

А. В. ВОРОПАЙ, А. Л. ГРИГОРЬЕВ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРЕМЫ ЭФРОСА ДЛЯ УЧЁТА ДИССИПАТИВНЫХ СВОЙСТВ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

На основе операционного исчисления и теоремы Эфроса запропоновано новий підхід до аналізу перехідних процесів в пружному континуумі, викликаних нестационарними силовими збуреннями. Він дозволяє враховувати внутрішнє в'язке тертя в матеріалі, що описується моделлю тертя Кельвіна – Фойхта. Зазначений підхід використовує згладжуючий лінійний інтегральний оператор з гаусовим різницею ядром і може бути застосований для будь-яких пружних рішень, які представлені у вигляді інтегралів Дюамеля типу згортки. Досліджено алгебраїчні властивості цього оператора. Наведено приклади розрахунків для балки та пластини в пружній і в'язкопружній постановках.

Ключові слова: механічні коливання, в'язкопружний континуум, перехідний процес, тертя Кельвіна – Фойхта, операционне числення, теорема Ефроса, інтеграл Дюамеля, інтегральний оператор, функція Гауса, коливання балок та пластин.

На основе операционного исчисления и теоремы Эфроса предложен новый подход к анализу переходных процессов в упругом континууме, вызванных нестационарными силовыми возмущениями. Он позволяет учитывать внутреннее вязкое трение в материале, описываемое моделью трения Кельвина – Фойхта. Указанный подход использует сглаживающий линейный интегральный оператор с гауссовым разностным ядром и может быть применен для любых упругих решений, которые представлены в виде интегралов Дюамеля типа свёртки. Исследованы алгебраические свойства этого оператора. Приведены примеры расчетов для балки и пластины в упругой и вязкоупругой постановках.

Ключевые слова: механические колебания, вязкоупругий континуум, переходной процесс, трение Кельвина – Фойхта, операционное исчисление, теорема Эфроса, интеграл Дюамеля, интегральный оператор, функция Гаусса, колебания балок и пластин.

A new approach to the analysis of transient processes in the elastic continuum, caused by nonstationary force perturbations, on the basis of the operational calculus and the Efros theorem is proposed. It allows taking into consideration the internal viscous friction in the material, described by the Kelvin-Feucht friction model. This approach uses a smoothing linear integral operator with a Gaussian difference kernel and can be applied to any elastic solutions that are represented as Duhamel convolution type integrals. The algebraic properties of this operator are investigated. The examples of calculating for a beam and a plate in elastic and viscoelastic settings are given.

Key words: mechanical oscillations, viscoelastic continuum, transient process, Kelvin-Feucht friction, operational calculus, Efros theorem, Duhamel integral, integral operator, Gaussian function, beam and plate oscillations.

Введение и постановка задачи. К настоящему моменту в теории упругости получено значительное количество численно-аналитических решений для задач нестационарного деформирования упругих элементов конструкций [1]. Существует несколько общепринятых аналитических методов решения указанных задач. Один из основных методов получения численно-аналитического решения нестационарных задач – это использование интегрального преобразования Лапласа. Многие решения могут быть представлены в виде *свёрточных интегралов с ядрами Коши*, например, в монографии [2] дано несколько таких решений для случаев упругого деформирования различных элементов конструкции; всем этим решениям отвечает общая форма следующего вида:

$$u(t) = \int_0^t K(t-\tau) P_0(\tau) d\tau, \quad (1)$$

где $u(t)$ – перемещения объекта в некоторой точке \mathbf{x}_s , интересующей исследователя; $P_0(t)$ – внешняя нестационарная нагрузка, приложенная в точке \mathbf{x}_0 и вызывающая колебания; $K(t)$ – разностное ядро *интеграла Дюамеля*, несущее, по существу, всю информацию о деформируемом объекте.

Если нагрузка приложена не в одной точке, а в дискретном наборе или на континуальном множестве точек, то используется принцип линейной суперпозиции, и в правой части равенства (1) появляется сумма или еще один (внешний) интеграл.

Заметим, что для реальных элементов конструкций происходит не упругое, а вязкоупругое деформирование. Когда силы вязкого трения малы – ими, естественно, пренебрегают. Однако, в других случаях, диссипацию энергии при механических колебаниях необходимо учитывать. В работе [3] в общем виде описано применение операторного метода расчета вынужденных колебаний вязкоупругой механической системы; изложенный способ использован при разработке методики динамического расчета цилиндрических пружин (для модели тонкого винтового бруса). Более подробно решение задачи для винтового бруса приведено в [4]. В упомянутых работах анализировался случай кинематического возбуждения колебаний в одномерном вязкоупругом континууме; в данной статье рассматривается силовое возбуждение колебаний в вязкоупругом теле общего вида.

Учет диссипации приводит к корректировке соотношения (1), в котором используется другое интегральное ядро, форма которого сглажена трением:

$$u(t) = \int_0^t K_\eta(t-\tau) P_0(\tau) d\tau. \quad (2)$$

Разностное ядро $y = K_\eta(t)$ может быть получено тремя основными способами:

1) как реакция системы на удар, полученная и зарегистрированная в результате физического моделирования динамики объекта (то есть специально поставленного и проведенного эксперимента);

- 2) как решение уравнений, описывающих аналогичный переходной процесс при учете трения;
- 3) путем соответствующей выглаживающей модификации ядра $y = K(t)$, полученного при математическом моделировании упругих деформаций без учета трения.

В данной статье подробно изучается третий путь, и анализируются его достоинства и недостатки применительно к простейшему виду внутреннего трения: вязкому, описываемому моделью Кельвина – Фойхта [5 – 7]. Будет показано, что такой подход является актуальным и эффективным, когда он применяется вслед за первым (лабораторным) способом получения ядра и позволяет, например, проанализировать влияние температуры материала на вынужденные колебания вязкоупругого континуума. Но прежде мы кратко остановимся на стандартном методе решения этой задачи, упомянутом выше под номером 2.

Влияние вязкого трения на частоты и амплитуды колебаний. Если в задаче не учитывается трение, то ядро интеграла (1), которое мы здесь и далее будем обозначать $K_0(t)$, может быть вычислено как сумма ряда [8]

$$K_0(t) = \sum_{j=0,1,2,\dots} f(\omega_j) \cdot \sin(\omega_j t), \tag{3}$$

где $\omega_j, j = 0, 1, 2, \dots$ – круговые частоты свободных колебаний континуума, перечисленные в порядке возрастания их величины; $f(\omega)$ – амплитудные функции, возникающие при локализации собственных форм колебаний с частотой ω в точке x_0 .

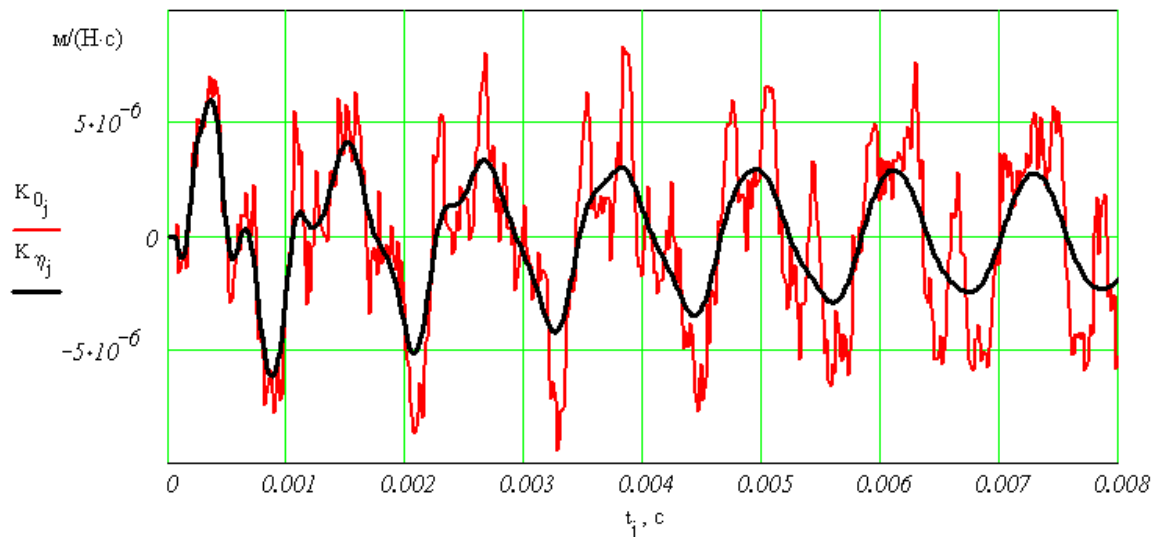


Рис. 1 – Ядра интегралов (1) и (2) для расчета колебаний прямоугольной пластины.

Все значения частот ω_j в этой сумме являются положительными числами, причем для двух- или трехмерных континуумов они не являются кратными, поэтому ядро $K_0(t)$, построенное для примера прямоугольной пластины на рис. 1, не имеет периода повторения, а снижение начальной амплитуды колебаний является следствием наложения гармоник с различными фазами. Дополнительные подробности, связанные с анализом колебаний пластины, приведены в конце этой статьи.

После учета внутреннего трения Кельвина – Фойхта, имеющего коэффициент трения η , равенство (3) приобретает следующий вид:

$$K_\eta(t) = \sum_{j=0,1,2,\dots} \text{Re}[f(i \cdot \lambda_j) \cdot \sin(i \cdot \lambda_j t)], \tag{4}$$

где здесь и далее $i^2 = -1$, а комплексные частоты λ_j находятся из характеристического уравнения

$$\lambda_j^2 + \eta\omega_j^2 \cdot \lambda_j + \omega_j^2 = 0.$$

При условии $\omega_j < 2/\eta$ частоты λ_j размещаются в комплексной плоскости на окружности, показанной на рис. 2, а, а соответствующие гармоники описывают затухающие периодические колебания; демпфирующий множитель j -той гармоники имеет вид $z_j(t) = \exp(-0.5\eta\omega_j^2 t)$. При значениях $\omega_j > 2/\eta$ частоты λ_j перемещаются на отрицательную полуось, а колебания становятся аperiodическими.

На рис. 2 левее штрихпунктирной прямой вязкое демпфирование оказывается настолько сильным, что на промежутке дискретизации $\Delta t = 0.01T_0$ (здесь T_0 – это период колебаний основной гармоники) амплитуда колебания уменьшается в 2 и более раз, и такие колебания далее можно не рассматривать. В результате для примера динамического деформирования пластины сумма (4) является конечной и содержит около 80 слагаемых.

