

А. П. КОЖУШКО, О. Л. ГРИГОР'ЄВ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НИЗЬКОЧАСТОТНИХ КОЛИВАНЬ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ В ГОРИЗОНТАЛЬНІЙ ЄМНОСТІ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ

Обґрунтовано доцільність розгляду коливань рідини в горизонтальній ємності з вільною поверхнею. Виділено основні коливальні рухи оболонки, які впливають на перерозподіл мас в ємності. На основі рівняння Стокса для ізотермічного руху ньютонівської в'язкої нестисливої рідини, а також формули Лапласа для сили поверхневого натягу, складена математична модель низькочастотних коливань рідини і аналітичні вирази для власних частот. Складено рівняння для опису вимушених коливань рідини під дією заданих кінематичних збурень з боку оболонки. При використанні отриманих рівнянь планується врахувати перерозподілу мас в цистерні при виконанні транспортних і технологічних робіт машинно-тракторного агрегату.

Ключові слова: коливання, ємність, затухаючі частоти, гармоніка, крайові умови.

А. П. КОЖУШКО, А. Л. ГРИГОРЬЕВ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НИЗКОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ЁМКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Обоснована целесообразность рассмотрения колебаний жидкости в горизонтальной ёмкости со свободной поверхностью. Выделены основные колебательные движения оболочки, которые влияют на перераспределение масс в ёмкости. На основе уравнения Стокса для изотермического движения ньютоновской вязкой несжимаемой жидкости, а также формулы Лапласа для силы поверхностного натяжения, составлена математическая модель низкочастотных колебаний жидкости и аналитические выражения для собственных частот. Составлены уравнения для описания вынужденных колебаний жидкости под действием заданных кинематических возмущений со стороны оболочки. При использовании полученных уравнений планируется учитывать перераспределения масс в цистерне при выполнении транспортных и технологических работ машинно-тракторного агрегата.

Ключевые слова: колебания, ёмкость, затухающие частоты, гармоника, граничные условия.

A. P. KOZHUSHKO, A. L. GRIGORIEV

MATHEMATICAL MODELLING OF LOW-FREQUENCY OSCILLATIONS OF VISCOUS FLUID IN HORIZONTAL CONTAINER WITH FREE SURFACE

The expediency of considering oscillations of a liquid in a horizontal container with a free surface is substantiated. The main vibrational motions of the shell influencing the redistribution of masses in the vessel are identified. Based on the Stokes equation for the isothermal motion of a Newtonian viscous incompressible fluid and also the Laplace formula for the surface tension force, a mathematical model of low-frequency fluid oscillations and analytical expressions for natural frequencies are compiled. Equations for describing forced fluid vibrations under the action of given kinematic perturbations on the shell side are compiled. When using the equations obtained, it is planned to take into account the redistribution of masses in the tank of a machine-tractor unit performing transport and technological works.

Key words: oscillations, capacitance, damped frequencies, harmonic, boundary conditions.

Вступ. Широкого загалу набули конструкції різної форми, які заповнені рідиною. Вони використовуються в кораблебудуванні, транспортному машинобудуванні, ракетно-космічній та авіаційній техніці. При дослідженні в даних напрямках перед науковцями постає одна з важливіших науково-прикладних задач по забезпеченню поздовжній та поперечної стійкості ємностей з рідиною. Оскільки дослідження вільних та вимушених коливань, які утворюються при поздовжній та поперечній нестабільності, можуть призвести до збільшення навантаження, аварійній ситуації, тощо, то вирішення цієї задачі є актуальним.

Розглядаючи вільні та вимушені коливання, в задачах транспортного машинобудування слід виділити негативні фактори, які впливають на плавність руху, керованість, стійкість, маневреність, тощо. Не врахування цих факторів призведе до зменшення техніко-економічних та експлуатаційних показників, а також створять негативний вплив на питання надійності машинно-тракторних агрегатів в цілому.

Аналіз останніх досліджень. Дослідженням вільних та вимушених коливань рідини в ємності з вільною поверхнею присвячена низька наукових праць [1 – 6]. Дані праці покликані вирішити таку наукову проблему, як адекватне моделювання процесу перетікання маси в ємності (зокрема, в паливних баках) ракет-носіїв, що більш коректно дозволить описувати та розраховувати показники ракети.

Оскільки матеріал даної статі направлено на вирішення задачі перерозподілу рідини в горизонтальній ємності (цистерні) машинно-тракторного агрегату, то доцільно виконати аналіз робіт в даній галузі. Тут необхідно виділити роботи [7 – 10], які вирішують деякі проблеми вибору раціонального режиму експлуатації машинно-тракторного агрегату, що виникають під час виконання технологічної операції машинами змінної маси. Проте питаннями коливань рідини в горизонтальній ємності машинно-тракторного агрегату при виконанні тягово-транспортних робіт уваги не приділено.

Метою роботи є проведення математичного моделювання повної групи вільних та вимушених низькочастотних поверхневих коливань в'язкої рідини в горизонтальній замкнутій ємності з вільною поверхнею.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити наступні задачі:

- визначити збуджувальні чинники та розкрити механізм виникнення поверхневих хвиль;
- знайти та проаналізувати частоти вільних коливань рідини у цистерні;
- скласти рівняння вимушених коливань рідини під дією збуджувальних чинників.

Фізична модель збудження низькочастотних поверхневих коливань рідини. Перш ніж перейти до дослідження коливань машинно-тракторного агрегату в складі з цистерною (рис. 1), необхідно дослідити вільні та вимушені коливання рідини в горизонтальній ємності з певним процентом її заповнення. Щодо властивостей екіпажної частини цистерни, то на початковій стадії її проектування достатньо знати, що там існує граничне значення частоти (приблизно, 3 ... 5 Гц), при перебільшенні якого амплітуди вимушених коливань в практичному сенсі дорівнюють нулю. В ході подальших досліджень значення цієї частоти буде уточнюватися, проте інтервал пропускання для ресорної системи залишиться на тому рівні, як зазначено вище. Цей рівень і поділяє частоти, які виникають при коливальному русі рідини, на низькі та високі.

