(t_0)$ – точках $\{t_{ki}\}_{ki=1}^{ni}$, получаем систему

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{v_{ni-1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\ln|t-t_{ki}|+\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{m}\int_{-1}^{1}\left(P_{ni-1t_0}P_{nj-1t}Q_{ij}\right)(t_{ki},t)\frac{v_{nj-1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=g_{ni-1}(t_{ki}),\ ki=\overline{1,ni},\ i=\overline{1,m}.$$

Вычислим в этой системе интегралы с помощью следующих квадратурных формул [4]:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}v_{n-1}(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}v_{n-1}(t_k),\ \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|x-x_0|v_{n-1}(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}v_{n-1}(t_k)\left[\ln 2+2\sum_{p=1}^{n-1}T_p(x_0)\frac{T_p(t_k)}{p}\right],\quad (7)$$

где $v_{n-1}(x)$ – алгебраический полином степени $n-1$, причём

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}v_{2n-1}(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}v_{2n-1}(t_k)$$

то есть фомула (7) остаётся верной для полиномов степени не выше $2n-1$. Учитывая, что

$$\left(P_{ni-1t_0}P_{nj-1t}Q_{ij}\right)(t_{ki},t_{rj})=Q_{ij}(t_{ki},t_{rj}),\ g_{ni-1}(t_{ki})=\left(P_{ni-1}g_i\right)(t_{ki})=g_i(t_{ki}),$$

получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$-\frac{1}{ni}\sum_{ri=1}^{ni}v_{ni-1}(t_{ri})\left[\ln 2+2\sum_{p=1}^{ni-1}T_p(t_{ki})\frac{T_p(t_{ri})}{p}\right]+\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{nj}\sum_{rj=1}^{nj}Q_{ij}(t_{ki},t_{rj})v_{nj-1}(t_{rj})=g_i(t_{ki}),\ ki=\overline{1,ni},\ i=\overline{1,m}.$$

Перегруппировывая слагаемые, окончательно получаем:

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{nj}\sum_{rj=1}^{nj}v_{nj-1}(t_{rj})\left[Q_{ij}(t_{ki},t_{rj})-\delta_{ij}\left(\ln 2+2\sum_{p=1}^{ni-1}T_p(t_{ki})\frac{T_p(t_{ri})}{p}\right)\right]=g_i(t_{ki}),\ ki=\overline{1,ni},\ i=\overline{1,m}.\quad (8)$$

Приближённое решение $\vec{v}_{\overline{n}}(t)=\{v_{ni-1}(t)\}_{i=1}^{m}$ строится по найденным значениям функций $v_{ni-1}(t)$ в узлах интерполирования.

Однозначная разрешимость СЛАУ (8) эквивалентна однозначной разрешимости системы приближённых интегральных уравнений (6).

Однозначная разрешимость СЛАУ. Обозначим

$$\left(Q_{ni-1nj-1}v_{nj}\right)(t_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(P_{ni-1t_0}P_{nj-1t}Q_{ij}\right)(t_0,t)\frac{v_{nj}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

и введём оператор

$$\left(\widehat{Q}_{\overline{n}}\vec{v}_{\overline{n}}\right)(t_0)=\left\{\sum_{j=1}^{m}\left(Q_{ni-1nj-1}v_{nj}\right)(t_0)\right\}_{i=1}^{m}.$$

Тогда систему (6) можно записать в виде операторного уравнения

$$\left(\widehat{B}+\widehat{Q}_{\overline{n}}\right)\vec{v}_{\overline{n}}=\vec{g}_{\overline{n}},$$

где $\vec{g}_{\overline{n}}(t_0)=\{g_{ni-1}(t_0)\}_{i=1}^{m}$.