График ядра $K_\eta(t)$ также показан на рис. 1; как и следовало ожидать, после учета трения затухание (или, выражаясь точнее, сглаживание формы) ядра усилилось.

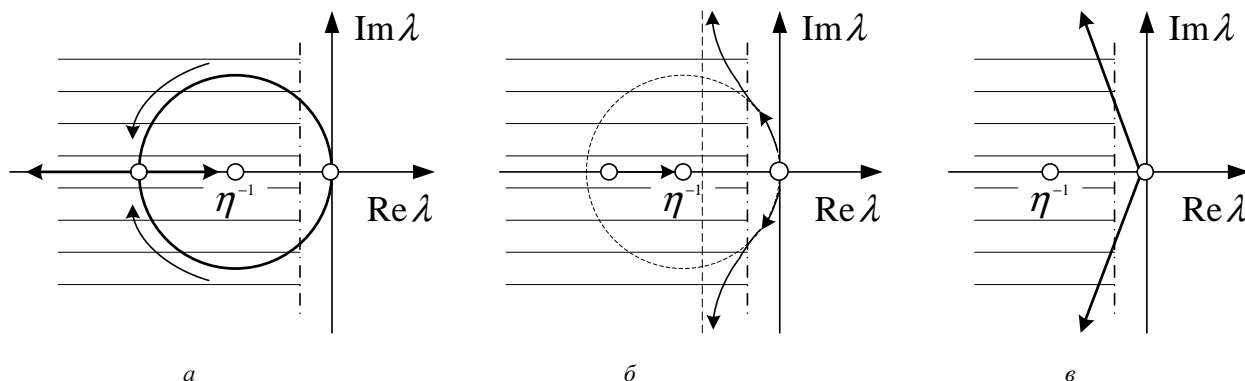


Рис. 2 – Расположение комплексных частот колебаний при различных моделях вязкоупругости: *a* – модель Кельвина – Фойхта; *b* – модель стандартного линейного тела; *c* – модель Бюка – Шлиппе – Колара.

Для различных упругих материалов декремент d_0 затухания основной гармоники разный [5, 6], но, как правило, он не выходит за границы диапазона 0.01 ... 0.1; на рис. 1 использовано $d_0 = 0.07$. Следовательно,

$$\eta/T_0 = 0.5 d_0 / \pi^2 \in [0.0005; 0.005].$$

Далее мы воспользуемся этим соотношением при аппроксимациях корректирующего ядра.

Теоретические основы нового метода. Вынужденные перемещения материала при переходном процессе деформирования упругого тела являются решениями следующего векторного уравнения:

$$\rho \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 = \mathcal{L}_x [\mathbf{u}] + \vec{P}(\mathbf{x}, t), \quad (5)$$

где ρ – плотность материала; $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = [u_x, u_y, u_z]$ – вектор перемещений в некоторой точке тела V с координатами \mathbf{x} (стержня, балки, пластины или оболочки) в момент времени t ; $\mathcal{L}_x [\mathbf{u}]$ – дифференциальный оператор, составленный из частных производных по координатам и описывающий действие сил упругости; $\vec{P}(t)$ – векторная величина возмущающей нагрузки (внешней силы), сосредоточенной в известной точке \mathbf{x}_0 ,

$$\vec{P}(\mathbf{x}, t) = P_0(t) \cdot \vec{n} \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

\vec{n} – орт направления действия силы; $y = \delta(\mathbf{x})$ – дельта-функция Дирака; $P_0(t)$ – скалярная величина, используемая в интегралах (1) или (2).

Для учёта внутреннего трения в рамках известной модели Кельвина – Фойхта уравнение (5) должно быть модифицировано следующим образом:

$$\rho \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 = \mathcal{L}_x [\mathbf{u} + \eta \partial \mathbf{u} / \partial t] + \vec{P}(t), \quad (6)$$

где η – коэффициент внутреннего трения, с.

Решения уравнения (5) или (6) разыскиваются при однородных граничных условиях вида

$$\mathcal{L}_{\partial V} [\mathbf{u}] = 0$$

и нулевым начальном условии

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \text{ при } t \leq 0,$$

где $\mathcal{L}_{\partial V} [\mathbf{u}]$ – это линейный оператор, использующий значения функции $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ и ее производных по координатам на точках границы ∂V и не зависящий от времени.

После применения преобразования Лапласа к обеим частям выражения (4) получим в пространстве изображений следующее равенство:

$$\rho s^2 \mathbf{u}_S = \mathcal{L}_x [\mathbf{u}_S + \eta s \mathbf{u}_S] + \vec{P}(s),$$

которое может быть преобразовано к эквивалентному виду:

$$\rho s^2 \mathbf{u}_S = \mathcal{L}_x [\mathbf{u}_S] \cdot (1 + \eta s) + \vec{P}(s),$$

или

$$[\rho s^2 \mathcal{I}[\cdot] - (1 + \eta s) \mathcal{L}_x[\cdot]] \mathbf{u}_S = \vec{P}(s), \quad (7)$$

где $\mathcal{I}[\cdot]$ – это единичный оператор.

Уравнение (7) имеет решение

$$\mathbf{u}_s = [\rho s^2 \mathcal{I}[\cdot] - (1 + \eta s) \cdot \mathcal{L}_x[\cdot]]^{-1} \bar{P}(s),$$

которое можно переписать в следующем виде:

$$\mathbf{u}_s(\mathbf{x}, s) = K_\eta(\mathbf{x}, s) P_0(s). \tag{8}$$

где

$$K_\eta(\mathbf{x}, s) = \frac{1}{1 + \eta s} \cdot [(\rho s^2 / (1 + \eta s)^{-1}) \cdot \mathcal{I}[\cdot] - \mathcal{L}_x[\cdot]]^{-1}. \tag{9}$$

Если в (7) принять значение $\eta = 0$ и, тем самым, временно отказаться от учета трения, то получим более простое соотношение:

$$\mathbf{u}_s = [\rho s^2 \mathcal{I}[\cdot] - \mathcal{L}_x[\cdot]]^{-1} \bar{P}(s), \tag{10}$$

или

$$\mathbf{u}_s(\mathbf{x}, s) = K_0(\mathbf{x}, s) \bar{P}(s),$$

откуда, после перехода к оригиналам и локализации результата в точке \mathbf{x}_s , интересующей исследователя, будем иметь сверточный интеграл вида

$$u(t) = \int_0^t K_0(t - \tau) P_0(\tau) d\tau. \tag{11}$$

Тогда, с учетом известной теоремы Эфроса об оригинале сложного изображения [9, 10], соотношение (9) будет эквивалентно равенству

$$u(t) = \int_0^t K_\eta(t - \tau) P_0(\tau) d\tau,$$

где

$$K_\eta(t) = \int_0^\infty \Psi_\eta(t, \tau) K_0(\tau) d\tau,$$

а изображение по Лапласу функции $\Psi_\eta(t, \tau)$ имеет вид

$$\Psi_\eta(s, \tau) = \frac{1}{1 + \eta s} \cdot \exp\left(-\tau \cdot \frac{s}{\sqrt{1 + \eta s}}\right), \tag{12}$$

причем в этом изображении неотрицательное число τ играет роль параметра.

Как видим, учет трения сводится к корректировке разностного ядра Коши в интеграле (11), и

операция корректирования ядра одинакова для всех упругих систем и для всех точек системы.

Функцию $\Psi(t, \tau)$ будем называть *корректирующим ядром*. Если принять значение $\eta = 0$, то получим

$$\Psi_0(s, \tau) = \exp(-\tau s), \text{ что соответствует оригиналу } \Psi_0(t, \tau) = \delta(t - \tau).$$

Но если коэффициент трения $\eta > 0$, то оригинал для изображения (12), к сожалению, отсутствует в справочниках по операционному исчислению, и эта задача потребовала разработки специального метода нахождения корректирующего ядра.

Интегральное свойство корректирующего ядра. Для решения поставленной задачи оказалось возможным прямое использование формулы обращения (здесь i – это мнимая единица)

$$\Psi_\eta(t, \tau) = \lim_{\Omega \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\Omega \operatorname{Re} \left[\frac{1}{1 + \eta \cdot i\omega} \cdot \exp\left(-\tau \cdot \frac{i\omega}{\sqrt{1 + \eta \cdot i\omega}} + t \cdot i\omega\right) \right] d\omega,$$

где интегрирование выполнялось стандартной процедурой пакета MathCAD, а предел Ω круговых частот ω устанавливался с учетом стабилизации получаемых результатов и во всех случаях удовлетворял условию

$$\Omega \cdot \eta > 10^4.$$

Значения функции $\Psi_\eta(t, \tau)$ оказались положительными, а характерный вид графиков, отвечающих сечению этой функции при постоянных значениях времени t , показан на рис. 3.

Выясним, чему равняются площади $w(t)$ под графиками сечений корректирующего ядра $\Psi_\eta(t, \tau)$:

$$w(t) = \int_0^\infty \Psi_\eta(t, \tau) d\tau.$$

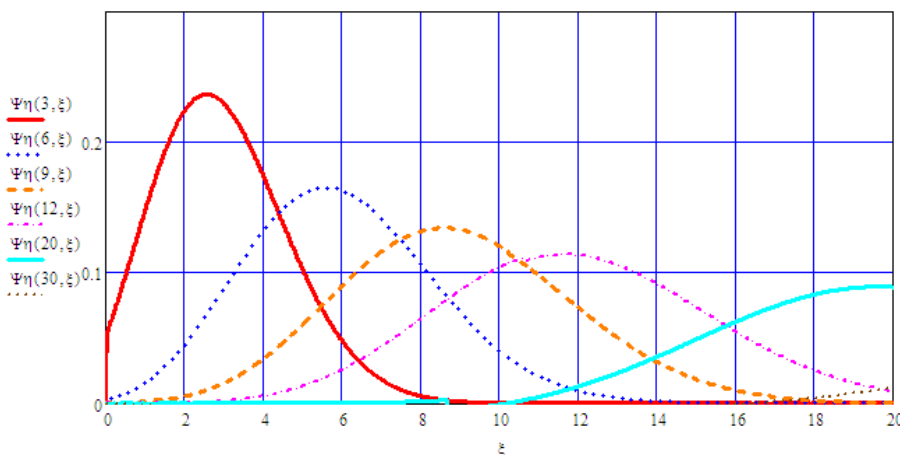
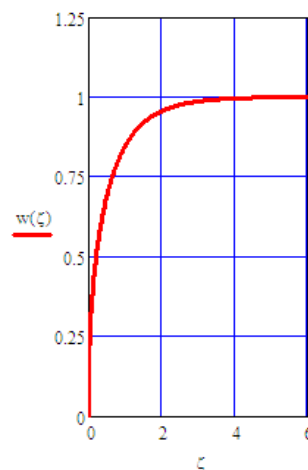
Рис. 3 – Графики корректирующего ядра $\Psi_{\eta}(\zeta, \xi) = \Psi_{\eta}(t/\eta, \tau/\eta)$.

