УДК 517.968:535.4

Э. И. ВЕЛИЕВ

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ДВУХМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ

Запропоновано методи розв'язання інтегральних рівнянь, які виникають у багатьох крайових задачах прикладної електродинаміки. Методи засновані на використанні ортогональних багаточленів, які дозволяють враховувати особливості шуканих функцій на кінцях області інтегрування. Ці особливості, як правило, в реальних радіофізичних завданнях пов'язані з поведінкою напруженості електромагнітних полів і поверхневих струмів, наприклад, на ребрах екранів.

Ключові слова: інтегральні рівняння, логарифмічне різницеве ядро, ортогональні багаточлени, спектральні співвідношення.

Предлагаются методы решения интегральных уравнений, которые возникают во многих краевых задачах прикладной электродинамики. Методы основаны на использовании ортогональных многочленов, которые позволяют учитывать особенности искомых функций на концах области интегрирования. Эти особенности, как правило, в реальных радиофизических задачах связаны с поведением напряжённости электромагнитных полей и поверхностных токов, к примеру, на рёбрах экранов.

Ключевые слова: интегральные уравнения, логарифмическое разностное ядро, ортогональные многочлены, спектральные соотношения.

The article offers the methods of solving integral equations (IE) arising in many boundary value problems of applied electrodynamics. These methods are based on the use of orthogonal polynomials (OP), which allow to consider features of the sought functions at the ends of the region of integration. As a rule, in real radiophysical problems these features are associated with the behavior of electromagnetic fields and surface currents, for example, on the edges of the screens.

Key words: integral equations with the log-difference kernel, orthogonal polynomials, spectral ratio.

Введение. В статье рассматриваются три типа интегральных уравнений (ИУ):

$$\int_{-1}^{1}\rho(\xi)\left[\ln|\xi-\eta|+N_1(\xi,\eta;\varepsilon)\right]d\xi = f_1(\eta),\quad \eta\in[-1,1]; \tag{1}$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\rho(\phi)\left[\ln 2\left|\sin\left(\frac{\phi-\phi_0}{2}\right)\right|+N_2(\phi,\phi_0,\varepsilon)\right]d\phi = f_2(\phi_0),\quad \phi_0\in[-\alpha,\alpha]; \tag{2}$$

$$\int_{0}^{\infty}\rho(x)H_0^{(1)}(\varepsilon|x-x_0|)dx = f_3(x_0),\quad x_0\in(0,\infty). \tag{3}$$

Здесь $\rho(\xi)$ – функции, которые нужно найти; $\{N_j\}_{j=1}^{2}$ и $\{f_j\}_{j=1}^{3}$ – известные функции; $H_0^{(1)}(x)$ – *функция Ханкеля нулевого порядка*; ε и α – вещественные параметры. Кроме того, функции $N_j, N_j'\in C$ и $f_j, f_j'\in C$, то есть они принадлежат классу непрерывных функций.

Уравнения (1), (2) – это ИУ 1-го рода с логарифмическим разностным ядром. Уравнение (3) является ИУ *типа Винера-Хопфа*. В уравнении (2) функция $\rho(\phi)$ и ядро являются периодическими.

Существуют множество внутренних и внешних краевых задач дифракции, которые могут быть сведены к уравнениям типа (1) – (3) [1, 2]. Например, проблемы дифракции плоских волн на бесконечно тонкой полосе и на незамкнутом круговом цилиндрическом экране могут быть сведены к решению ИУ следующего типа:

$$\int_{-1}^{1}\rho(\xi)H_0^{(1)}\left(\varepsilon|\xi-\eta|\right)d\xi = f_1(\eta); \tag{4}$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\rho(\phi)H_0^{(1)}\left(\varepsilon\left|\sin\left(\frac{\phi-\phi_0}{2}\right)\right|\right)d\phi = f_2(\phi_0). \tag{5}$$

Здесь неизвестные функции $\rho(\xi)$ и $\rho(\phi)$ пропорциональны плотности тока на экране, $\varepsilon = ka = 2\pi a/\lambda$ – параметр частоты; числа a и α характеризуют геометрию экранов. Поскольку функция $H_0^{(1)}(x)$ может быть представлена формулой

$$H_0^{(1)}(x) = \frac{2i}{\pi}\ln x + N(x), \tag{6}$$

где i – мнимая единица; $N(x)$ – непрерывная функция, то ясно, что уравнения (4), (5) можно привести к ИУ (1), (2).

Предлагаемый ниже метод решения ИУ (1) – (3) основан на обращении сингулярной части интегрального

© Э. И. Велиев, 2017

оператора, что позволит свести их к решению *матричных уравнений Фредгольма второго рода*, которые дают возможность определять искомые величины с любой наперёд заданной точностью. Более того, обращение сингулярной части оператора позволяет создавать высокоэффективные численные алгоритмы [1 – 5].