Зазначимо, що швидкість звука в рідині, що досліджується, становитиме близько 1000 м/с, а максимальний розмір цистерни (по діагоналі) становить 8 м. Як наслідок, усі хвилі стиснення будуть мати частоти понад 100 Гц, і для процесів, що змінюються з періодом (або з постійною часу) 0.5 ... 5 с, вони якісно знівелюють зміну щільності. Крім того, перепад тиску, спричинений силами гравітації, не перевершує 0.2 МПа, що ушільнить рідину приблизно на 0.02%. Тому статичним і динамічним стисканням рідини в задачі, що розглядається, можна знехтувати.

Цистерна, зображена на рис. 1, перевозить по сільськогосподарським ділянкам та розпилює водні розчини органічних та мінеральних добрив, кінематична в'язкість яких, як правило, лежить в межах $\nu = 1.4 \dots 2 \text{ сСт}$, а коефіцієнт поверхневого натягу становитиме $\sigma = 0.06 \dots 0.08 \text{ Н/м}$. Тобто, за прийнятою класифікацією, ця рідина є мало в'язкою, а її поверхнева плівка має приблизно такі ж якості, як на межі води та повітря.

Джерелами низькочастотних коливань є імпульси сили і моменту сили, які прикладаються до оболонки цистерни з боку її екіпажної частини та насосного навісного обладнання. Відповідні чинники можуть діяти епізодично (при подоланні дорожньої перешкоди) чи утворювати періодичні послідовності (при роботі вакуумного насосу), що породжуватиме затухаючі вільні або незатухаючі вимушені коливання рідини.

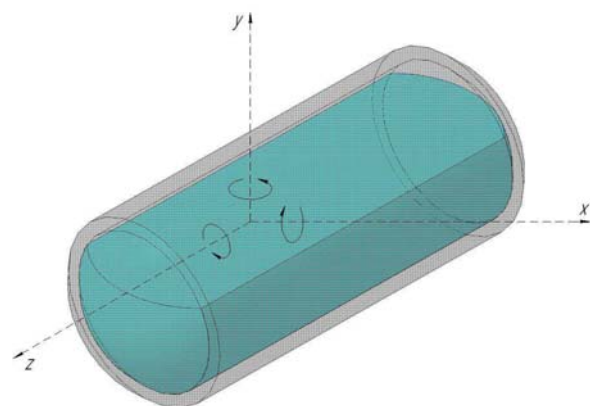
В якості генератора вільних коливань низької частоти (і трансформатора вимушених коливань) виступає вільна поверхня рідини. Фронти і хвилі кінематичного збурення поширюються по рідині від бокових поверхонь цистерни і приводять до підйому (чи опусканню) рівня вільної поверхні. Як наслідок, в протилежній фазі до вертикального зміщення поверхні змінюється величина нормального тиску, спричиненого гравітаційними силами та силами поверхневого натягу, що і приводить до вільних коливань, амплітуда яких зменшується при зростанні глибини по експоненціальному закону. Під дією тертя ці коливання стають затухаючими. Крім того, тертя обмежує амплітуди вимушених коливань при резонансах.

Згідно до *теорії поверхневих хвиль Релея*, при амплітудах, що перевершують 10% від довжини хвилі, ці хвилі втрачають стійкість і руйнуються, що є автоматичним запобіжником значного зростання коливань при резонансах. З іншого боку, в зоні стійкості хвилі амплітуда коливань не є значною, тому їх можливо моделювати при використанні лінійної моделі.

Як і в інших задачах механіки, всі типи лінійних коливань рідини можна проаналізувати в рамках єдиного підходу, що базується на пошуку частот і форм власних (інша назва – *парціальних*) коливань.



а



б

Рис. 1 – Фактична та спрощена форма цистерни:

а – вид з боку; б – розрахункова модель (ось Oz розташовано на початковому рівні вільної поверхні рідини).

Лінеаризована системи диференціальних рівнянь для опису коливань рідини в цистерні. Для формування математичної моделі низькочастотних коливань скористаємося відомою системою рівнянь Стокса для

ізотермічного руху ньютонівської в'язкої нестискуваної рідини [11]:

$$\begin{cases} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 V_x; & \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 V_y; \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 V_z; & \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де $\vec{V} = \{V_x, V_y, V_z\}$, p , ρ – швидкість, тиск та щільність рідини; ν – її кінематична в'язкість; t – час; ∇^2 – диференціальний оператор Лапласа; g – модуль прискорення вільного падіння, яке направлено вздовж осі Oy , що перпендикулярна до начального положення вільної поверхні.

Якщо коливання швидкості є малими, то систему (1) можливо лінеаризувати та спростити, нехтуючи більшою частиною конвективних членів. У векторній формі вона матиме такий вигляд:

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho V_0 \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} = -\text{grad } p - \rho \cdot \nu \cdot \text{rot rot } \vec{V}, \quad (2)$$

де V_0 – швидкість випуску рідини із цистерни.

Зауважимо, що для моделі паливних баків ракетного двигуна [11] швидкість V_0 є значною, і там вона виступає як основний чинник затухання коливань рідини. Але під час транспортування цистерни ця швидкість дорівнює 0, а при операції розпилування рідини – близька до 0, тому в моделі, що розробляється, її можна й не враховувати. До того ж, тут є інші чинники, які приводять до затухання вільних коливань, а саме – сили тертя.

Цистерна має великі розміри, тому рух рідини й при малих коливаннях треба вважати турбулентним. В турбулентному ядрі в'язкість набагато більша, ніж у обмежуючій стінки, тому лінійні або кутові швидкості в ядрі стають суттєво вирівняними, а зміни тангенціальної швидкості потоку відбувається в вузькому слою поблизу стінки. Тому крім внутрішнього тертя, що описується роторами векторного поля, в цій задачі треба враховувати і зовнішнє тертя, яке пропорційне різниці швидкостей між рідиною і поверхнею бокової стінки. Позначимо коефіцієнт зовнішнього тертя літерою f ; тоді для плоского турбулентного ядра потоку рідини замість рівняння (2) треба записати таке:

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\text{grad } p - \rho \cdot \nu \cdot \text{rot rot } \vec{V} - f \cdot (\vec{V} - \vec{V}_{cm}), \quad (3)$$

де \vec{V}_{cm} – позначає тангенціальну швидкість бокової стінки (вона лежить у площині плоского ядра потоку).