Рис. 4 – Площадь под графиком корректирующего ядра.

Для этого применим к обеим частям определения (13) преобразование Лапласа:

$$w(s) = \int_0^{\infty} \Psi_{\eta}(s, \tau) d\tau = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+\eta s} \cdot \exp\left(-\tau \cdot \frac{s}{\sqrt{1+\eta s}}\right) d\tau = \frac{1}{s\sqrt{1+\eta s}}.$$

От изображения (14) несложно перейти к оригиналу, используя таблицу преобразования Лапласа из [7]:

$$w(t) = \operatorname{erf}(\sqrt{t/\eta}),$$

где $y = \operatorname{erf}(x)$ – это интеграл вероятностей [11].

Отношение $\zeta = t/\eta$ является безразмерной величиной и обозначает изменение времени для шкалы, где коэффициент вязкости η является единицей. График функции $w(\zeta)$ показан на рис. 4; при значениях $\zeta > 3$, то есть при условии $t > 3\eta$, площадь под графиком отличается от 1 на величину, которой допустимо пренебречь.

Гауссова аппроксимация корректирующего ядра. Анализ расчетных кривых $z(\tau) = \Psi_{\eta}(t, \tau)$ показал, что при условии $t > 3\eta$ форма сечения близка к форме графика плотности нормального распределения (то есть, к кривой Гаусса $y = \rho_0(\tau - t, \sqrt{\eta t})$), причем максимум кривой близок к моменту t , но несколько отклоняется в меньшую сторону (рис. 3). В этом пункте мы приведем математическое обоснование этого утверждения.

В силу известного свойства преобразования Лапласа, значения $f(t)$ оригинала при больших аргументах $t \rightarrow +\infty$ определяются значениями изображения $F(s)$ при малых $s \rightarrow 0$. Воспользуемся этим свойством и при условии, что $s \rightarrow 0$, выполним следующее преобразование правой части равенства (10):

$$\frac{1}{1+\eta s} \cdot \exp\left(-\tau \cdot \frac{s}{\sqrt{1+\eta s}}\right) \approx \frac{1}{(1+0.5\eta s)^2} \cdot \exp\left(-\tau \cdot \frac{s}{1+0.5\eta s}\right) = \left\| \frac{1+0.5\eta s = p}{s = p - 2/\eta} \right\| = \frac{4}{\eta^2 p^2} \cdot \exp(-2\tau/\eta) \cdot \exp\left(\frac{4\tau}{\eta^2 p}\right).$$

Далее используем таблицу преобразования Лапласа и переходим от изображения к оригиналу:

$$\Psi_{\eta}(t, \tau) \approx \frac{4}{\eta^2} \cdot \exp(-2(t+\tau)/\eta) \cdot \sqrt{\frac{t}{4\tau/\eta^2}} \cdot I_1\left(2\sqrt{\frac{4\tau \cdot t}{\eta^2}}\right) = \frac{2}{\eta} \cdot \exp(-2(t+\tau)/\eta) \cdot \sqrt{\frac{t}{\tau}} \cdot I_1\left(\frac{4}{\eta} \sqrt{\tau t}\right),$$

где $y = I_1(x)$ – это модифицированная функция Бесселя первого порядка.

Для дальнейшего упрощения результата воспользуемся асимптотическими формулами для модифицированных функций Бесселя [11] вида

$$I_1(x) \approx \exp(x) / \sqrt{2\pi x}$$

и получим:

$$\Psi_{\eta}(t, \tau) \approx \frac{2}{\eta} \cdot \exp(-2(t+\tau)/\eta) \cdot \sqrt{\frac{t}{\tau}} \cdot \exp\left(\frac{4}{\eta} \sqrt{\tau t}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 4\sqrt{\tau t}/\eta}} = \frac{\sqrt[4]{(t/\tau)^3}}{\sqrt{2\pi \eta t}} \cdot \exp\left(-\frac{(\sqrt{\tau} - \sqrt{t})^2}{0.5\eta}\right),$$

или

$$\Psi_{\eta}(t, \tau) \approx \frac{\sqrt[4]{(t/\tau)^3}}{\sqrt{2\pi \eta t}} \cdot \exp\left(-\frac{(\tau-t)^2}{0.5\eta(\sqrt{t} + \sqrt{\tau})^2}\right)$$

При выполнении условия $t/\eta \gg 1$ эта функция имеет следующую аппроксимацию:

$$\Psi_\eta(t, \tau) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta t}} \cdot \exp\left(-\frac{(\tau-t)^2}{2\eta t}\right), \tag{13}$$

которая совпадает с функцией $y = \rho_0(\tau - a, \sigma)$ плотности нормального распределения, имеющего математическое ожидание $a = t$ и дисперсию $\sigma^2 = \eta t$, что и требовалось доказать.

Сглаживающий оператор Кельвина – Фойхта и его свойства. На классе оригиналов $y = K(t)$, заданных при значениях $t \geq 0$, кусочно-непрерывных и интегрируемых на любом конечном промежутке изменения аргумента t , определим линейный интегральный оператор формулой

$$\mathcal{G}_\eta[K(t)] = \int_0^\infty \rho_0(\tau - t, \sqrt{\eta t}) \cdot K(\tau) d\tau. \tag{14}$$

Как следует из предыдущего материала, именно этот оператор при условии $t/\eta \gg 1$ по формуле

$$K_\eta(t) = \mathcal{G}_\eta[K_0(t)]$$

выполняет сглаживающую корректировку ядра $y = K_0(t)$ при учете внутреннего трения Кельвина – Фойхта, поэтому мы назвали его *сглаживающим оператором Кельвина – Фойхта* (сокращенно – ОКФ).

Учитывая свойства кривой Гаусса, переменная интегрирования τ в (14) не выходит за пределы промежутка

$$[t - 3\sqrt{\eta t}; t + 3\sqrt{\eta t}],$$

так что пределы интегрирования можно заменить на более узкие, и мы получим:

$$\mathcal{G}_\eta[K(t)] = \int_{t-3\sqrt{\eta t}}^{t+3\sqrt{\eta t}} \rho_0(\tau - t, \sqrt{\eta t}) \cdot K(\tau) d\tau.$$

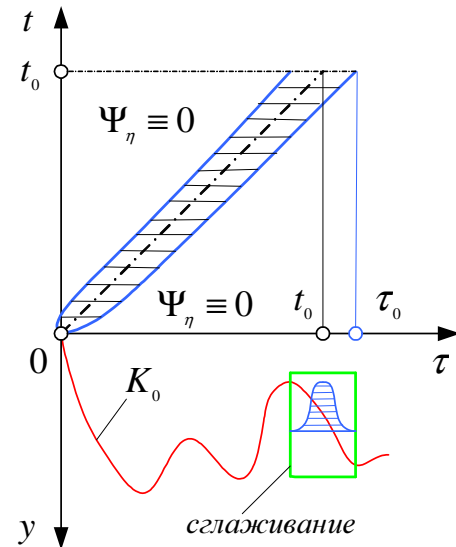


Рис. 5 – Графическая интерпретация процедуры сглаживания ядра.

ОКФ во многом напоминает известный *фильтр Гаусса* [11], используемый при обработке результатов эксперимента, но имеется существенное отличие: здесь дисперсия – это переменная величина, которая увеличивается пропорционально корню из времени t . В результате чего носитель корректирующего ядра приобретает клиновидную форму, выделенную на рис. 5 пунктиром.

Как и любой другой оператор, ОКФ можно применять повторно; кроме того, можно перемножать (то есть применять последовательно) ОКФ, отвечающие различным коэффициентам вязкости. Смысл доказанной ниже теоремы заключается в том, что при таком перемножении мы опять получим ОКФ, и эта операция является коммутативной.

Теорема. Пусть даны два коэффициента вязкого трения η_1, η_2 . Тогда при условии $t/(\eta_1 + \eta_2) \gg 1$ выполняется равенство

$$\mathcal{G}_{\eta_2}[\mathcal{G}_{\eta_1}[K(t)]] = \mathcal{G}_{\eta_1 + \eta_2}[K(t)].$$

Доказательство. Повторному сглаживанию отвечает корректирующее ядро следующего вида:

$$\Psi_\Sigma(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_2 t}} \cdot \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(\xi-t)^2}{2\eta_2 t}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_1 \xi}} \cdot \exp\left(-\frac{(\tau-\xi)^2}{2\eta_1 \xi}\right) d\xi.$$

При условии $t/\eta \gg 1$ этот интеграл можно заменить более простым:

$$\Psi_\Sigma(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_2 t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_1 t}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(\xi-t)^2}{2\eta_2 t} - \frac{(\tau-\xi)^2}{2\eta_1 t}\right) d\xi,$$

и в аргументе экспоненты выделить полный квадрат по переменной ξ :

$$-\frac{(\xi-t)^2}{2\eta_2 t} - \frac{(\tau-\xi)^2}{2\eta_1 t} = -\frac{1}{2t} \cdot \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 \eta_2} \cdot \left[\xi - \frac{\eta_1 t + \eta_2 \tau}{\eta_1 + \eta_2}\right]^2 - \frac{(\tau-t)^2}{2t \cdot (\eta_1 + \eta_2)}.$$

Следовательно

$$\Psi_{\Sigma}(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_2 t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_1 t}} \cdot \exp\left(-\frac{(\tau-t)^2}{2t \cdot (\eta_1 + \eta_2)}\right) \cdot \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2t} \cdot \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 \eta_2} \cdot \left[\xi - \frac{\eta_1 t + \eta_2 \tau}{\eta_1 + \eta_2}\right]^2\right) d\xi.$$

Для интеграла воспользуемся равенствами

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2t} \cdot \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 \eta_2} \cdot \left[\xi - \frac{\eta_1 t + \eta_2 \tau}{\eta_1 + \eta_2}\right]^2\right) d\xi \approx \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2t} \cdot \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 \eta_2} \cdot \xi^2\right) d\xi = \sqrt{2\pi t \cdot \eta_1 \eta_2 / (\eta_1 + \eta_2)}$$

и, после сокращения одинаковых выражений, получим:

$$\Psi_{\Sigma}(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\eta_1 + \eta_2)t}} \cdot \exp\left(-\frac{(\tau-t)^2}{2(\eta_1 + \eta_2)t}\right),$$

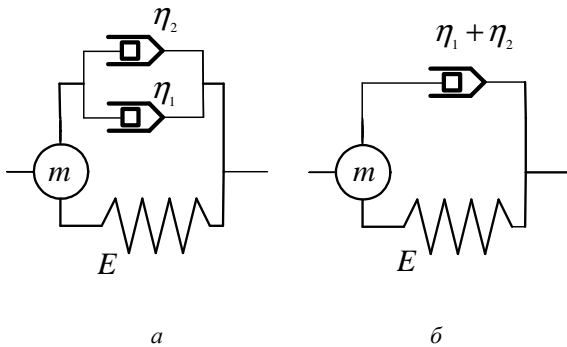


Рис. 6 – Заменяющие схемы для динамического анализа вязкоупругого поведения материала:

а – при последовательном сглаживании;

б – при суммарном сглаживании.