Построим решения ИУ (1) – (3) с помощью *метода ортогональных многочленов* (ОМ), который является довольно простым и общим. Этот метод является частным случаем более общей схемы *метода Бубнова*, применяемого к ИУ, но отличается двумя факторами. Сначала нужно исследовать предварительную структуру искомой функции вблизи краевой точки области интегрирования, а во-вторых, построить спектральные выражения для сингулярных частей ядер с ортогональными многочленами как собственные функции.

Метод ОМ широко используется для решения задач теории упругости и в задачах механики сплошной среды [6 – 8].

Интегральные уравнения с логарифмическим разностным ядром. Сначала рассмотрим ИУ (1). Предположим, что структура решения такова, что функция $\rho(\xi)$ удовлетворяет условию

$$\rho(\xi) \underset{\xi\to\pm1}{\sim} \left(1-\xi^2\right)^{-1/2}. \tag{7}$$

Это означает, что $\rho(\xi)$ имеет корневую особенность на концах интервала $[-1,1]$. Хорошо известно, что условие (7) следует из *условия Мейкснера* в задачах дифракции волн на бесконечно тонких экранах [1 – 5, 9].

Имеет место следующая ***теорема:*** *если* $f_1'(\eta)\in L_2^{1/2}\left[-1,1;\left(1-\eta^2\right)^{-1/2}\right]$, *то существует единственное решение ИУ (1) такое, что*

$$\rho(\xi)=\left(1-\xi^2\right)^{-1/2}\phi(\xi),\ \text{где}\ \phi(\xi)\in L_2^{1/2}\left[-1,1;\left(1-\xi^2\right)^{-1/2}\right].$$

Здесь $L_2^{1/2}\left[-1,1;\left(1-\eta^2\right)^{-1/2}\right]$ – *гильбертово пространство*, в котором скалярное произведение определяется с весовой функцией $\left(1-\eta^2\right)^{-1/2}$.

Представим неизвестную функцию $\rho(\xi)$ следующим образом:

$$\rho(\xi)=\left(1-\xi^2\right)^{-1/2}\phi(\xi)=\left(1-\xi^2\right)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}p_nT_n(\xi), \tag{8}$$

где $\{T_n(\xi)\}_{n=0}^{\infty}$ – *многочлены Чебышёва 1-го рода*; $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ – неизвестные коэффициенты, которые необходимо определить.

Разложение (8) для $\rho(\xi)$ обусловлено тем, что многочлены Чебышёва $T_n(\xi)$ являются собственными функциями следующего интегрального оператора (ИО) [6, 8]:

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\ln|\xi-\eta|\,d\xi=\omega_nT_n(\eta),\ \ |\eta|\le1. \tag{9}$$

Здесь $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ являются собственными значениями (ИО) и определяются формулой

$$\omega_n=\begin{cases}\ln 2, & n=0;\\ 1/n, & n=1,2,\ldots.\end{cases} \tag{10}$$

Для дальнейшего вывода нам необходимо условие ортогональности для полиномов Чебышёва, заданное формулой

$$\int_{-1}^{1}T_n(\eta)T_k(\eta)\frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}=\frac{1}{\beta_n}\pi\delta_{kn};\ \beta_n=\begin{cases}1, & n=0;\\ 2, & n\ne0,\end{cases} \tag{11}$$

δ_{kn} – *символ Кронекера.*

Используя (9) и (11), можно показать, что для ядра (9) имеет место сходящееся билинейное разложение

$$\frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{|\xi-\eta|}=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\omega_nT_n(\xi)T_n(\eta). \tag{12}$$

Подставим (8) в ИУ (1) и учтём спектральное выражение (9). Тогда, предполагая, что непрерывная функция $f_1(\eta)$ может быть представлена в виде ряда

$$f_1(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n T_n(\eta) \tag{13}$$

и используя условие ортогональности (11) для поиска коэффициентов $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ)

$$\rho_k - \sum_{n_0}^{\infty} \alpha_{kn} \rho_n = \gamma_k, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{14}$$

Здесь

$$\alpha_{kn} = \frac{\beta_k}{2\omega_k} \int_{-1-1}^{1}\int^{1} \frac{T_k(\eta) T_n(\xi)}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-\xi^2)}} N_1(\xi, \eta; \varepsilon)\, d\eta d\xi, \ \gamma_k = \pi f_k / (2\omega_k). \tag{15}$$

Можно показать, что $\{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty} \in l_2$ и, кроме того,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{kn}|^2 < \infty. \tag{16}$$

Это означает, что матрица $\{\alpha_{kn}\}_{k,n=0}^{\infty}$ порождает абсолютно непрерывный оператор A в l_2. Следовательно, этот оператор может быть аппроксимирован конечномерным оператором. Другими словами, БСЛАУ (14) может быть решена методом редукции.