Відповідно до теорії турбулентних течій [11], коефіцієнт тертя f залежить від форми і шорсткості поверхні, що обтикається, а також от середнього рівня $V_{сep}$ тангенціальних швидкостей (що робить задачу моделювання вимушених нестационарних коливань рідини нелінійною). У першому наближенні його можна визначати за формулою

$$f = \rho \cdot \zeta \cdot V_{сep},$$

де $\zeta \approx 1/\text{Re}_{кр} \approx 0,000435$; $\text{Re}_{кр} \approx 2300$ – критичне значення числа Рейнольдса, яке визначає ширину ламінарного слою біля стінки.

Надалі значення цього коефіцієнта буде уточнятися за результатами експериментів на фізичних моделях цистерни. Для аналітичного дослідження достатньо знати, що значення цього коефіцієнту мало, і в практичному сенсі воно не впливає на частоти вільних коливань.

Потенціальна та вихрова компонента поля коливань рідини. Згідно із *теоремою Гельмгольца* [13], вектор швидкості рідини представимо як суму потенціального та соленоїдального поля:

$$\vec{V} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \vec{b}, \quad (4)$$

де φ – скалярний потенціал, який, в наслідок нестисливості рідини, є гармонійною функцією, тобто відповідає рівнянню Лапласа

$$\text{div grad } \varphi = 0;$$

\vec{b} – це векторний потенціал, який для плоского поля, перпендикулярного до вектора $\vec{n} \in \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, визначається відповідною скалярною функцією, а саме:

$$\vec{b} = \psi(x, y, t) \cdot \vec{k}, \quad \vec{b} = \psi(x, z, t) \cdot \vec{j}, \quad \vec{b} = \psi(y, z, t) \cdot \vec{i}.$$

Формулу, аналогічну (4), запишемо для швидкостей відносного руху стінки цистерни:

$$\vec{V}_{cm} = \text{grad } \varphi_{cm} + \text{rot } \vec{b}_{cm}, \quad (5)$$

де перший доданок відповідає поступальному руху, а другий – обертовому руху стінки,

$$\vec{b}_{cm} = \psi_{cm}(x, y, t) \cdot \vec{k}, \quad \vec{b}_{cm} = \psi_{cm}(x, z, t) \cdot \vec{j}, \quad \vec{b}_{cm} = \psi_{cm}(y, z, t) \cdot \vec{i},$$

причому для твердого тіла

$$\psi_{cm}(x, y, t) = 0.5 \cdot (x^2 + y^2) \cdot \Omega_{cm,z}; \quad \psi_{cm}(x, z, t) = 0.5 \cdot (x^2 + z^2) \cdot \Omega_{cm,y}; \quad \psi_{cm}(y, z, t) = 0.5 \cdot (y^2 + z^2) \cdot \Omega_{cm,x};$$

$\Omega_{cm,x}, \Omega_{cm,y}, \Omega_{cm,z}$ – кутова швидкість обертання стінки відносно відповідної координатної осі.

Підставимо формули (4), (5) у рівняння (3) та запишемо його у наступному вигляді:

$$\text{grad} \left[\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p + f \cdot (\varphi - \varphi_{cm}) \right] + \text{rot} \left[\rho \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} + \rho \cdot \nu \text{rot rot } \vec{b} + f \cdot (\vec{b} - \vec{b}_{cm}) \right] = 0. \quad (6)$$

Зауважимо, що із рівняння (6) витікають два співвідношення:

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p + f \cdot (\varphi - \varphi_{cm}) = \varphi_{\text{лан}}; \quad \rho \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} + \rho \cdot \nu \text{rot rot } \vec{b} + f \cdot (\vec{b} - \vec{b}_{cm}) = -\vec{b}_{\text{лан}},$$

де $\varphi_{\text{лан}}$ та $\vec{b}_{\text{лан}}$ – це скалярний та векторний потенціали одного й того ж лапласового векторного поля \vec{a} , тобто

$$\text{rot } \vec{b}_{\text{лан}} = \text{grad } \varphi_{\text{лан}}.$$

Ймовірна присутність зазначених потенціалів суттєво ускладнює задачу. Проте, після виконання крайових умов зазначений люфт у визначенні потенціалу φ зникає, і надалі можна вважати, що $\vec{b}_{\text{лан}} = 0$. Це означає, що вихрову компоненту поля можна визначити попередньо, розв'язуючи крайову задачу

$$\rho \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} + \rho \cdot \nu \text{rot rot } \vec{b} + f \cdot \vec{b} = f \cdot \vec{b}_{cm}; \quad \vec{b} - \vec{b}_{cm} \Big|_{\Gamma_0} = 0, \quad (7)$$

де Γ_0 – так звана змочена поверхня цистерни.

Потенціальна постановка задачі. Якщо $\vec{b}_{cm} = 0$, то і $\vec{b} = 0$, тобто вихрова складова поля відсутня. Рівняння

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p + f \cdot (\varphi - \varphi_{cm}) = 0$$

перепишемо як визначення для тиску по відомому скалярному потенціалу швидкостей:

$$p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - f \cdot (\varphi - \varphi_{cm}).$$

На змоченій поверхні Γ тиск може бути довільним (рис. 2, а), а на початковому рівні вільної поверхні Γ_0 його значення розраховується за формулою

$$p = \rho g \cdot \Delta y_n - \sigma \cdot \left[\frac{\partial^2 \Delta y_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta y_n}{\partial z^2} \right], \quad (8)$$

де Δy_n – локальний підйом вільної поверхні від її початкового положення,

$$\Delta y_{nom} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \Phi = \int (\varphi - \varphi_{cm}) dt;$$

σ – коефіцієнт поверхневого натягу (для формули Лапласа); вираз в квадратних дужках обчислює середню кривизну цієї поверхні в точці, де розраховується тиск.