На схемах обозначено:

m – масса; *E* – упругость, $\eta_{1,2}$ – вязкость.

что и требовалось доказать.

Если использовать для анализа заменяющие схемы, показанные на рис. 6, то доказанный результат покажется тривиальным. Но не следует забывать, что при условии $t \rightarrow +0$ он нарушается, и это лишний раз свидетельствует о несовершенстве упрощенных схем.

Заметим, что при значении $\eta = 0$ оператор $\mathcal{G}_0[\cdot]$ удовлетворяет тривиальному равенству $\mathcal{G}_0[K(t)] = K(t)$ и является единичным. Если в уравнении (6) и формуле (9) использовать отрицательное значение η , то мы придем к обратному оператору Кельвина – Фойхта, то есть

$$\mathcal{G}_{-\eta}^{-1}[\cdot] = \mathcal{G}_{-\eta}[\cdot].$$

Обратный оператор не является сглаживающим, наоборот, после его действия размах колебаний возрастает.

Разумеется, авторы осведомлены о том, что отрицательных коэффициентов трения в природе не существует, но

готовы немедленно продемонстрировать пользу от применения нового понятия.

Предположим, что ядро $y = K_{\eta}(t)$, показанное на рис. 1, получено не путем суммирования ряда (4), а при выполнении лабораторных исследований, то есть формы и частоты собственных колебаний неизвестны. Но хорошо известно [5], что коэффициенты внутреннего трения сильно зависят от температуры (значительно сильнее, чем модули упругости и сдвига). Требуется оценить, как изменится ядро $y = K_{\eta}(t)$ (и все другие характеристики, которые зависят от этого ядра), если в результате снижения температуры декремент затухания d_0 уменьшится в 2 раза – до значения $d_0 = 0.035$. Для решения этой задачи должна быть выполнена обратная корректировка ядра, то есть, применен обратный ОКФ.

Ясно, что использовать формулу (13) здесь недопустимо, и формула обращения должна иметь другой вид. Но, кроме операционного исчисления, существуют и другие методы решения подобных задач. Например, обратный оператор можно искать как сумму следующего ряда:

$$\mathcal{G}_{\eta}^{-1}[\cdot] = [I[\cdot] - (I[\cdot] - \mathcal{G}_{\eta}[\cdot])]^{-1} = I[\cdot] + (I[\cdot] - \mathcal{G}_{\eta}[\cdot]) + (I[\cdot] - \mathcal{G}_{\eta}[\cdot])^2 + (I[\cdot] - \mathcal{G}_{\eta}[\cdot])^3 + \dots \quad (15)$$

Если коэффициент трения η мал, то разность между функциями $y = K(t)$ и $y = \mathcal{G}_{\eta}[K(t)]$ также мала, поэтому в сумме (15) можно оставить только два или три первых слагаемых, и мы получим приближенные формулы для обратного оператора:

$$\mathcal{G}_{\eta}^{-1}[\cdot] \approx 2I[\cdot] - \mathcal{G}_{\eta}[\cdot] \text{ или } \mathcal{G}_{\eta}^{-1}[\cdot] \approx 3I[\cdot] - 3\mathcal{G}_{\eta}[\cdot] + \mathcal{G}_{2\eta}[\cdot]. \quad (16)$$

Применения этих формул для поставленной выше задачи проиллюстрировано на рис. 7. Ядро $y = Kg(t)$ получено как результат действия прямого ОКФ, а ядра $y = K\eta 2(t)$ и $y = K\eta 3(t)$ – как результат последовательного действия прямого (с удвоенным декрементом) и обратного ОКФ:

$$Kg(t) = \mathcal{G}_{\eta}[K_0(t)]; \quad K\eta(t) = \mathcal{G}_{\eta}^{-1}[\mathcal{G}_{2\eta}[K_0(t)]]$$

На рис. 7 расхождение между графиками мало, что подтверждает эффективность метода. Исследования по тематике обратного ОКФ пока что не завершены, поэтому его результаты будут опубликованы позже.

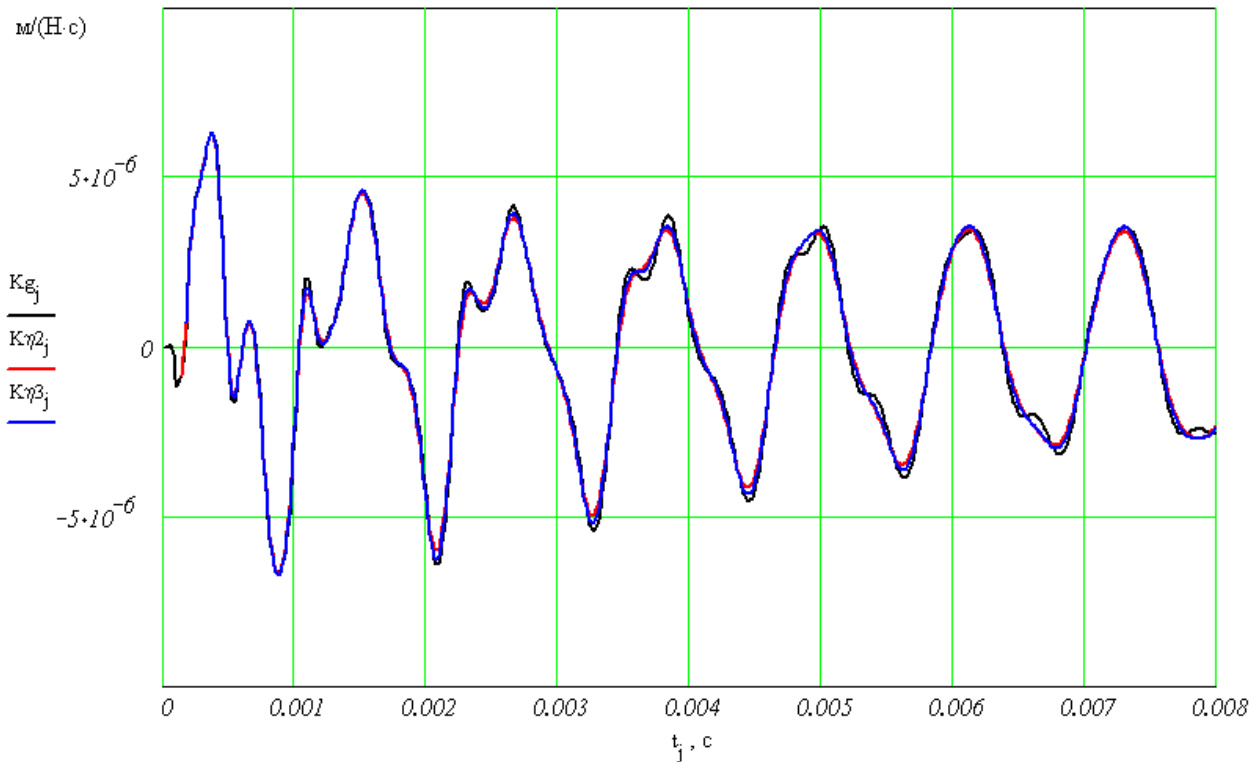


Рис. 7 – Пример применения обратного оператора в форме начального отрезка ряда (15):
 $K_{\eta}(t)$ – точное ядро; $K_{\eta 2}(t)$ – первое приближение (2 слагаемых ряда); $K_{\eta 3}(t)$ – второе приближение (3 слагаемых).

Характер изменения корректирующего ядра при малом времени. Аппроксимация (13) корректирующей функции для времени $t = 0$ принимает положительное значение

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\eta\tau}} \cdot \exp\left(-\frac{\tau}{2\eta}\right),$$

но при этом сама корректирующая функция равняется 0.

Чтобы доказать это утверждение, рассмотрим изображение (12) при $s \rightarrow \infty$ и упростим его следующим, допустимым для этого случая, образом:

$$\frac{1}{1+\eta s} \cdot \exp\left(-\tau \cdot \frac{s}{\sqrt{1+\eta s}}\right) \approx \frac{1}{\eta s} \cdot \exp\left(-\tau \cdot \sqrt{\frac{s}{\eta}}\right).$$

Полученное изображение имеет оригинал

$$y = \operatorname{erfc}(\tau/\sqrt{\eta t})/\eta,$$

который при $t = 0$ равен 0, что и требовалось проверить.

Заметим, что аппроксимацией

$$\Psi_{\eta}(t, \tau) \approx \operatorname{erfc}(\tau/\sqrt{\eta t})/\eta \tag{17}$$

можно пользоваться, если $t < \eta$, что, например, актуально при решении некоторых задач теории ползучести. Что касается моделирования колебаний с учетом вязкого трения, то здесь столь малые значения времени, как правило, не используются, а во всем рабочем диапазоне для сглаживания ядра можно применять функцию (13).

Метод устранения особенности для расчета корректирующего ядра. В практическом гармоническом анализе разработан и используется метод Крылова улучшения сходимости тригонометрического ряда Фурье. Аналогичный метод можно применить для вычисления несобственного интеграла в формуле обращения, которая для рассматриваемого случая имеет следующий вид:

$$\Psi_{\eta}(t, \tau) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{1+\eta \cdot i\omega} \cdot \exp\left(\frac{-\tau \cdot i\omega}{\sqrt{1+\eta \cdot i\omega}} + t \cdot i\omega\right) \right] d\omega. \tag{18}$$

Изображение $\Psi_{\eta}(s, \tau)$ представим в виде суммы

$$\Psi_{\eta}(s, \tau) = \frac{1}{1 + \eta s} \left[\exp\left(-\tau \cdot \frac{s}{\sqrt{1 + \eta s}}\right) - \exp\left(-\tau \cdot \sqrt{\frac{s}{\eta}}\right) \right] + \frac{1}{1 + \eta s} \cdot \exp\left(-\tau \cdot \sqrt{\frac{s}{\eta}}\right)$$

и заметим, что второе слагаемое является произведением двух известных изображений и может быть обращено при использовании свертки соответствующих оригиналов; в результате получаем:

$$\Psi_2(t, \tau) = \left(\frac{1}{\eta} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\eta}\right) \right) * \left(\frac{\tau}{2\sqrt{\pi t^3 \eta}} \cdot \exp\left(-\frac{\tau^2}{4\eta t}\right) \right).$$

На практике используется шкала $\zeta = t/\eta$ безразмерного времени, и приближенная формула для определения значений этой функции имеет следующий вид:

$$\Psi_2(\zeta, \tau) = \frac{\tau}{\sqrt{\pi}} \int_{1/\sqrt{\zeta}}^{100/\sqrt{\zeta}} \exp\left[-\left(t - 1/\zeta^2 + (\tau/\eta)^2 \zeta^2 / 4\right)\right] d\zeta;$$

для вычисления этого интеграла используются стандартные процедуры пакета MathCAD.