Заметим, что двойной интеграл в матричных элементах $\{\alpha_{kn}\}_{k,n=0}^{\infty}$ можно преобразовать в одномерный при условии, что функция $N_1(\xi, \eta; \varepsilon)$ имеет представление

$$N_1(\xi, \eta; \varepsilon) = \int_0^{\infty} \delta(\alpha) \cos\left[\varepsilon(\eta - \xi)\right] \frac{d\alpha}{\alpha}; \ \ \delta(\alpha) \underset{\alpha \to \infty}{\sim} O\left(\alpha^{-s}\right), \ s > 1. \tag{17}$$

Чтобы показать это, подставим (17) в (15) и учтём, что [10]

$$\int_0^1 \left\{ \begin{matrix} T_{2k}(\eta)\cos(\varepsilon\alpha\eta) \\ T_{2k+1}(\eta)\sin(\varepsilon\alpha\eta) \end{matrix} \right\} \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = (-1)^k \frac{\pi}{2} \left\{ \begin{matrix} J_{2k}(\varepsilon\alpha) \\ J_{2k+1}(\varepsilon\alpha) \end{matrix} \right\}. \tag{18}$$

Здесь $J_k(x)$ – это *функции Бесселя*.

Тогда для α_{kn} получим

$$\alpha_{kn} \sim \frac{\left[1 + (-1)^{k+n}\right]}{\omega_k} \beta_k \int_0^{\infty} \frac{\delta(\alpha)}{\alpha} J_k(\varepsilon\alpha) J_n(\varepsilon\alpha)\, d\alpha. \tag{19}$$

На практике [7] данный метод решения ИУ (1) эффективный только при малых значениях параметра ε ($\varepsilon \sim 0 \div 10$). Как правило, этот параметр связан с волновыми размерами рассеивателей. Это может быть проиллюстрировано ИУ (4), (5), описывающими проблемы дифракции плоских волн цилиндрическими экранами.

Метод ортогональных многочленов, эффективных для произвольных значений ε. Теперь мы дадим альтернативный метод решения ИУ (1). Этот алгоритм основан также на методе ОМ [6], но он эффективен для всех значений ε, включая большие значения.

Выполним следующее преобразование переменных в ИУ:

$$\eta = \frac{th((\varepsilon/2)\xi)}{th(\varepsilon/2)} = \alpha; \ \xi = \frac{th((\varepsilon/2)\xi_0)}{th(\varepsilon/2)} = \beta. \tag{20}$$

Тогда ядро ИУ принимает форму

$$\ln|\xi - \eta| = \ln\left|\frac{sh((\varepsilon/2)(\xi - \xi_0))}{ch((\varepsilon/2)\xi) \cdot ch((\varepsilon/2)\xi_0)}\right| - \ln\left(th(\varepsilon/2)\right). \tag{21}$$

Теперь неизвестная функция $\rho(\alpha)$ представляется формулой

$$\rho(\alpha) = \frac{ch((\varepsilon/2)\xi)}{\sqrt{2(ch\varepsilon - ch\varepsilon\xi)}} \sum_{n=0}^{\infty} x_n T_n(\alpha). \tag{22}$$

Разложение в ряд (22) следует из того факта, что многочлены Чебышёва $T_n(\alpha)$ являются собственными функциями (ИО) с ядром (21), и имеет место следующее спектральное выражение [3]

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln\left|\frac{sh\left((\varepsilon/2)(\xi-\xi_0)\right)}{ch((\varepsilon/2)\xi)\cdot ch((\varepsilon/2)\xi_0)}\right|\frac{T_n(\alpha)}{\sqrt{2(ch\varepsilon-ch\varepsilon\xi)}}\frac{d\xi}{ch((\varepsilon/2)\xi)}=\lambda_n T_n(\alpha). \tag{23}$$

Здесь $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ являются собственными значениями интегрального оператора и равны

$$\lambda_n=\begin{cases}\ln\left(2cth(\varepsilon/2)\right)/\left(\varepsilon ch(\varepsilon/2)\right), & n=0;\\ 1/n\varepsilon ch(\varepsilon/2), & n=1,2,\ldots.\end{cases} \tag{24}$$

Кроме того, можно показать, что многочлены Чебышёва в переменных вида (20) удовлетворяют ортогональному соотношению

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(\alpha)T_k(\alpha)}{\sqrt{2(ch\varepsilon-ch\varepsilon\xi)}}\frac{d\xi}{ch((\varepsilon/2)\xi)}=\frac{1}{\beta_n}\frac{\pi}{\varepsilon ch(\varepsilon/2)}\delta_{kn}. \tag{25}$$