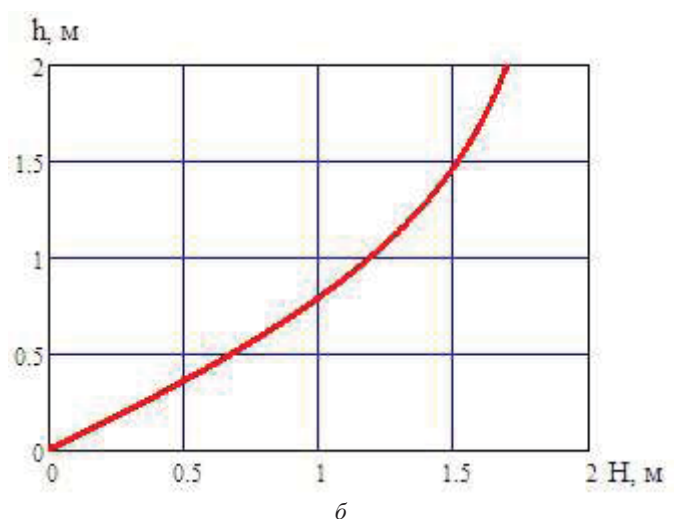
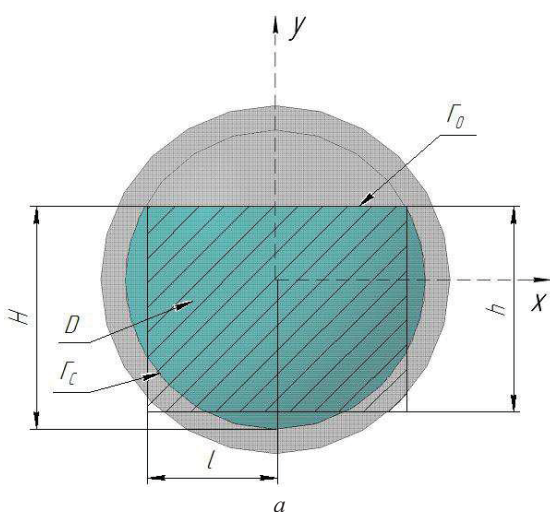


Рис. 2 – Спрощення форми ємності:

а – вид спереду цистерни; б – залежність розрахункового рівня h рідини від фактичного рівня H .

В результаті, для функції Φ , яка є скалярним потенціалом зміщення рідини, отримали наступну крайову задачу:

$$\left\{ \vec{V} = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right\}; \quad \nabla^2 \Phi = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma_0} = 0; \quad \ddot{\Phi} + f \cdot \dot{\Phi} + g \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\sigma}{\rho} \cdot \left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial z^2} \right] \Big|_{\Gamma} = \ddot{\Phi}_{cm}, \quad (9)$$

де $\frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma_0}$ – це похідна за напрямком нормалі до змоченої поверхні, а поле \vec{V} відповідає швидкостям рідини відносно оболонки.

Зауважимо, що при зміщенні в площині xOy потенціал Φ не залежить от координати z , а при зміщенні в площині yOz потенціал Φ не залежить от координати x , тому в системі (9) формула для кривизни матиме лише одну складову, а векторне поле \vec{V} матиме лише дві не нульові компоненти. Причому праві частини останнього рівняння визначаються за формулами

$$\ddot{\Phi}_{cm} = a_{cm,x} \cdot x \quad \text{або} \quad \ddot{\Phi}_{cm} = a_{cm,y} \cdot y,$$

де $a_{cm,x}$, $a_{cm,y}$ – це прискорення стінки по напрямку осі Ox або Oy , відповідно.

Таким чином, у розглянутому випадку джерелом низькочастотних поверхневих коливань є здвигові прискорення поверхні.

Потенціальна форма змішаної (потенціальної та вихрової) задачі. Якщо $\vec{b}_{cm} \neq 0$, то рівняння (7) мають не нульові розв'язки, і на вільній поверхні виникає додатковий (вихровий) підйом $\Delta y_{вих}$, який у системі (9) не врахований. Проте ситуацію можна швидко виправити, якщо, наприклад, для поля $\vec{V}_{вих}$ вихрових швидкостей стінки навколо осі Oz скористатися формулою

$$\vec{V}_{cm,вих} = \{\Omega_{cm,z} \cdot y; -\Omega_{cm,z} \cdot x\} = \Omega_{cm,z} \cdot \{y; x\} + \Omega_{cm,z} \cdot \{0; -2x\}. \quad (10)$$

У правій частині (10) перша складова має скалярний гармонійний потенціал

$$\Omega_{cm,z} \cdot \{y; x\} = \text{grad}(\Omega_{cm,z} \cdot x \cdot y),$$

а друга складова активізує нерівномірний коливальний зсув рідини вздовж осі Ox ; до вихрового підйому вільної поверхні цей зсув не приводить.

Таким чином, якщо оболонка цистерни обертається навколо осі Oz з кутовою швидкістю $\Omega_{cm,z}(t)$ і зсувається вздовж осі Ox з лінійною швидкістю $Vx_{cm}(t)$, то для задачі щодо низькочастотних коливань цей складний рух оболонки описує ефективний потенціал

$$\varphi_{cm}(t) = Vx_{cm}(t) \cdot x + \Omega_{cm,z}(t) \cdot x \cdot y.$$

Далі можна повторити виклад, що привів до рівнянь (9); при цьому треба врахувати, що додатковий потенціал на вільній поверхні дорівнює 0 та не змінює її кривизну. В результаті ми прийшли до системи типу (9) зі зміненою правою частиною:

$$\left\{ \vec{V} = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\}; \quad \nabla^2 \Phi = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma_0} = 0; \quad \ddot{\Phi} + f \cdot \dot{\Phi} + g \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\sigma}{\rho} \cdot \left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial x^2} \right] \Big|_{\Gamma} = -[a_{cm,x}(t) + g \cdot \theta_{cm,z}(t)] \cdot x, \quad (11)$$

де $\theta_{cm,z}(t) = \int \Omega_{cm,z} dt$ – це кут закручення оболонки.