Для первого слагаемого приходится, по-прежнему, применять формулу обращения,

$$\Psi_1(t, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\Omega_1} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{1 + \eta \cdot i\omega} \cdot \exp(t \cdot i\omega) \cdot \left(\exp\left(\frac{-\tau \cdot i\omega}{\sqrt{1 + \eta \cdot i\omega}}\right) - \exp\left(-\tau \cdot \sqrt{\frac{i\omega}{\eta}}\right) \right) \right] d\omega,$$

но поскольку подынтегральная функция с возрастанием частоты ω убывает значительно быстрее, чем в интеграле (18), то при практическом использовании этой формулы верхний предел уменьшается на два порядка:

$$\Omega_1 \cdot \eta > 10^2.$$

После этого используется равенство

$$\Psi_{\eta}(t, \tau) = \Psi_1(t, \tau) + \Psi_2(t, \tau), \quad (19)$$

которое, пусть и является приближенным, но погрешность определения ядра по указанному методу крайне мала. Результат применения метода для начального промежутка времен $t < \eta$ показан на рис. 8.

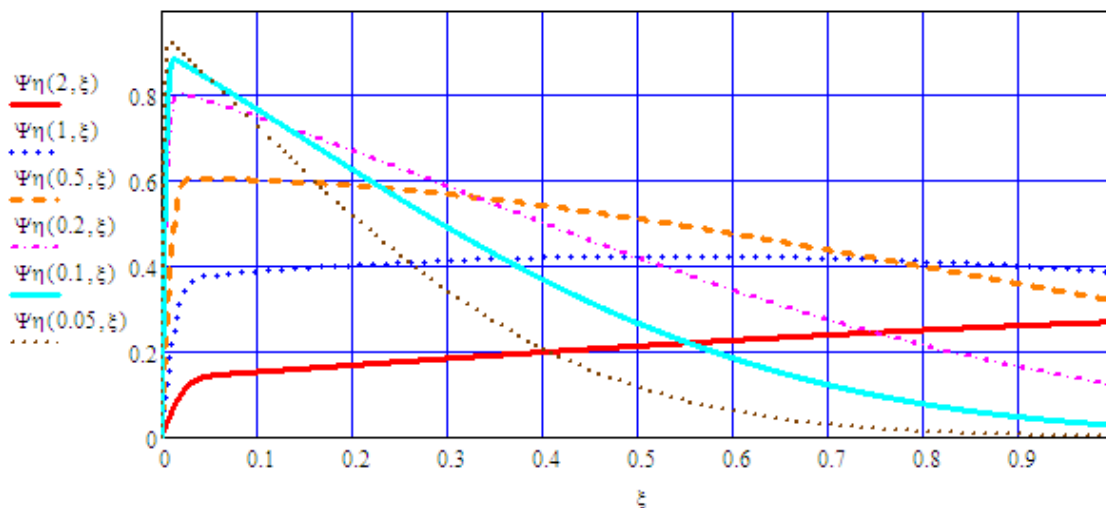


Рис. 8 – Графики корректирующего ядра $\Psi_{\eta}(\zeta, \xi) = \Psi_{\eta}(t/\eta, \tau/\eta)$ при малом безразмерном времени.

Получены по формуле (19); участки монотонного возрастания при значениях $\xi < 0.01$ отвечают аппроксимации (17).

Область применения нового метода и перспективы ее расширения. Описанный подход, после дополнительной специализации корректирующего ядра, естественным образом распространяется на задачи ползучести и текучести, а также на общую задачу вязкоупругого деформирования, в которой вместо модели Кельвина – Фойхта используется модель стандартного линейного тела (СТЛ). В частности, применительно к СТЛ равенство (13) принимает следующий вид:

$$\Psi_{\eta}(s, \tau) = \frac{1 + \delta_E \eta s}{1 + \eta(1 + \delta_E)s} \cdot \exp\left(-\tau s \cdot \sqrt{\frac{1 + \delta_E \eta s}{1 + \eta(1 + \delta_E)s}}\right), \quad (20)$$

где $\delta_E = E_1/E_2$; E_1, E_2 – это модули упругости из моделей Кельвина – Фойхта и Максвелла.

Изображение (20) и комплексные частоты колебаний (рис. 2, б), имеют другую асимптотику, что изменяет поведение оригинала при времени $t \rightarrow +0$. Но начальные отрезки скорректированных частот на рис. 2, а, б близки, поэтому при анализе механических колебаний для модели СТЛ при учете вязкости можно продолжать использовать оператор $G_\eta[\cdot]$.

При решении задачи ползучести на первый план выходит другая проблема: коэффициент трения η здесь очень большой (нередко он составляет сотни секунд), и при применении оператора Кельвина – Фойхта для малого момента времени t (составляющего доли секунды) приходится определять исходное ядро для большого промежутка времени, соизмеримого со среднеквадратичным отклонением $\sigma = \sqrt{\eta t}$. Отношение

$$\sigma / t = \sqrt{\eta / t} \gg 1,$$

и чем больше эта величина, тем ниже эффективность такого подхода к решению задачи.

В этой связи возникает гносеологический аспект, который необходимо прояснить. При корректировке ядра $y = K_0(t)$, производимого для некоторого момента времени t_0 , ОКФ использует (рис. 5) значения этого же ядра с промежутка

$$t \in [t_0 - 3\sqrt{\eta t_0}; t_0 + 3\sqrt{\eta t_0}],$$

то есть, в том числе, для моментов времени $t > t_0$. Ядро $y = K_0(t)$ – это реакция упругого континуума на нормированное внешнее возмущение, и, казалось бы, возникает нарушение известного *физического принципа причинности*. В действительности никакого нарушения здесь нет – нормированное возмущение производится в начальный момент времени $t = 0$, а разностный характер интегрального ядра означает, что упругие характеристики процесса (коэффициенты соответствующих уравнений) не зависят от времени. Поэтому реакция $y = K_0(t)$ для всех моментов времени $t > 0$ предопределена изначально, и отклониться от заданной траектории она не может.

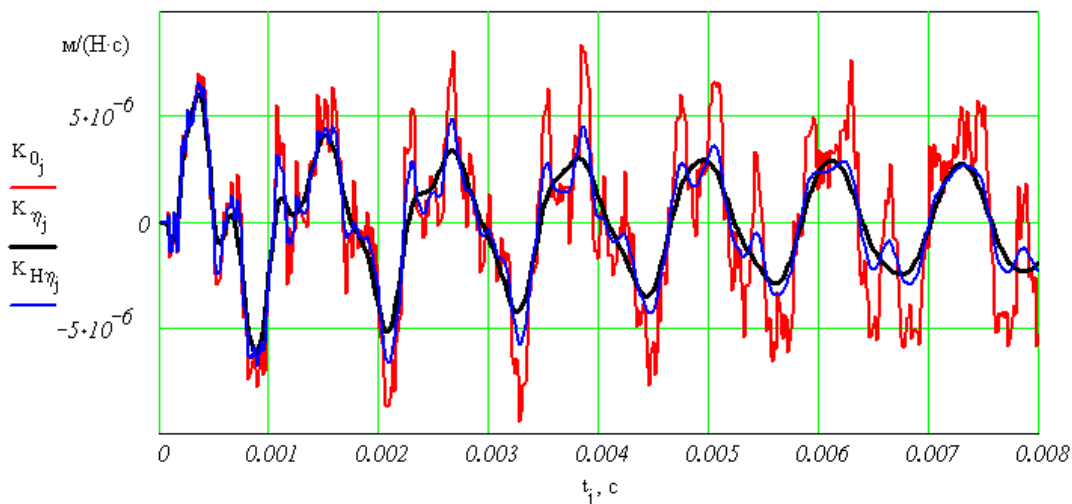


Рис. 9 – Результаты сглаживания ядра $y = K_0(t)$ интеграла Дюамеля под действием вязкого (график $y = K_\eta(t)$) и гистерезисного (график $y = K_{H\eta}(t)$) трения.

Расчет колебаний прямоугольной пластины; декремент затухания $d_0 = 0.07$.

Важнейшим направлением дальнейших исследований является продвижение нового подхода в задачи, где применяется модель гистерезисного трения (например, для упругих континуумов из стали, никеля и других ферромагнитных материалов). В модели Бока – Шлиппе – Колара [6] оператор гистерезисного трения вместо производной по времени, как в равенстве (6), использует производную по фазовому углу для каждой формы собственных колебаний \mathbf{u}_j , и уравнение переходного процесса принимает вид:

$$\rho \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 = L_x \left[\mathbf{u} + \eta \sum_{j=1,2,\dots} (\omega_0 / \omega_j) \partial \mathbf{u}_j / \partial t \right] + \bar{P}(t), \quad \mathbf{u} = \sum_{j=1,2,\dots} \mathbf{u}_j \cdot$$

Отметим, что такое трение сохраняет формы собственных колебаний \mathbf{u}_j , отвечающие задаче упругой деформации (без диссипации), поэтому в рамках стандартного подхода анализ колебаний не составляет труда и сводится к задаче суммирования ряда

$$K_\eta(t) = \sum_{j=0,1,2,\dots} \text{Re}[f(i \cdot \lambda_j) \cdot \sin(i \cdot \lambda_j t)],$$

где комплексные частоты λ_j (рис. 2, в) находятся из характеристического уравнения

$$\lambda_j^2 + \eta \omega_0 \omega_j \lambda_j + \omega_j^2 = 0.$$

Результат расчета ядра $y = K_\eta(t)$ для прямоугольной пластины при гистерезисном трении с декрементом затухания $d = 0.07$ (здесь он одинаковый для всех гармоник) показан на рис.9; туда же помещен график ядра, полученный для вязкого трения при декременте $d_0 = 0.07$.