Теперь подставим (22) в ИУ (1) и учтём спектральное разложение (23). Используя условие ортогональности (25) для поиска коэффициентов $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, получаем БСЛАУ

$$x_k+\sum_{n=0}^{\infty}c_{kn}x_n=q_k,\quad k=0,1,\ldots. \tag{26}$$

Здесь

$$c_{kn}=\frac{\varepsilon\beta_k ch(\varepsilon/2)}{8\pi\lambda_k}\int_{-1-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{N_1(\alpha,\beta;\varepsilon)T_k(\alpha)T_n(\beta_n)}{\sqrt{(ch\varepsilon-ch\varepsilon\xi)(ch\varepsilon-ch\varepsilon\xi_0)}}\frac{d\xi d\xi_0}{ch((\varepsilon/2)\xi)\cdot ch((\varepsilon/2)\xi_0)}+\delta_{k0}\delta_{n0}\frac{\ln th(\varepsilon/2)}{\ln\left(2cth(\varepsilon/2)\right)}, \tag{27}$$

$$q_k=-\frac{\beta_k}{2\lambda_k}sh\frac{\varepsilon}{2}\int_{-1}^{1}\frac{f_1(\beta)T_k(\beta)}{\sqrt{2(ch\varepsilon-ch\varepsilon\xi_0)}}\frac{d\xi_0}{ch((\varepsilon/2)\xi_0)}. \tag{28}$$

Можно показать, что последовательность чисел $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}\in l_2$, а оператор C, соответствующий матрице $\{c_{kn}\}_{k,n=0}^{\infty}$, абсолютно непрерывный в l_2. Поэтому систему можно аппроксимировать конечномерным оператором.

Интегральные уравнения с периодическим логарифмическим разностным ядром. Рассмотрим теперь ИУ (2). Предположим снова, что неизвестная функция $\rho(\phi)$ удовлетворяет условию

$$\rho(\phi)\underset{\phi\to\pm\alpha}{\sim}\left(\phi^2-\alpha^2\right)^{-1/2}. \tag{29}$$

Для удобства представляем функции $\rho(\phi)$ и $f_2(\phi)$ как суммы чётных и нечётных слагаемых:

$$\rho(\phi)=\frac{1}{2}\left[\rho+(\phi)+\rho-(\phi)\right];\quad f_2(\phi_0)=\frac{1}{2}\left[f+(\phi_0)+f-(\phi_0)\right];$$
$$\rho\pm(\phi)=\rho(\phi)\pm\rho(-\phi);\quad f\pm(\phi_0)=f_2(\phi_0)\pm f_2(-\phi_0). \tag{30}$$

Тогда ИУ для функций $\rho\pm(\phi)$ примут вид

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\rho\pm(\phi)\left[-\ln\frac{1}{2\left|\sin(0,5(\phi-\phi_0))\right|}+N_2(\phi,\phi_0;\varepsilon)\right]d\phi=f\pm(\phi_0);\ \ \phi_0\in[-\alpha,\alpha]. \tag{31}$$

Для функций $\rho\pm(\phi)$ можно написать

$$\rho+(\phi)=\frac{\cos(0,5\phi)}{\sqrt{2(\cos\phi-\cos\alpha)}}\sum_{n=0}^{\infty}x_{2n}T_{2n}\left(\frac{\sin(0,5\phi)}{\sin(0,5\alpha)}\right),\ \ \phi\in[-\alpha,\alpha]; \tag{32}$$

$$\rho-(\phi)=\frac{1}{\cos(0,5\phi)\sqrt{2(\cos\phi-\cos\alpha)}}\sum_{n=0}^{\infty}x_{2n-1}T_{2n-1}\left(\frac{tg(0,5\phi)}{tg(0,5\alpha)}\right),\ \phi\in[-\alpha,\alpha]. \tag{33}$$

Как и ранее, представления (32), (33) обусловлены тем, что многочлены Чебышёва

$$T_{2n}\left(\sin((1/2)\phi)/\sin((1/2)\alpha)\right)\ \text{и}\ T_{2n-1}\left(tg((1/2)\phi)/tg((1/2)\alpha)\right)$$