Оператор $\widehat{B}+\widehat{Q}_{\overline{n}}$ действует из пространства $\Pi_{\overline{n}}$ в пространство $\Pi_{\overline{n}}$. Здесь $\Pi_{\overline{n}}\subset\vec{L}_{[-1,1]}^{2}$ – конечномерное подпространство, состоящее из всех вектор-функций вида

$$\vec{u}_{\overline{n}}(t)=\{u_{ni-1}(t)\}_{i=1}^{m},$$

где $u_{ni-1}(t)\in\Pi_{ni-1}$; $\Pi_{n-1}\subset L_{[-1,1]}^{2}$ – подпространство всех алгебраических полиномов степени не выше $n-1$.

Действительно, пусть

$$(Bu)(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u(x)}{\sqrt{1-x^2}}\ln|x-x_0|dx,$$

тогда, в силу соотношений [4],

$$B:T_0(t)\to(-\ln 2)T_0(t_0)\ \text{и}\ B:T_n(t)\to-\frac{T_n(t_0)}{n},\ n=1,2,\ldots,$$

оператор $\widehat{B}$ действует из $\Pi_{\overline{n}}$ в $\Pi_{\overline{n}}^{I}$.

Пусть, далее, $\vec{u}_{\overline{n}}(t)\in\Pi_{\overline{n}}$, тогда, в силу определения,

$$\sum_{j=1}^{m}\left(Q_{ni-1nj-1}u_{nj}\right)(t_0)\in\Pi_{ni-1},\ i=\overline{1,m}\text{, и, следовательно, }\left(\widehat{Q}_{\overline{n}}\vec{u}_{\overline{n}}\right)(t_0)\in\Pi_{\overline{n}}.$$

Пользуясь результатом, приведенным в [5, стр. 19], докажем, что оператор $\widehat{B}+\widehat{Q}_{\overline{n}}$ непрерывно обратим в паре пространств

$$\left(\Pi_{\overline{n}}, \Pi_{\overline{n}}\right), \tag{9}$$

и оценим разность между точным решением $\vec{v}(t)$ системы интегральных уравнений (5) и приблжённым решением $\vec{v}_{\overline{n}}(t)$, найденным из системы (6).

Для этого нужно оценить $\left\|\vec{g}-\vec{g}_{\overline{n}}\right\|_I$ и $\left\|\left(\widehat{B}+\widehat{Q}\right)-\left(\widehat{B}+\widehat{Q}_{\overline{n}}\right)\right\|$Здесь норма оператора вычисляется в паре пространств (9).

Пусть $n=\min\{n1, n2, ..., nm\}$. Тогда, пользуясь *теоремами Джексона* [6], получаем:

$$\text{при } n-1>\mu \quad \left\|\vec{g}-\vec{g}_{\overline{n}}\right\|_I=\left\{\sum_{i=1}^{m}\left\|g_i-g_{ni-1}\right\|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \le D(g)(n-1)^{-\mu-\gamma}\sqrt{m},$$

где $D(g)$ – костанта, не зависящая от $\overline{n}$.

Далее, в [3] доказано, что для всех i при $n-1>\mu$ выполняются неравенства

$$\left\|\sum_{j=1}^{m}\left(Q_{ij}-Q_{ni-1nj-1}\right)v_{nj}\right\| \le \sum_{j=1}^{m}\left\|\left(Q_{ij}-Q_{ni-1nj-1}\right)v_{jn_j}\right\| \le D\left(\widehat{Q}\right)m(n-1)^{-\mu-\gamma}\left\|\vec{v}_{\overline{n}}\right\|_I,$$

где $D\left(\widehat{Q}\right)$ – константа, не зависящая от $\overline{n}$.