Сопоставление результатов имеет непосредственный физический смысл: в первом случае пластина изготовлена из углеродистой (а, значит, магнитной) стали, а во втором – из нержавеющей (не магнитной) стали. Упругие и инерционные характеристики этих материалов одинаковы, размеры и граничные условия для пластины – тоже одинаковые, а природа трения – разная. О факторах диссипации и их связи со свойствами упругого материала достаточно подробно сказано в [5], и добавлять новые сведения не будем, ограничимся ссылкой.

Анализируя рис. 9, видим, что графики заметно различаются. Гистерезисное трение по сравнению с вязким трением уменьшает сглаживание ядра. Поэтому применять для этого случая ОКФ не допустимо, и, принимая во внимание широкую область применения ферромагнитных материалов, приобретает особую актуальность задача синтеза сглаживающего интегрального оператора Бока – Шлиппе – Колара (ОБШК), а также обратного ОБШК (если, разумеется, указанные математические объекты существуют).

Пример использования разработанной теории для прямоугольной пластины. Выражение для прогиба

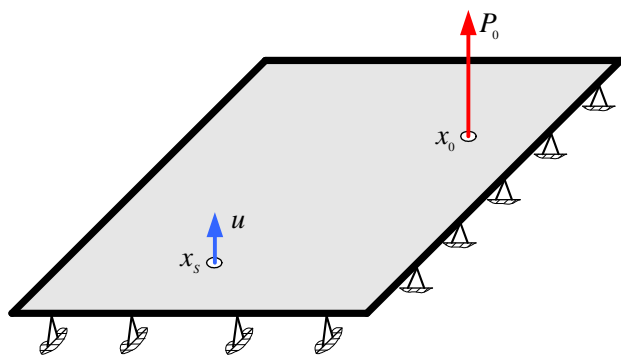


Рис. 10 – Схема нагружения пластины.

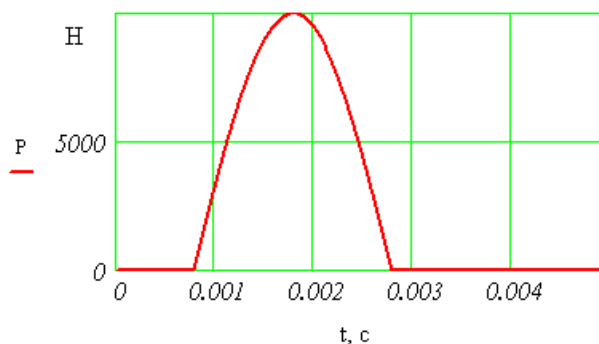


Рис. 11 – Сила, возбуждающая колебания в пластине.

пластины в случае (рис. 10), когда на неё действует нестационарная поперечная нагрузка $P_0(t)$ импульсного типа (рис. 11), приведено, например, в [8], и имеет следующий вид:

$$w(x, y, t) = \int_0^t K(x, y, t - \tau) \cdot P(\tau) d\tau, \quad (21)$$

где $w(x, y, t)$ – изменение прогиба пластины во времени; $K_i(x, y, t)$ – упругое разностное ядро интеграла типа свертки в точке пластины с координатами $\mathbf{x}(x, y)$. Методы получения ядер и их вид описаны в [2, 8].

Если считать, что возмущающая сила является сосредоточенной нагрузкой, то соответствующее ядро Коши $K_0(t)$ для шарнирно-опертой пластины из нержавеющей стали средней толщины по модели типа С. П. Тимошенко будет иметь вид:

$$K(x_s, y_s, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\Omega_{1kn} \cdot \sin(\omega_{1kn}t) - \Omega_{2kn} \cdot \sin(\omega_{2kn}t)] \cdot \sin\left(\frac{k\pi x_0}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y_0}{m}\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi x_s}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y_s}{m}\right), \quad (22)$$

где ω_{1kn} и ω_{2kn} – собственные частоты колебаний пластины; l и m – длина и ширина пластины; (x_0, y_0) – координаты точки \mathbf{x}_0 , в которой прикладывается нагрузка, а (x_s, y_s) – это координаты точки \mathbf{x}_s , в которой определяется изменение прогиба во времени.

На рис. 12 представлен вид ядер для свёрточных интегралов (21): кривая 1 – это исходное ядро (17), а кривые 2, 3 и 4 соответствуют модифицированным (согласно описанной выше процедуре) ядрам с декрементами затухания основной формы колебаний $d_0 = 0.01$, $d_0 = 0.02$, $d_0 = 0.1$.

При расчетах срединная плоскость пластины была связана с плоскостью xOy декартовой системы координат. Расчеты производились при следующих значениях параметров:

- плотность материала $\rho = 7890$ кг/м³; коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$; модуль упругости $E = 207$ ГПа;
- толщина пластины $h = 0.04$ м; длина $l = 0.6$ м, ширина $m = 0.4$ м;
- координаты точки приложения возмущающей нагрузки имеют значения: $x_0 = 0.4$ м, $y_0 = 0.3$ м;
- координаты точки, в которой исследуются вязкоупругие колебания пластины: $x_s = 0.25$ м, $y_s = 0.1$ м.

Число слагаемых в соответствующих двойных рядах Фурье, описывающих разложение решения по собст-

венным формам колебаний, во всех случаях составляло 50×50 ; но, как указывалось выше, после учета трения оно (без снижения точности расчета) могло быть сокращено до 80 ... 100 гармоник.

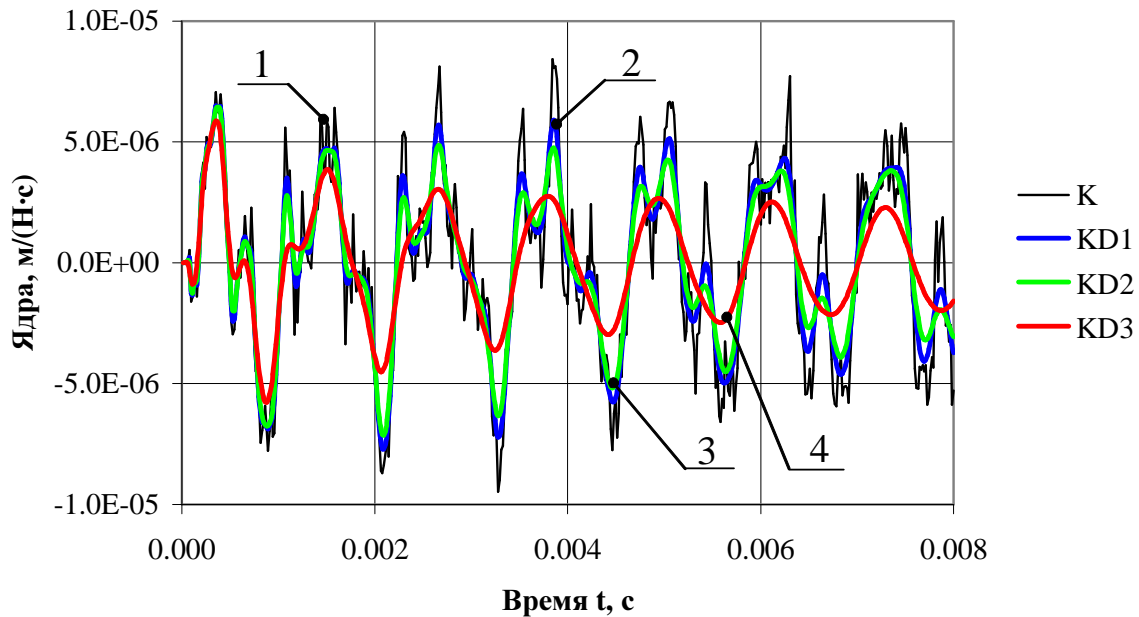


Рис. 12 – Вид исходных и модифицированных ядер Коши:
 $K(t) \equiv K_0(t)$; $KD1(t) \equiv K_{\eta_1}(t)$; $KD2(t) \equiv K_{\eta_2}(t)$; $KD3(t) \equiv K_{\eta_3}(t)$.

Результаты расчетов прогиба без учета трения и при заданных декрементах затухания колебаний приведены на рис. 13. Кривой 1 отвечает упругое изменение прогиба, а кривым 2, 3 и 4 – прогибы с учетом внутреннего вязкого трения при декрементах $d_0 = 0.01$, $d_0 = 0.02$ и $d_0 = 0.1$, соответственно. Возбуждающая сила (рис. 11) представляла собой первую полуволну синусоиды с амплитудой 10 кН и длительностью 1.6 мс; началу импульса на рис. 13 отвечает время 0.8 мс.

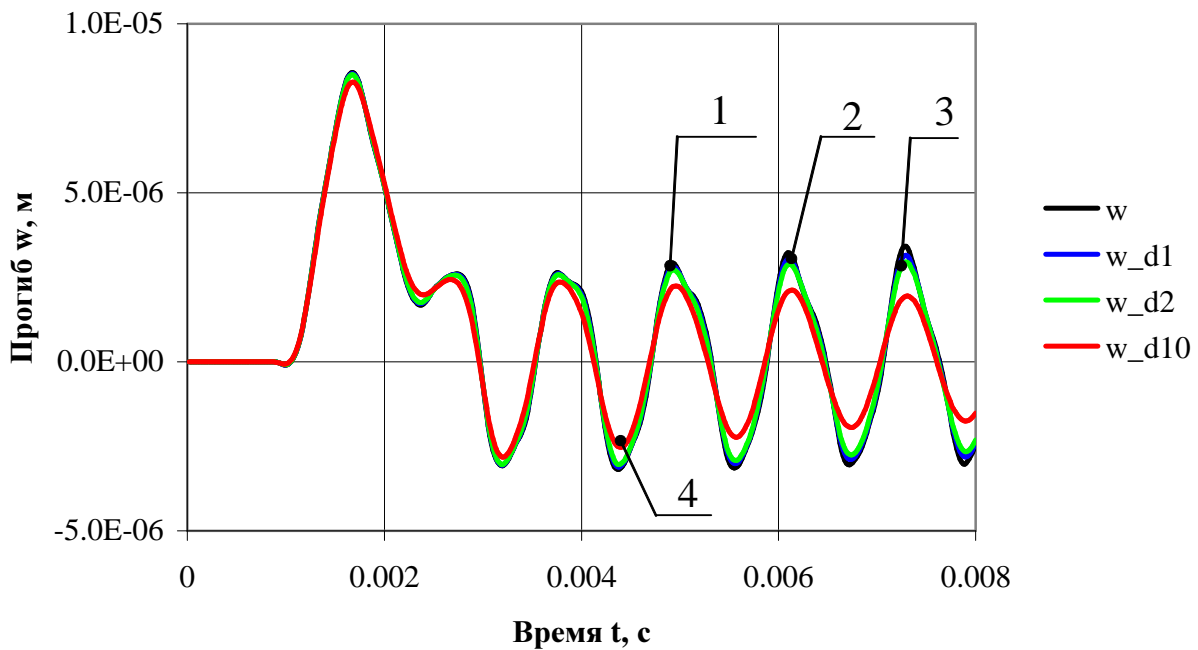


Рис. 13 – Изменения прогиба пластины при колебаниях (расчет с учетом и без учета вязкого трения)

Моделирование упругих и вязкоупругих колебаний балки. Балка, показанная на рис. 14, изготовлена из титаномagneвиевого сплава. Расчеты колебаний балки производились при следующих значениях параметров:

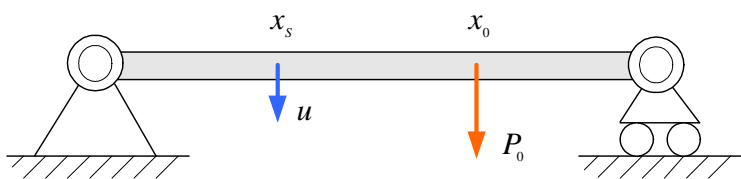


Рис. 14 – Схема нагружения балки.