являются собственными функциями интегрального оператора, который соответствует сингулярной части ядра ИУ (31). Как показано в [7], существуют следующие спектральные выражения:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\ln\frac{1}{2\left|\sin((\phi-\phi_0)/2)\right|}\frac{T_{2n}\left(\dfrac{\sin(\phi/2)}{\sin(\alpha/2)}\right)}{\sqrt{2(\cos\phi-\cos\alpha)}}\cos\frac{\phi}{2}d\phi=\sigma_{2n}T_{2n}\left(\frac{\sin((1/2)\phi_0)}{\sin((1/2)\alpha)}\right);\tag{34}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\ln\frac{1}{2\left|\sin((\phi-\phi_0)/2)\right|}\frac{T_{2n-1}\left(\dfrac{tg(\phi/2)}{tg(\alpha/2)}\right)}{\sqrt{2(\cos\phi-\cos\alpha)}}\frac{d\phi}{\cos((1/2)\phi)}=\sigma_{2n}T_{2n}\left(\frac{tg((1/2)\phi_0)}{tg((1/2)\alpha)}\right).\tag{35}$$

Здесь $\{\sigma_n\}_{n=0}^{\infty}$ – собственные значения ИО, которые равны

$$\sigma_{2n}=\begin{cases}-\ln\sin(\alpha/2), & n=0;\\ 1/(2n), & n=1,\,2,\,\ldots;\end{cases}\quad \sigma_{2n-1}=\frac{1}{(2n-1)\cos(\alpha/2)},\ n=1,\,2,\,\ldots.\tag{36}$$

Кроме того, можно показать, что для полиномов Чебышёва

$$T_n\left(\sin((1/2)\phi)/\sin((1/2)\alpha)\right)\ \text{и}\ T_n\left(tg((1/2)\phi)/tg((1/2)\alpha)\right)$$

имеют место следующие условия ортогональности:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}T_n\left(\frac{\sin((1/2)\phi)}{\sin((1/2)\alpha)}\right)T_k\left(\frac{\sin((1/2)\phi)}{\sin((1/2)\alpha)}\right)\frac{\cos((1/2)\phi)}{\sqrt{(\cos\phi-\cos\alpha)\cdot 2}}d\phi=\frac{1}{\beta_n}\pi\delta_{nk};$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}T_n\left(\frac{tg((1/2)\phi)}{tg((1/2)\alpha)}\right)T_k\left(\frac{tg((1/2)\phi)}{tg((1/2))}\right)\frac{d\phi}{\cos((1/2)\phi)\sqrt{(\cos\phi-\cos\alpha)\cdot 2}}=\frac{\pi}{\beta_n\cos((1/2)\alpha)}\delta_{nk}.\tag{37}$$

Можно показать, что для ядра ИУ (34), (35) имеют место следующие билинейные разложения:

$$\ln\frac{1}{2\left|\sin((1/2)(\phi-\phi_0))\right|}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_{2n}\beta_nT_{2n}\left(\frac{\sin((1/2)\phi)}{\sin((1/2)\alpha)}\right)T_{2n}\left(\frac{\sin((1/2)\phi_0)}{\sin((1/2)\alpha)}\right);\\ \displaystyle 2\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_{2n-1}T_{2n-1}\left(\frac{tg((1/2)\phi)}{tg((1/2)\alpha)}\right)T_{2n-1}\left(\frac{tg((1/2)\phi_0)}{tg((1/2)\alpha)}\right).\end{cases}\tag{38}$$

Подставим теперь выражения (32), (33) в ИУ (31). Принимая во внимание спектральные выражения (34), (35) и ортогональность (37), получим две БСЛАУ для поиска неизвестных коэффициентов:

$$x_{2k}+\sum_{n=0}^{\infty}b_{2k\ 2n}x_{2n}=f_{2k}^{+},\quad k=0,\,1,\,\ldots;\tag{39}$$

$$x_{2k-1}+\sum_{n=0}^{\infty}b_{2k-1\ 2n-1}x_{2n-1}=f_{2k-1}^{-},\quad k=1,\,2,\,\ldots.\tag{40}$$

Здесь мы обозначили

$$b_{2k\ 2n}=\frac{\beta_k}{8\sigma_{2k}}\int_{-\alpha-\alpha}^{\alpha}\int^{\alpha}\frac{\cos\dfrac{\phi}{2}\cos\dfrac{\phi_0}{2}T_{2k}\left(\dfrac{\sin(\phi/2)}{\sin(\alpha/2)}\right)T_{2n}\left(\dfrac{\sin(\phi_0/2)}{\sin(\alpha/2)}\right)}{\sqrt{(\cos\phi-\cos\alpha)(\cos\phi_0-\cos\alpha)}}N_2(\phi,\phi_0;\varepsilon)\,d\phi d\phi_0;$$