Аналогічний результат отриманий для коливань у площині zOy :

$$\left\{ \vec{V} = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\}; \quad \nabla^2 \Phi = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma_0} = 0; \quad \ddot{\Phi} + f \cdot \dot{\Phi} + g \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\sigma}{\rho} \cdot \left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial z^2} \right] \Big|_{\Gamma} = -[a_{cm,z}(t) + g \cdot \theta_{cm,x}(t)] \cdot z. \quad (12)$$

Для обертових коливань в площині xOz ефективний потенціал має лише один доданок,

$$\varphi_{cm}(t) = \Omega_{cm,y}(t) \cdot x \cdot z,$$

причому, у протилежність до двох попередніх випадків, на вільній поверхні він приймає саме такі (не нульові) значення, але похідна $\partial \varphi_{cm}(t) / \partial y = 0$. Тому рівняння для цих коливань має інший вигляд:

$$\left\{ \vec{V} = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right\}; \quad \nabla^2 \Phi = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma_0} = 0; \quad \ddot{\Phi} + f \cdot \dot{\Phi} + g \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\sigma}{\rho} \cdot \left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial z^2} \right] \Big|_{\Gamma} = \dot{\Omega}_{cm,y} \cdot x \cdot y, \quad (13)$$

тобто у якості чинника, що збуджує коливання, тут виступає кутове прискорення.

Задача для вертикальних коливань зсуву. Відповідна задача розглядається в потенційній постановці, що приводить до системи рівнянь вигляду (9). Проте, оскільки тепер вібрація оболонки є вертикальною, на вільній поверхні похідна $\ddot{\Phi}_{cm}$ приймає одне й теж значення,

$$\ddot{\Phi}_{cm} \Big|_{\Gamma} = \text{const}.$$

При такому характері збудження перетікання рідини вздовж вільної поверхні не відбувається, і низькочастотні коливання (якщо не враховувати можливість відриву рідини від дна цистерни з утворенням каверни або парової подушки) стають неможливими.

До того ж, тут варто було б врахувати й іншу можливість – нерівномірне коливання оболонки, при якому масивні бокові кришки цистерни рухаються з дещо іншими швидкостями, ніж її центральна частина. Проте, якщо звернути увагу на масивну опорну балку, що простягнулася на усю довжину цистерни (рис. 1), то можливість таких коливань стає ілюзорною.

Групи низькочастотних коливань рідини у цистерні. Повна група рухів жорсткої оболонки включає 3 переміщення та 3 обертання. Деформація та пружні зв'язки коливань оболонки не враховуються, тому що їх частота значно більше 100 Гц.

При вертикальних коливаннях, як зазначено вище, переливання рідини не відбувається, а частота коливань визначається стисненням рідини. Власна частота при цьому дорівнює приблизно 500 Гц, тому їх не враховуємо (адже необхідно враховувати разом з деформацією оболонки [12]). Інші 5-ть коливань розбиваємо на групи, які пов'язані з переливанням рідини та мають низькі власні частоти коливання:

- Група №1. Коливання в площині xOy (переміщення та оберт).
- Група №2. Коливання в площині zOy (переміщення та оберт).
- Група №3. Обертання навколо вісі Oy .

Для перших двох груп векторне поле швидкостей є плоским, а для третьої групи – просторовим.

Оскільки форма цистерни для застосування відомих методів математичного аналізу, зокрема метода Фур'є розподілу змінних, є складною, то для подальшого дослідження приймемо спрощену форму прямокутного паралелепіпеда (рис. 2), який має аналогічні розміри вільної поверхні та містить той же самий об'єм рідини.

Будемо позначати діаметр цистерни як $2R$, а її довжину – як $2L$; для цистерни ВНЦ-20 (виробництва ТОВ «Завод Кобзаренка»), яка досліджується в якості зразка – аналога,

$$2R = 2\text{ м}, \text{ а } 2L = 7\text{ м}.$$

Тоді, в залежності від реального рівня H рідини в цистерні, за формулами

$$l = \sqrt{H \cdot (2R - H)}, \quad S = \begin{cases} R^2 \arcsin(l/R) - l \cdot (R - H), & H \leq R \\ R^2 (\pi - \arcsin(l/R)) - l \cdot (R - H), & H > R \end{cases}, \quad h = \frac{S}{2l},$$

можна знайти площу S перерізу та розміри $2l$ і h умовного прямокутного паралелепіпеда (рис. 2, б).

Парціальні частоти. Знайдемо розв'язок системи (11), що відповідає коливанням групи №1. У поверхневої хвилі Релея амплітуда при заглибленні зменшується за експоненціальним законом, причому якщо глибина перевищує довжину хвилі, то амплітуда коливань близька нулю. Таку ж саме поведінку матиме векторне поле, яке породжує гармонійний потенціал

$$\Phi = T(t) \cdot \sin(\lambda \cdot x) \cdot \text{ch}(\lambda \cdot y). \quad (14)$$

Причому при $y = -h$ і будь-якому значенню λ він буде задовольняти крайовій умові $V_y = \partial\Phi/\partial y = 0$, а якщо

$$\lambda = \lambda_k^I = \pi \cdot (0.5 + k)/l, \quad k = 0, 1, 2, \dots \text{ або } \lambda = \lambda_k^{II} = \pi \cdot k/l, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

то при $x = \pm l$ він буде задовольняти крайовій умові $V_x = \partial\Phi/\partial x = 0$.

Тобто похідна цього поля по напрямку нормалі до змоченої поверхні тотожно дорівнює нулю.