– координаты точки x_s , в которой исследуются вязкоупругие колебания пластины: $x_s = 0.2$ м.

Ядро для расчета упругих колебаний при использовании интеграла (1) представляется в форме суммы ряда:

$$K_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} [\Omega_{1k} \cdot \sin \omega_{1k}(t) - \Omega_{2k} \cdot \sin \omega_{2k}(t)] \cdot \sin\left(\frac{k\pi x_0}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi x_s}{l}\right),$$

где при практической реализации используются первые 50 гармоник. После учета трения для расчета колебаний достаточно использовать 5 ... 7 гармоник, что на порядок меньше, чем для пластины, но в два раза больше, чем рекомендуется в известных руководствах по практическому гармоническому анализу. В точке x_s исследователей интересуют две характеристики – прогиб w и относительная деформация ε ; каждой характеристике соответствует свое ядро (рис. 15 и рис. 16):

$$w(t) = \int_0^t K_w(t-\tau) P_0(\tau) d\tau; \quad \varepsilon(t) = \int_0^t K_\varepsilon(t-\tau) P_0(\tau) d\tau. \quad (23)$$

Как видим, уже при декременте 0.02 наблюдается существенное сглаживание формы исходного ядра, причем куда более эффективное, чем это было для расчета пластины. Отмеченная разница объясняется различием в распределении частот колебаний: у балки, например, вторая частота превышает первую почти в 4 раза (что обусловлено малой толщиной балки), а у пластины, которая имеет относительно большую толщину, – только лишь в 2 раза (табл. 1).

При исследовании процессов изменения прогиба и деформации балки была использована типовая нагрузка, форма которой показана на рис. 17. Значения силы $P(t)$ подставлялись в интегралы (23). Площадь под графиком – это импульс, передаваемый балке.

Длительность полуволны синусоиды составляла, примерно, половину периода основной формы колебаний, поэтому возбуждение имело резонансный характер и привело к увеличению амплитуды этой формы колебаний балки. К тому же, точка регистрации прогиба и деформации располагалась в точке максимума этих колебаний.

В результате действия трех перечисленных факторов, вынужденные колебания оказались близки к моногармоническим (рис. 18, 19), и увеличение коэффициента трения приводило к повышению затухания.

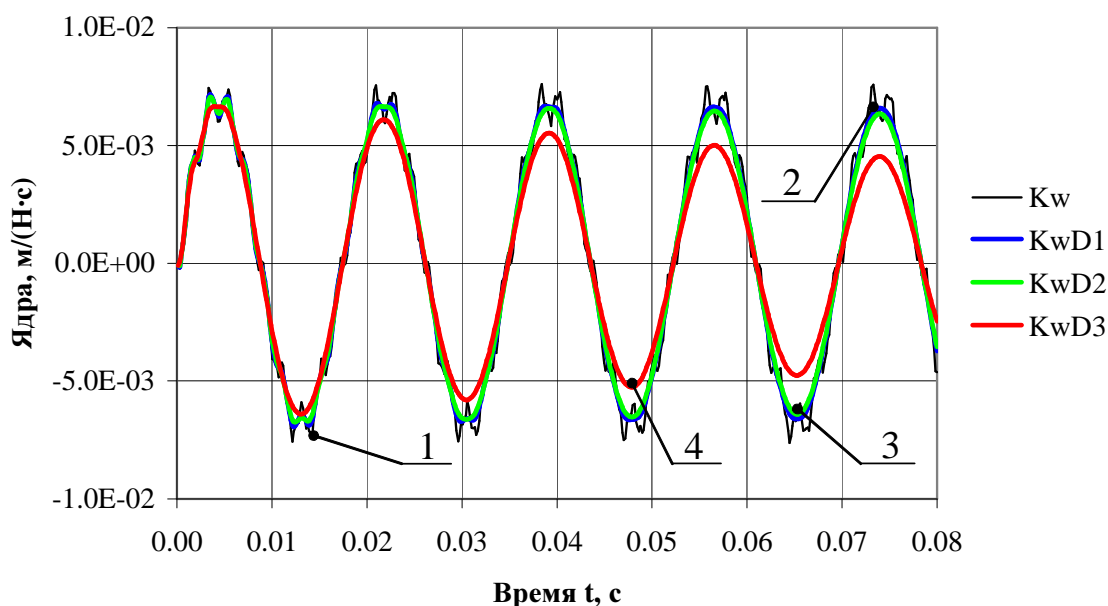


Рис. 15 – Ядра интегралов Дюамеля, используемых при расчете колебаний прогиба балки без учета и с учетом трения. Декременты затухания основной формы колебаний: ядро Kw – 0, ядро KwD1 – 0.01, ядро KwD2 – 0.02, ядро KwD3 – 0.1.

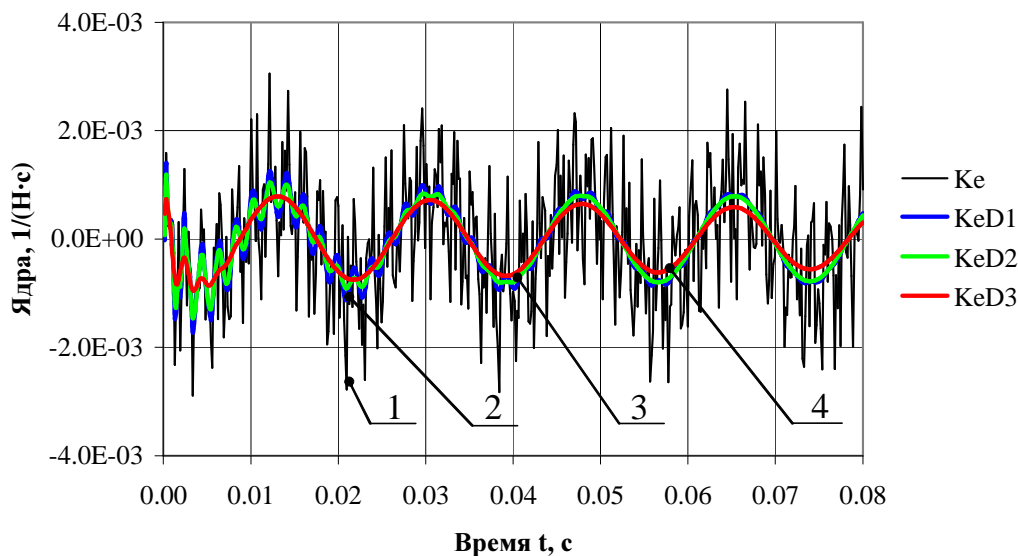


Рис. 16 – Ядра интегралов Дюамеля, используемых при расчете колебаний деформации балки. Декременты: $K_e = 0$, $K_{eD1} = 0.01$, $K_{eD2} = 0.02$, $K_{eD3} = 0.1$.

Таблица 1 – Частоты свободных колебаний, Гц

Гармоника	Пластина	Балка
1	857.5	57.5
2	1613.6	229.9
3	2516.6	516.8
4	2808.3	917.6
5	3209.2	1431.6
6	4311.6	2057.6
7	4365.1	2794.5
8	4997.1	3640.9
9	5610.4	4595.0
10	5761.0	5655.2

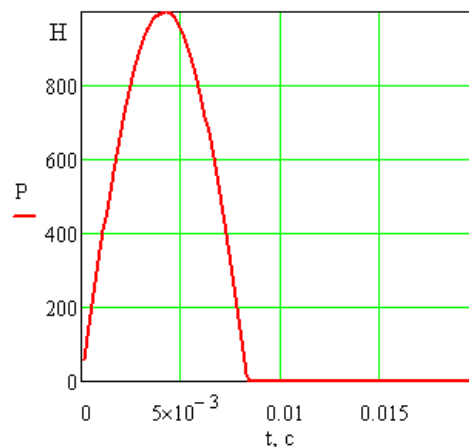


Рис. 17 – Сила, возбуждающая колебания балки.

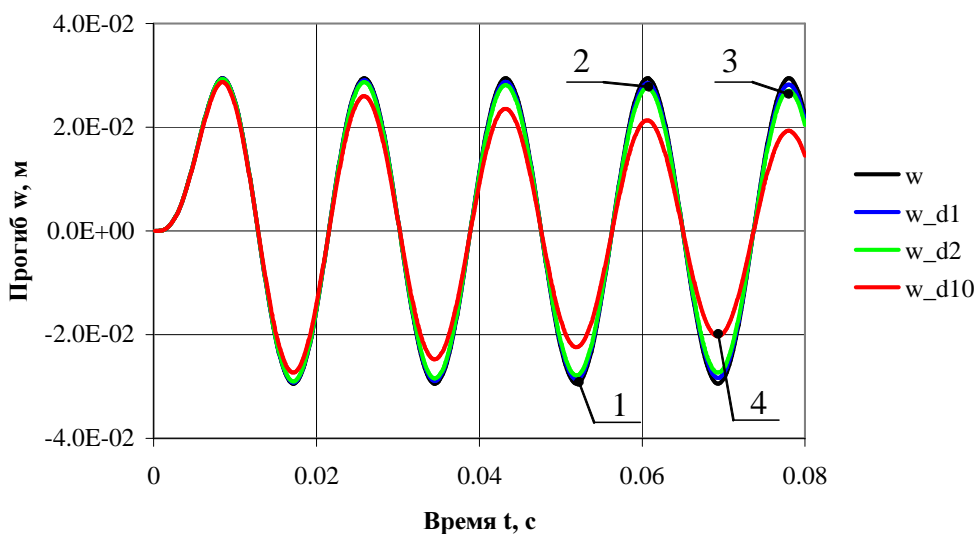


Рис. 18 – Расчетные кривые изменения прогиба балки без учета и с учетом трения.