$$b_{2k-1\ 2n-1}=\frac{2k-1}{4}\cos^2\frac{\alpha}{2}\int_{-\alpha-\alpha}^{\alpha}\int^{\alpha}\frac{T_{2k-1}\left(\dfrac{tg(\phi/2)}{tg(\alpha/2)}\right)T_{2n-1}\left(\dfrac{tg(\phi_0/2)}{tg(\alpha/2)}\right)}{\sqrt{(\cos\phi-\cos\alpha)(\cos\phi_0-\cos\alpha)}}\frac{N_2(\phi,\phi_0;\varepsilon)}{\cos(\phi/2)\cos(\phi_0/2)}d\phi d\phi_0;\tag{41}$$

$$f_{2k}^{+}=\frac{\beta_k}{4\sigma_{2k}}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f_+(\phi_0)\cos(\phi_0/2)}{\sqrt{2(\cos\phi_0-\cos\alpha)}}T_{2k}\left(\frac{\sin(\phi_0/2)}{\sin(\alpha/2)}\right)d\phi_0;$$

$$f_{2k-1}^{-}=\frac{2k-1}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f_-(\phi_0)T_{2k-1}\left(\dfrac{tg(\phi_0/2)}{tg(\alpha/2)}\right)}{\cos(\phi_0/2)\sqrt{2(\cos\phi_0-\cos\alpha)}}d\phi_0.\tag{42}$$

Можно показать, что

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|f_{2k}^{+}\right|^2<\infty;\ \ \sum_{k=1}^{\infty}\left|f_{2k-1}^{-}\right|^2<\infty;\ \ \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left|b_{2k\ 2n}\right|^2<\infty;\ \ \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left|b_{2k-1\ 2n-1}\right|^2<\infty. \tag{43}$$

Другими словами, оператор B порождённый матрицей $\{b_{kn}\}_{k,n=0}^{\infty}$, является абсолютно непрерывным и может быть аппроксимирован конечномерным оператором. Тогда решение БСЛАУ (39), (40) могут быть получены с любой заданной точностью методом усечения.

Что касается справедливости метода усечения, который применяется к решению БСЛАУ (14), (26), (39), (40), отметим следующее. В статье *Г.Я. Попова* [6] отмечено, что БСЛАУ, к которым сводятся ИУ (1), (2) на основе метода ОМ, всегда могут быть решены методом усечения при условии, что собственные значения ИО, связанные с сингулярной частью ядра, имеют асимптотику

$$\sigma_n \underset{n\to\infty}{\sim} O\left(n^{-\gamma}\right),\ \ 1\le\gamma<2\,. \tag{44}$$

Не трудно заметить, что для собственных значений ИО имеет место асимптотика $\omega_n, \lambda_n, \sigma_n \underset{n\to\infty}{\sim} O\left(n^{-1}\right)$. Таким образом, здесь выполняется условие (44).

Чтобы вычислить интегралы в матричных элементах ((15), (27), (41)) с полиномами Чебышёва, нужно использовать *квадратурную формулу Филона* [6]. Последнее даёт наилучшее приближение для этих интегралов.

В общем случае можно использовать квадратурную формулу, предложенную Г.Я. Поповым для интегралов [6]

$$J_m=\int_0^1 t^{\alpha}(1-t)^{\beta}\,P_m^{(\alpha,\beta)}(1-2t)\,f(t)\,dt, \tag{45}$$

где $\left\{P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\right\}_{m=0}^{\infty}$ – *многочлены Якоби*.

Эта квадратурная формула не использует значения нулей многочленов Якоби и учитывает колебания подынтегрального выражения. Вся информация по этой формуле содержится в [6].

Интегральное уравнение с разностным ядром на полубесконечном интервале. Наконец, рассмотрим частный случай ИУ (3), который возникает при дифракции E – поляризованной плоской волны

$$E_x^0=\exp\left[ik\left(\alpha_0 x+\sqrt{1-\alpha_0^2}\,y\right)\right],\ \ (k=2\pi/\lambda,\ \alpha_0=\cos\theta,\ \ \theta-\text{угол падения})$$

на бесконечно тонкой идеально проводящей полуплоскости.

Он может быть записан в следующем виде:

$$\int_0^{\infty}\rho(x_0)\,k_0\left(k'\left|x-x_0\right|\right)dx_0=\pi e^{-k'\alpha_0 x}. \tag{46}$$

Здесь $k'=-ik,\ \ k_0(x)=\dfrac{\pi i}{2}H_0^{(1)}(ix)$ – *функция Макдональда*; $\rho(x_0)$ – плотность поверхностного тока.

Покажем, что, основываясь на методе ОМ, решение ИУ (46) можно получить аналитически.