Права частина (11) є непарною за змінною x і її можна розкласти в тригонометричний ряд Фур'є по синусах:

$$(-a_{cm} - g \cdot \theta_{cm}) \cdot x = (-a_{cm} - g \cdot \theta_{cm}) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot (-1)^k \cdot \sin(\lambda_k^I x), \quad b_k = \frac{2/l}{(\lambda_k^I)^2}.$$

Це означає, що для рішення використовуватимемо лише перші хвилеві числа із (15), а саме

$$\lambda_k = \pi \cdot (0.5 + k)/l, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

і позначати ці числа додатковим верхнім номером більше не треба.

Щоб задовольнити рівняння (11), представимо шуканий потенціал у вигляді аналогічного ряду Фур'є:

$$\Phi(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) \cdot (-1)^k \sin(\lambda_k \cdot x) \cdot \text{ch}(\lambda_k \cdot y), \quad (16)$$

і підставимо його в (11). В результаті отримаємо нескінчену систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку із сталими коефіцієнтами

$$\ddot{T}_k + f \cdot \dot{T}_k + \lambda_k \cdot (g + (\sigma/\rho) \cdot \lambda_k^2) \cdot \text{th}(\lambda_k h) \cdot T_k = \frac{2}{l} \cdot \frac{(-a_{cm,x}(t) - g \cdot \theta_{cm,z}(t))}{\lambda_k^2 \cdot \text{ch}(\lambda_k h)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (17)$$

де кожне окреме рівняння описує парціальне (вільне або вимушене) коливання рідини.

Якщо в (17) відкинути праву частину, то ми отримуємо рівняння вільних затухаючих коливань,

$$\ddot{T}_k + f \cdot \dot{T}_k + \lambda_k \cdot (g + (\sigma / \rho) \cdot \lambda_k^2) \cdot \text{th}(\lambda_k h) \cdot T_k = 0,$$

звідки маємо аналітичні рівняння для комплексних кругових частот,

$$\omega_k^2 + f \cdot \omega_k + \lambda_k \cdot (g + (\sigma / \rho) \cdot \lambda_k^2) \cdot \text{th}(\lambda_k h) \cdot \omega_k = 0,$$

яке має розв'язки

$$\omega_k = -0.5f \pm i \sqrt{\lambda_k \cdot (g + (\sigma / \rho) \cdot \lambda_k^2) \cdot \text{th}(\lambda_k h) - 0.25f^2}.$$

Такі рішення відповідають затухаючим коливанням, частота яких розраховується за формулою

$$\nu_k = \sqrt{\lambda_k \cdot (g + (\sigma / \rho) \cdot \lambda_k^2) \cdot \text{th}(\lambda_k h)}, \quad (18)$$

або

$$\nu_k = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{g \cdot \frac{0.5+k}{\pi l} \cdot \text{th} \left[\pi \cdot (0.5+k) \cdot \frac{h}{l} \right] \cdot \left(1 + \frac{\sigma}{\rho g} \cdot \left[\frac{\pi \cdot (0.5+k)}{l} \right]^2 \right)}. \quad (19)$$

Результат застосування формули (19) для перших 4-ох гармонік із номерами $k = 0, 1, 2, 3$ показано на рис. 3.

Для коливань групи № 2 розв'язок системи (12) знаходимо у вигляді суми ряду Фур'є

$$\Phi(t, z, y) = \sum_{m=0}^{\infty} T_m(t) \cdot (-1)^m \sin(\beta_m \cdot z) \cdot \text{ch}(\beta_m \cdot y), \quad (20)$$

де $\beta_m = \pi \cdot (0.5 + m) / L$, а функції $T_m(t)$ відповідають диференціальним рівнянням

$$\ddot{T}_m + f \cdot \dot{T}_m + \beta_m \cdot (g + (\sigma / \rho) \cdot \beta_m^2) \cdot \text{th}(\beta_m h) \cdot T_m = \frac{2}{L} \cdot \frac{(-a_{cm,z}(t) - g \cdot \theta_{cm,x}(t))}{\beta_m^2 \cdot \text{ch}(\beta_m h)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

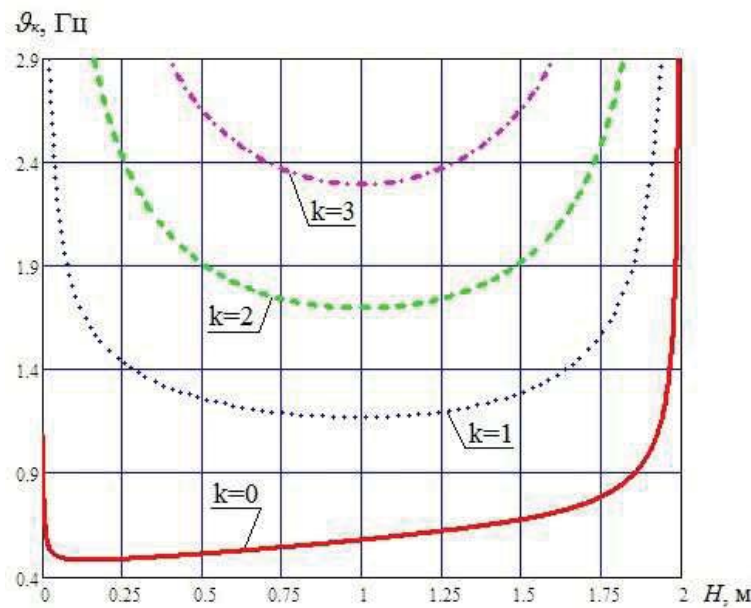


Рис. 3 – Графік залежності власних частот поперечних коливань в площині xOy від рівня рідини.

Формула для власних частот має вигляд, аналогічний (17),

$$\nu_m = \sqrt{\beta_m \cdot (g + (\sigma / \rho) \cdot \beta_m^2) \cdot \text{th}(\beta_m h)};$$

залежність перших 4-ох частот від рівня рідини у цистерні показана на рис. 4.