Декременты затухания основной формы колебаний: ядро $K_w = 0$, ядро $K_{wD1} = 0.01$, ядро $K_{wD2} = 0.02$, ядро $K_{wD3} = 0.1$.

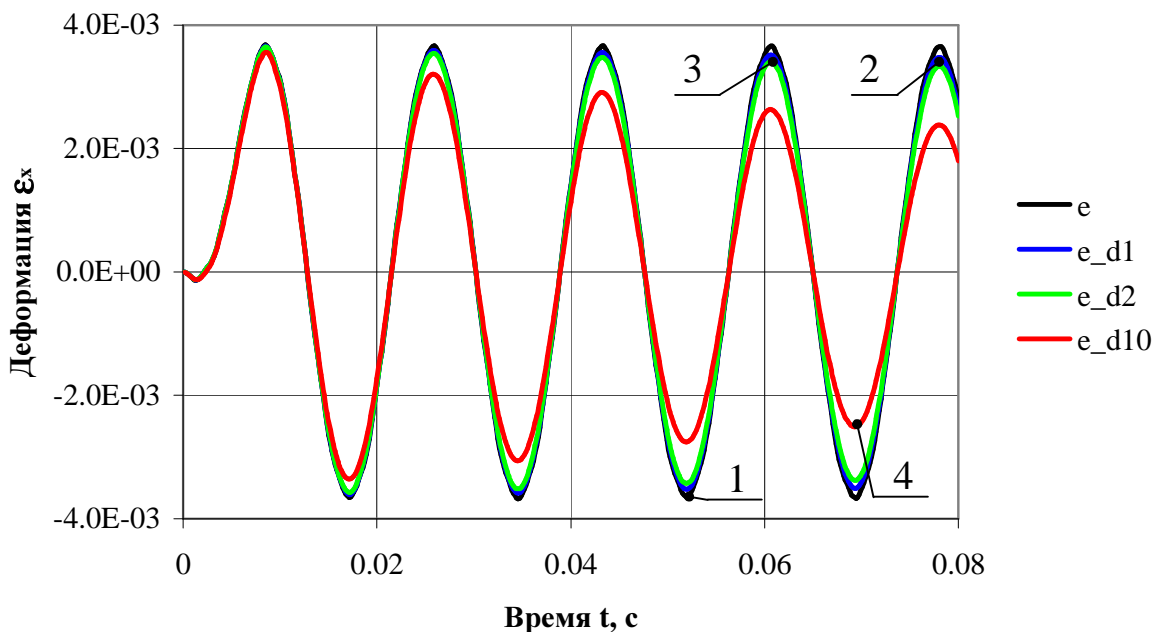


Рис. 19 – Расчетные кривые изменения относительной деформации балки.
Декременты: $\text{Ke} = 0$, $\text{KeD1} = 0.01$, $\text{KeD2} = 0.02$, $\text{KeD3} = 0.1$.

Выводы. Для упругого континуума, моделируемого с учетом внутреннего вязкого трения, которое описывается моделью Кельвина – Фойхта, разработан новый численно-аналитический метод расчета переходных процессов, происходящих под воздействием нестационарного силового нагружения. Метод использует формулу обращения сложного изображения, которая в операционном исчислении носит имя теоремы Эфроса, и сводится к применению нового сглаживающего оператора с гауссовым разностным ядром и переменной дисперсией, растущей пропорционально времени.

Главным достоинством, которое предопределило высокую эффективность нового метода, является то, что он не использует информацию о структуре решения, а именно о частотах и формах свободных колебаний континуума, и, следовательно, он не чувствителен к погрешностям описания граничных условий и несовершенству принятых гипотез деформирования (Кирхгофа, С.П. Тимошенко, и др.). Благодаря чему его удается использовать в режиме обработки осциллограмм, полученных в результате проведения эксперимента.

Метод позволяет выделять из исследуемых колебаний так называемую *упругую составляющую* и наименее трудоемким способом моделировать переходные процессы при различных значениях коэффициента трения, что, например, отвечает изменяющемуся термическому состоянию материала.

Намечены пути развития метода применительно к задачам ползучести, текучести, и колебаний в условиях гистерезисного трения. Возможности разработанного метода проиллюстрированы на примерах вынужденных механических колебаний двумерного и одномерного континуумов: прямоугольной пластины и балки.

Список литературы

1. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. – М. : Машиностроение, 1970. – 734 с.
2. Янютин Е. Г., Янчевский И. В., Воропай А. В., Шараната А. С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций : Монография. – Харьков, ХНАДУ, 2004. – 392 с.
3. Григорьев А. Л., Молдавский Э. А., Тартаковский И. И. Операторный метод расчета вынужденных колебаний вязкоупругой механической системы / Тезисы докладов IV Всесоюзной конференции «Современные проблемы строительной механики и прочности летательных аппаратов». ХАИ им. Н. Е. Жуковского. – Харьков, Типография ХВВКИУРВ, 1991. – 78 с.
4. Грунауэр А. А., Тартаковский И. И., Григорьев А. Л. О связи силы пружины с законом ее деформирования // Теория механизмов и машин : Респ. междувед. науч.-техн. сб. – Х. : Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те. – 1985. – Вып. 39. – С. 7 – 22.
5. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. – К. : Наукова думка, 1971. – 375 с.
6. Василенко Н. В. Теория колебаний. – К. : Вища школа, 1992. – 430 с.
7. Василенко М. В., Алексейчук О. М. Теорія коливань і стійкості руху. – К. : Вища школа, 2004. – 525 с.
8. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Идентификация импульсного нагружения упругой прямоугольной пластины // Прикладная механика. – 2003. – Вып. 39. – № 10. – С. 97 – 102.
9. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. Государственное издательство физико-математической литературы. М. – 1961, 524 с.

10. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: Учебное пособие, 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 305 с.
11. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных сотрудников и инженеров). – М.: Наука, 1977. – 832 с.

References (transliterated)

1. Filippov A. P. *Kolebaniya deformiruyemykh sistem* [Oscillations of deformable systems]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1970. 734 p.
2. Yanyutin Ye. G., Yanchevskiy I. V., Voropay A. V., Sharapata A. S. *Zadachi impul'snogo deformirovaniya elementov konstruktсий*: Monografiya [Problems of pulse deformation of structural elements: Monograph]. Kharkov, KHNADU Publ., 2004. 392 p.
3. Grigor'yev A. L., Moldavskiy E. A., Tartakovskiy I. I. Operatornyy metod rascheta vyzhdenykh kolebaniy vyzkouprugoy mekhanicheskoy sistemy [Operator method for computing induced oscillations of viscoelastic mechanical system]. *Tezisy dokladov IV Vsesoyuznoy konferentsii. "Sovremennyye problemy stroitel'noy mekhaniki i prochnosti letatel'nykh apparatov"*. Khar'kovskiy aviatsonnyy institut im. N. Ye. Zhukovskogo [Theses of the IV All-Union Conference "Contemporary problems of constructional mechanics and aircraft durability" N. E. Zhukovskiy Kharkov Aviation Institute]. Khar'kov, Tipografiya KHVVKIURV Publ., 1991. 78 p.
4. Grunauer A. A., Tartakovskiy I. I., Grigor'yev A. L. O svyazi sily pruzhiny s zakonom yeye deformirovaniya [On the relation between spring strength and its deformation law]. *Teoriya mekhanizmov i mashin: Resp. mezhdved. nauch.-tekhn. sb.* [Theory of mechanisms and machines: Republican Interdepartmental Scientific and Technical Digest]. Kharkiv, Vishcha shkola. Izd-vo pri Khar'k. un-te Publ., 1985, no. 39, pp. 7–22.
5. Pisarenko G. S., Yakovlev A. P., Matveyev V. V. *Vibropogloshchayushchiye svoystva konstruktсионnykh materialov* [Vibro-absorbing properties of structural materials]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1971. 375 p.
6. Vasilenko N. V. *Teoriya kolebaniy* [Oscillation theory]. Kyiv, Vishcha shkola Publ., 1992. 430 p.
7. Vasilenko M. V., Alekseychuk O. M. *Teoriya kolivan' i stiykosti rukhu* [Theory of oscillations and stability of motion]. Kyiv, Vishcha shkola Publ., 2004. 525 p.
8. Yanyutin Ye. G., Voropay A. V. Identifikatsiya impul'snogo nagruzheniya uprugoy pryamougol'noy plastiny [Identification of pulse loading of elastic rectangular plate]. *Prykladna mekhanika* [Applied mechanics]. 2003, vol. 39, no. 10, pp. 97–102.
9. Ditkin A. V., Prudnikov A. P. *Integral'nye preobrazovaniya i operatsionnoe ischislenie* [Integral transforms and operational calculus]. Moscow, Gosudarstvennoye izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury Publ., 1961. 524 p.
10. Krasnov M. L., Kiselev A. I., Makarenko G. I. *Funktsii kompleksnogo peremennogo. Operatsionnoe ischislenie. Teoriya ustoychivosti: Uchebnoye posobie, 2-e izd., pererab. i dop* [Functions of complex variable. Operational calculus. Stability theory: Textbook, 2-nd ed., revised and expanded]. Moscow, Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury Publ., 1981. 305 p.
11. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike (dlya nauchnykh sotrudnikov i inzhenerov)* [Handbook on mathematics (for researches and engineers)]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 832 p.

Поступила (received) 06.05.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Використання теореми Ефроса для врахування дисипативних властивостей деформованих елементів конструкцій / О. В. Воропай, О. Л. Григор'єв // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 29 – 44. Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2222-0631.

Использование теоремы Эфроса для учета диссипативных свойств деформируемых элементов конструкций / А. В. Воропай, А. Л. Григорьев // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 29 – 44. Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2222-0631.

Using Efros theorem for taking into account dissipative properties of deformable structural elements / A. V. Voropay, A. L. Grigoriev // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2017. – № 6 (1228). – pp. 29 – 44. Bibliog.: 11 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Воропай Олексій Валерійович – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

Воропай Алексей Валериевич – кандидат технических наук, доцент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

Voropay Alexey Valerievich – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay.alexey@gmail.com.

Григор'єв Олександр Львович – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.

Григорьев Александр Львович – доктор технических наук, профессор, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.

Grigoriev Alexander L'vovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (057) 707-60-35; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.