Будем предполагать, что функция $\rho(x_0)$ удовлетворяет условию

$$\rho(x_0)\underset{x_0\to 0}{\sim} O\left(x_0^{-1/2}\right). \tag{47}$$

Введём безразмерный параметр $\eta_0=x_0k'$, тогда функция $\rho\left(\dfrac{\eta_0}{k'}\right)$ может быть разложена в ряд:

$$\rho(\eta_0/k')=\frac{e^{-\eta_0}}{\sqrt{\eta_0}}\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n L_n^{-1/2}(2\eta_0). \tag{48}$$

Здесь $\left\{L_n^{-1/2}(2\eta_0)\right\}_{n=0}^{\infty}$ – *многочлены Лаггера*; $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ – неизвестные коэффициенты.

Это выражение (48) следует из того факта, что многочлены Лаггера $L_n^{-1/2}(2\eta)$ являются собственными функциями ИО [6, 8]

$$\int_0^\infty \frac{k_0\left(|x-y|\right)}{\sqrt{y}e^{y}} L_n^{-1/2}(2y)\,dy \frac{\pi}{\sqrt{2}}\gamma_n L_n^{-1/2}(2x)e^{-x}, \tag{49}$$

а собственные значения ИО равны

$$\gamma_n = \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+1)} \underset{n\to\infty}{\sim} O\left(n^{-1/2}\right). \tag{50}$$

Условия ортогональности для многочленов Лаггера даются выражением[10]:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\eta}}{\sqrt{\eta}} L_n^{-1/2}(\eta) L_k^{-1/2}(\eta)\,d\eta = \gamma_n \delta_{nk}. \tag{51}$$

Из спектрального выражения (49) следует, что для ядра ИУ (46) справедливо билинейное разложение

$$k_0\left(|x-y|\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-(x+y)} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n L_n^{-1/2}(x) L_n^{-1/2}(y);$$

$$iH_0^{(1)}\left(k|x-y|\right) = \sqrt{2}e^{ik(x+y)} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n L_n^{-1/2}(-2ikx) L_n^{-1/2}(-2iky). \tag{52}$$

Подставим (48) в ИУ (46). Тогда с учётом спектрального выражения (49) и ортогональности (51) при условии $(1+\alpha_0)>0$ получим для неизвестных коэффициентов $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ следующее представление:

$$\rho_n = 2k' \frac{1}{\gamma_n} \frac{(\alpha_0-1)^n}{(\alpha_0+1)^{n+1/2}}, \quad \alpha_0 = \cos\theta. \tag{53}$$

Таким образом, мы получили аналитическое представление для функции $\rho(\eta_0/k')$:

$$\rho\left(\frac{\eta_0}{k'}\right) = \frac{2k'e^{-\eta_0}}{\sqrt{\eta(1+\alpha_0)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1/2)} \left(\frac{\alpha_0-1}{\alpha_0+1}\right)^n L_n^{-1/2}(2\eta_0). \tag{54}$$

К сожалению, это представление справедливо только для углов падения $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$. Однако это ограничение можно обойти, если просуммировать ряд в (54) на основе формул из [8]:

$$\rho\left(\frac{\eta}{k'}\right) = \frac{e^{-\eta}}{\sqrt{\pi\eta}} k'(1+\alpha_0)\,{}_1F_1\left(1;\frac{1}{2};(1-\alpha_0)\eta\right) = \frac{e^{-\eta}}{\sqrt{\pi\eta}} k'(1+\alpha_0)\left\{1-\sqrt{\pi\eta(1-\alpha_0)}e^{(1-\alpha_0)\eta}\left[1-erf\sqrt{\eta(1-\alpha_0)}\right]\right\}. \tag{55}$$

Здесь ${}_1F_1(a;b;t)$ – вырожденная гипергеометрическая функция; $erf(x)$ – интеграл вероятности.

Заметим, что представление (55) для плотности поверхностного тока совпадает с результатами других авторов [11], полученными с помощью других методов.

Используя представление (55) для $\rho(x)$, можно установить следующие асимптотики:

$$\text{а)}\ x\to 0;\quad \rho(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kx}} e^{i\left(kx-\frac{\pi}{4}\right)} k\cos\frac{\theta}{2}\left[1-4ikx\sin^2\frac{\theta}{2}\right] + O\left[(kx)^{\frac{3}{2}}\right];$$

$$\text{б)}\ x\to\infty;\quad \rho(x) \approx -ik\sin\theta e^{ikx\cos\theta}\left[1+O\left(\frac{1}{kx}\right)\right].$$

Выводы. Таким образом, в данной работе с помощью ортогональных многочленов предложен эффективный алгоритм решения ИУ, в которых сингулярная часть оператора имеет логарифмическую особенность. Эффективность алгоритма обусловлена обращением сингулярной части оператора в явном виде.