Для моделювання коливань групи №3 використовуємо подвійні ряди Фур'є:

$$\Phi(t, x, z, y) = \sum_{k,m=0}^{\infty} T_{k,m}(t) \cdot (-1)^k \sin(\lambda_k \cdot x) \cdot (-1)^m \sin(\beta_m \cdot z) \cdot \text{ch}(\gamma_{k,m} \cdot y), \quad (21)$$

де

$$\gamma_{k,m} = \sqrt{\lambda_k^2 + \beta_m^2} = \pi \cdot \sqrt{\frac{(k+0.5)^2}{l^2} + \frac{(m+0.5)^2}{L^2}},$$

а амплітудні коефіцієнти є розв'язками диференціальних рівнянь

$$\ddot{T}_{k,m} + f \cdot \dot{T}_{k,m} + \gamma_{k,m} \cdot (g + (\sigma / \rho) \cdot \gamma_{k,m}^2) \cdot \text{th}(\gamma_{k,m} h) \cdot T_{k,m} = \frac{4}{l \cdot L} \cdot \frac{(-g \cdot \theta_{cm,y}(t))}{\lambda_k^2 \beta_m^2 \cdot \text{ch}(\gamma_{k,m} h)}, \quad k, m = 0, 1, 2, \dots$$

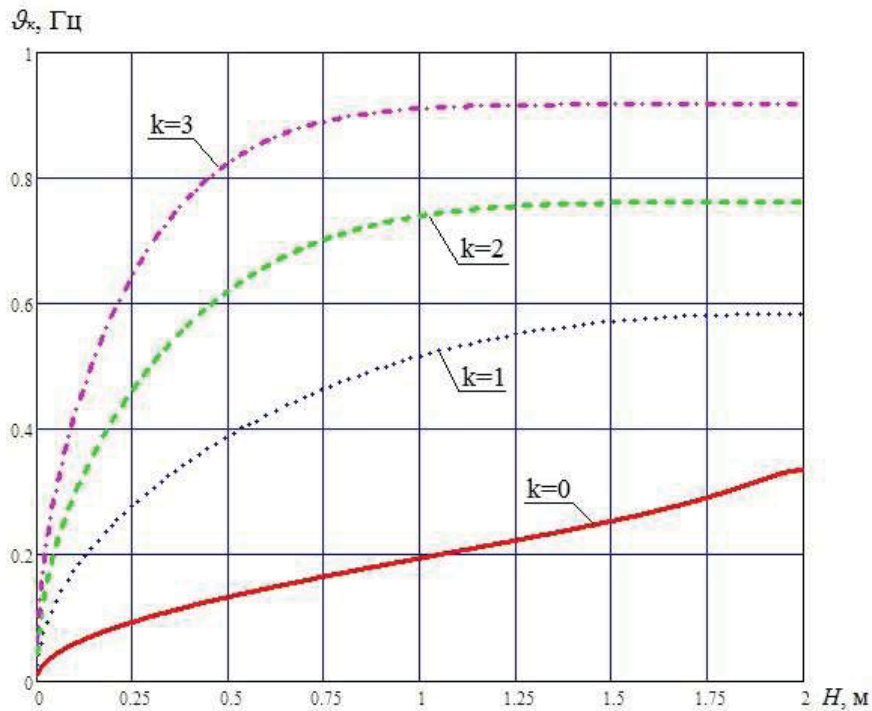


Рис. 4 – Графік залежності власних частот повздовжніх коливань в площині zOy від рівня рідини.

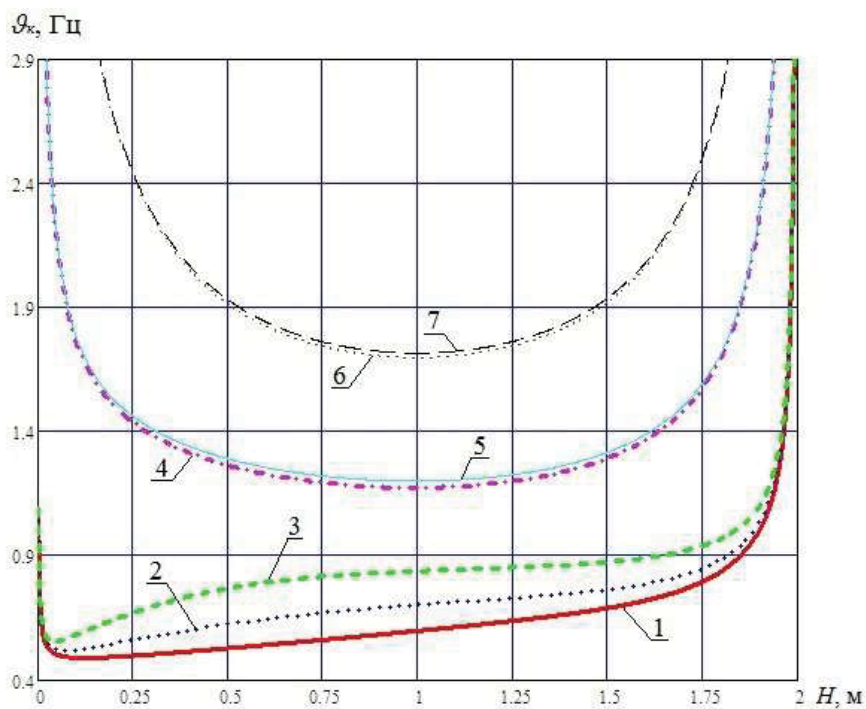


Рис. 5 – Графік залежності власних частот обертових коливань в площині xOz від рівня рідини:

- 1 – $k=0$; $m=0$; 2 – $k=0$; $m=1$; 3 – $k=0$; $m=2$; 4 – $k=1$; $m=0$;
5 – $k=1$; $m=1$; 6 – $k=2$; $m=0$; 7 – $k=2$; $m=1$.