Окончательно получаем

$$\left\|\left(\widehat{B}+\widehat{Q}\right)\vec{v}_{\overline{n}}-\left(\widehat{B}+\widehat{Q}_{\overline{n}}\right)\vec{v}_{\overline{n}}\right\|_I=\left\|\left(\widehat{Q}-\widehat{Q}_{\overline{n}}\right)\vec{v}_{\overline{n}}\right\|_I=\left\{\sum_{i=1}^{m}\left\|\sum_{j=1}^{m}\left(Q_{ij}-Q_{ni-1nj-1}\right)v_{nj}\right\|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le\left\{\sum_{i=1}^{m}\left(D\left(\widehat{Q}\right)m(n-1)^{-\mu-\gamma}\left\|\vec{v}_{\overline{n}}\right\|_I\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}=D\left(\widehat{Q}\right)m^{\frac{3}{2}}(n-1)^{-\mu-\gamma}\left\|\vec{v}_{\overline{n}}\right\|_I$$

и, следовательно,

$$\left\|\left(\widehat{B}+\widehat{Q}\right)-\left(\widehat{B}+\widehat{Q}_{\overline{n}}\right)\right\|=\left\|\widehat{Q}-\widehat{Q}_{\overline{n}}\right\| \le D\left(\widehat{Q}\right)m^{\frac{3}{2}}(n-1)^{-\mu-\gamma}.$$

Отсюда вытекает, что существует такое число N, что, при любом $\overline{n}$, у которого $n \ge N$, выполнено неравенство

$$p_{\overline{n}}=\left\|\left(\widehat{B}+\widehat{Q}\right)^{-1}\right\|_{\overline{L}_2\to\overline{L}_2}\cdot\left\|\widehat{Q}-\widehat{Q}_{\overline{n}}\right\|<1.$$

Поэтому из результата, приведенного в [5, стр. 19], следует, что при любом $\overline{n}$ таком, что $n \ge N$, оператор $\widehat{B}+\widehat{Q}_{\overline{n}}$ непрерывно обратим в паре пространств (9), то есть система (6) имеет единственное решение $\vec{v}_{\overline{n}}(t)$. Кроме того, если $\vec{v}(t)$ – точное решение системы (5), то имеет место оценка

$$\left\|\vec{v}-\vec{v}_{\overline{n}}\right\|_I \le \sigma_n,$$

где $\sigma_n=\underline{O}\left(\frac{1}{n^{\mu+\gamma}}\right)$ при $n\to\infty$.

Выводы. На основе численного метода дискретных особенностей построена система линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующая интегральное уравнение с логарифмическим ядром, заданное на системе интервалов. Доказано,что при некоторых предположениях гладкости ядра регулярной части и правой части этого интегрального уравнения построенная система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение. Кроме того, получена оценка скорости сходимости приближённого решения к точному в среднем.

Список литературы

1. *Tsalamengas J. L.* Exponentially converging Nystrom methods in scattering from infinite curved smooth strips. Part I: TM-Case // IEEE Trans. Antennas Propagat. – vol. 58. – 2010.
2. *Лифанов И. К.* Метод сингулярних интегральных уравнений и численный эксперимент – М. : ТОО «Янус», 1995 – 520с.
3. *Гандель Ю. В., Еременко С. В., Полянская Т. С.* Математические вопросы метода дискретних токов. Учеб. пособие. Ч.II. – Харьков, 1992. – 145 с.
4. *Гандель Ю. В.* Лекции о численных методах для сингулярних интегральных уравнений. Учеб. пособие. Ч. 1. – Харьков – Херсон, 2001. – 92с.
5. *Габдулхаев Б. Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань : Изд. Казанск. ун-та, 1980. – 231с.
6. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. – М.-Л. : ГТТИ, 1949. – 688с.

References (transliterated)