Список литературы

1. *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. – Москва : Мир, 1964. – 428 с.
2. *Шестопалов В. П.* Сумматорные уравнения в современной теории дифракции. – Киев : Наукова Думка, 1983. – 252 с.
3. *Ikiz T., Koshikava S., Kobayashi K., Veliev E. I., Serbest A. H.* Solution of the Plane wave diffraction problem by an impedance strip using a numerical-analytical method: E-polarized case // J. of Electromagn. Waves and Appl. – 2001. – Vol. 15. – № 3. – pp. 315 – 340.

4. *Вавилов В. Н., Велиев Э. И., Веремей В. В., Шестопалов В. П.* Эффективный метод решения задачи дифракции волн на цилиндрическом экране // ДАН СССР. – 1990. – Т. 313. – С. 585 – 589.
5. *Vavilov V. N., Veliev E. I.* Electromagnetic wave diffraction by cylindrical bodies with edges // Electromagnetics. – 1993. – Vol. 13. – pp. 339 – 357.
6. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – Москва : Наука, 1982. – 343 с.
7. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – Москва : Наука, 1983. – 488 с.
8. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. – Москва : Наука, 1986. – 336 с.
9. *Миттра Р., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов. – Москва : Мир, 1974. – 327 с.
10. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. Том 2. – Москва : Наука, 1983. – 752 с.
11. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. – Москва : Наука, 1973. – 713 с.

References (transliterated)

1. Kheln Kh, Mauye A., Vestpfal' K. *Teoriya difraktsii* [Theorie der Beugung]. Moscow, Mir Publ., 1964. 428 p.
2. Shestopalov, V. P. *Summatornye uravneniya v sovremennoy teorii difraktsii* [Series Equations in Modem Diffraction Theory]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1983. 252 p.
3. Ikiz T., Koshikava S., Kobayashi K., Veliev E. I., Serbest A. H. Solution of the Plane wave diffraction problem by an impedance strip using a numerical-analytical method: E-polarized case. *J. of Electromagn. Waves and Appl.* 2001, vol. 15, no. 3, pp. 315–340.
4. Vavilov V. N., Veliev E. I., Veremey V.V., Shestopalov V. P. Effektivnuy metod resheniya zadachi difraktsii voln na tsilindricheskom ekrane [Effective method for solving diffraction problem for waves incident on a cylindrical screen]. *DAN SSSR*. 1990, vol. 313, pp. 585–589.
5. Vavilov V. N., Veliev E. I. Electromagnetic wave diffraction by cylindrical bodies with edges. *Electromagnetics*. 1993, vol. 13, pp. 339–357.
6. Popov G. Ya. *Kontsentratsiya uprugikh napryazheniy vozle shtampov, razrezov, tonkikh vklyucheniy i podkrepleniy* [Concentration of Elastic Tensions Near Stamps, Cuts, Thin Inhomogeneities and Supports]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 343 p.
7. Aleksandrov V. M., Mkhitaryan S. M. *Kontaktnye zadachi dlya tel s tonkimi pokrytiyami i prosloykami* [Contact Problems for Bodies with Thin Coating and Inlayers]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 488 p.
8. Aleksandrov V. M., Kovalenko E. V. *Zadachi mekhaniki sploshnykh sred so smeshannymi granichnymi usloviyami* [Continuous Media Mechanics Problems with Mixed Boundary Condition]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 336 p.
9. Mittra R., Lee S. *Analiticheskie metody teorii volnovodov* [Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves]. Moscow, Mir Publ., 1974. 327 p.
10. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integraly i ryady. Spetsial'nye funktsii. Tom 2* [Integrals and Series. Special Functions. Vol. 2]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 752 p.
11. Born M., Wol'f E. Osnovy optiki [Principles of Optics]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 713 p.

Поступила (received) 21.03.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Чисельно-аналітичні методи розв'язання інтегральних рівнянь у двовимірних задачах теорії дифракції / Е. І. Велієв // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 21 – 28. Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2222-0631.

Численно-аналитические методы решения интегральных уравнений в двухмерных задачах теории дифракции / Э. И. Велиев // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 21 – 28. Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2222-0631.

Numerical-analytical methods for solving integral equations in two-dimensional problems of the theory of diffraction / E. I. Veliyev // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 6 (1228). – pp. 21 – 28. Bibliog.: 11 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Велієв Ельдар Ісмаїлович – доктор фізико-математичних наук, професор, проректор з науково-педагогічної роботи, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-50; e-mail: veliev51@gmail.com, veliev@kpi.kharkov.ua.

Велиев Эльдар Исмаилович – доктор физико-математических наук, профессор, проректор по научно-педагогической работе, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-64-50; e-mail: veliev51@gmail.com, veliev@kpi.kharkov.ua.

Veliyev Eldar Ismailovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Vice-Rector for Scientific-and-Pedagogical Work, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (057) 707-64-50; e-mail: veliev51@gmail.com, veliev@kpi.kharkov.ua.