1. Tsalamengas J. L. Exponentially converging Nystrom methods in scattering from infinite curved smooth strips. Part I: TM-Case. *IEEE Trans. Antennas Propagat*. 2010, vol. 58.
2. Lifanov I. K. *Metod singulyarnykh integral'nykh uravneniy i chislenniy eksperiment* [Method of singular integral equations and numerical experiment]. Moscow, Open Company "Janus" Publ., 1995. 520p.
3. Gandel Y. V., Eremenko S. V., Polyanskaya T. S. *Matematicheskie voprosy metoda diskretnykh tokov*. *Ucheb. posobie*. *Ch. II* [Mathematical problems in the method of discrete currents. Proc. allowance. PartII]. Kharkov, 1992. 145 p.
4. Gandel Y. V. *Lektsii o chislennykh metodakh dlya singulyarnykh integral'nykh uravneniy*. *Ucheb. posobie*. *Ch. I* [Lectures on numerical methods for singular integral equations. Proc. allowance. Part I]. Kharkov-Kherson, 2001. 92 p.
5. Gabdulkhaev B. G. *Optimal'nye approksimatsii resheniy lineynykh zadach* [Optimal approximation of solutions of linear problems]. Kazan, Izd. Kazan. University Publ., 1980. 231 p.
6. Natanson I. P. *Konstruktivnaya teoriya funktsiy* [Constructive theory of functions]. Moscow-Leningrad, GTTI Publ., 1949. 688 p.

Поступила (received) 16.03.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Інтегральне рівняння першого роду з логарифмічним ядром, **задане на системі интервалів / Т. С. Полянська** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 123 – 127. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.

Интегральное уравнение первого рода с логарифмическим ядром, заданное на системе интервалов / Т. С. Полянская // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 123 – 127. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.

Integral equations of the first kind with logarithmic kernel given on a system of intervals / T. S. Polyanskaya // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 6 (1228). – pp. 123 – 127. Bibliog.: 6 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Полянська Тетяна Семенівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (093) 921-97-17; e-mail: tatyana-polyanskaya1@mail.ru.

Полянская Татьяна Семеновна – кандидат физико-математических наук, доцент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (093) 921-97-17; e-mail: tatyana-polyanskaya1@mail.ru.

Polyanskaya Tatyana Semenovna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (093) 921-97-17; e-mail: tatyana-polyanskaya1@mail.ru.

УДК 631.376

О. Ю. РЕБРОВ

ІНТЕГРАЛЬНА ЙМОВІРНІСНА ОЦІНКА ВІДПОВІДНОСТІ ТРАКТОРНОЇ ШИНИ АГРОЕКОЛОГІЧНИМ ВИМОГАМ В ҐРУНТО-КЛІМАТИЧНИХ УМОВАХ УКРАЇНИ

Запропоновано методика розрахунку середньоінтегральної ймовірнісної оцінки відповідності максимального тиску на ґрунт тракторної шини агроекологічним вимогам з урахуванням ґрунто-кліматичних умов України. Наведено розподіл допустимого тиску на ґрунт територією України при весняному передпосівному і осінньому основному обробітку ґрунту. Проведено аналіз середньоінтегральних ймовірнісних оцінок відповідності ряду типорозмірів сільськогосподарських тракторних шин світових виробників агроекологічним вимогам.

Ключові слова: тракторна шина, максимальний тиск шини на ґрунт, агроекологічні вимоги.

Предложена методика расчета среднеинтегральной вероятностной оценки соответствия максимального давления на почву тракторной шины агроэкологическим требованиям с учетом почвенно-климатических условий Украины. Приведено распределение допускаемого давления на почву по территории Украины при весенней предпосевной и осенней основной обработке почвы. Проведен анализ среднеинтегральных вероятностных оценок соответствия ряда типоразмеров сельскохозяйственных тракторных шин мировых производителей агроэкологическим требованиям.

Ключевые слова: тракторная шина, максимальное давление шины на почву, агроэкологические требования.

The article presents a method of calculating the mean integral probability estimate of the maximum tractor tire pressure on the soil meeting the agro-ecological requirements with taking into account soil and climatic conditions of Ukraine. The distribution of the permitted soil pressure on the territory of Ukraine during the spring presowing and autumn primary tillage is given. The conformity of agricultural tractor tires to the agro-ecological requirements is analyzed using the mean integral probability estimate. It is proved that only some of VF tires among all the studied ones meet the standards of soil pressure with the mean integral probability estimate up to 0.9 – 0.95 for any tire inflation pressure and radial load.

Key words: agricultural tire, maximum tractor tires pressure on the soil, agro-ecological requirements.