Власні частоти коливань знаходяться за формулою

$$\nu_{k,m} = \sqrt{\gamma_{k,m} \cdot (g + (\sigma / \rho) \cdot \gamma_{k,m}^2) \cdot \text{th}(\gamma_{k,m} h)},$$

Як бачимо, вони утворюють подвійну нескінченність. Декілька перших частот зображено на рис. 5.

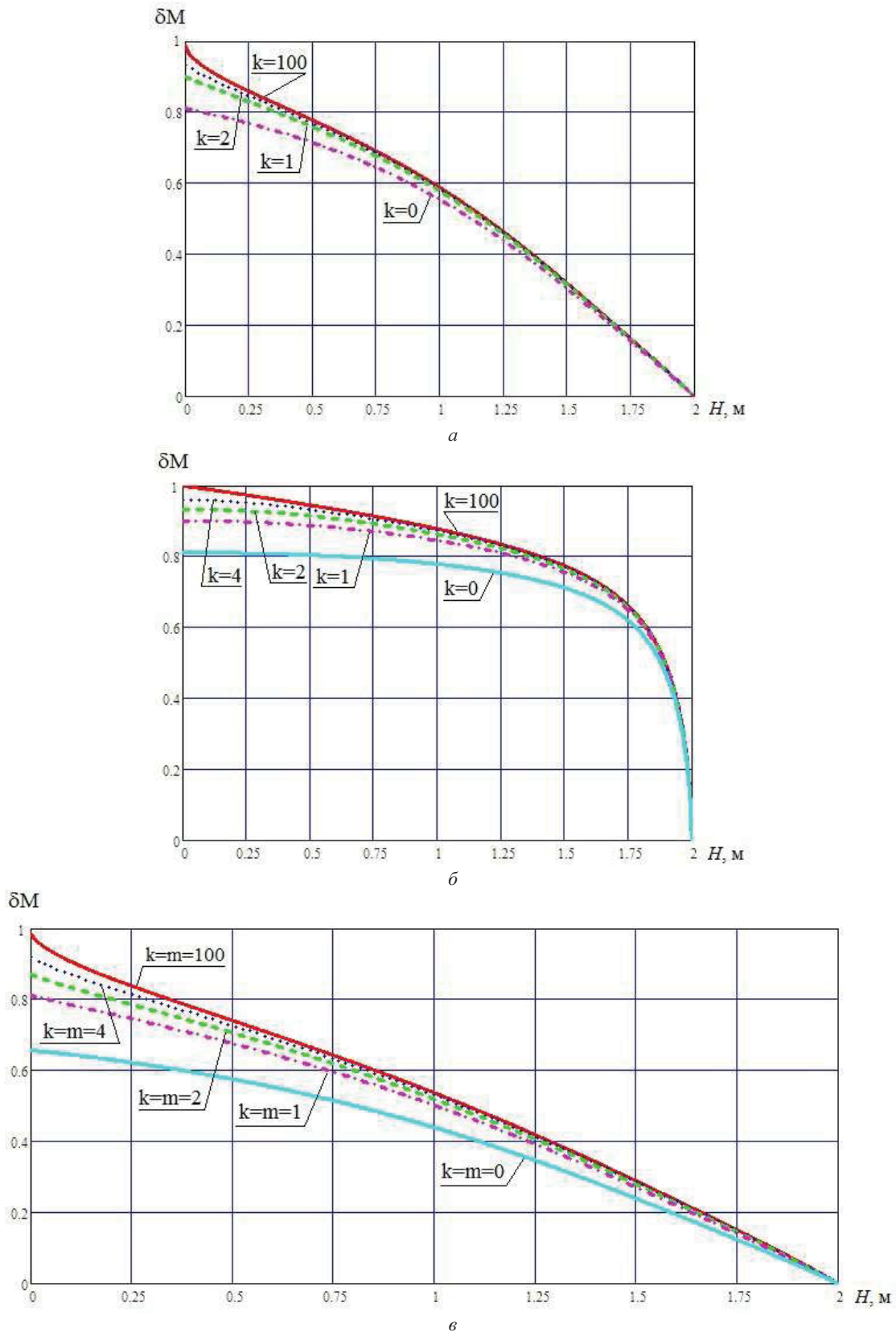


Рис.6 – Сумарна відносна маса вказаної кількості осциляторів в залежності від рівня рідини:
 a – для коливань у площині xOy , $б$ – у площині zOy , $в$ – у площині xOz .

Числа k, m визначають верхню границю для індексів доданків часткової суми рядів Фур'є (16), (20) або (21).

Інерційні та пружні коефіцієнти парціальних осциляторів. Кожний доданок із суми (16), (20) або (21) відповідає окремій базисній формі низькочастотних коливань рідини відносно оболонки цистерни, тобто деяко-

му парціальному осцилятору. Кожному осцилятору можна приписати масу, яка буде частиною загальної маси рідини.

Щоб знайти відносну частину δM_k маси, пов'язаної з k -тим осцилятором із суми (16), можна використати власну форму цього осцилятора

$$\Phi_k^*(x) = (-1)^k \sin(\lambda_k \cdot x) \cdot \text{ch}(\lambda_k \cdot y),$$

і знайти середнє значення похідної $\partial \Phi_k^* / \partial x$ по площі поперечного перерізу D , заштрихованого на рис. 2, а, тобто

$$\frac{1}{S} \iint_D \frac{\partial \Phi_k^*}{\partial x} dS = \frac{1}{l \cdot h} \cdot \frac{\text{sh}(\lambda_k \cdot h)}{\lambda_k},$$

Далі цей результат множиться на коефіцієнт $2/(l \cdot \lambda_k^2 \text{ch}(\lambda_k h))$, що використовується в правій частині (17) разом із значенням збуджувального чинника, і ми отримуємо шукану формулу

$$\delta M_k = \frac{2 \text{th}(\lambda_k h)}{l^2 \lambda_k^3 h}.$$

Формула для осциляторів, що коливаються у площини zOy , має аналогічний вигляд:

$$\delta M_m = \frac{2 \text{th}(\beta_m h)}{L^2 \beta_m^3 h},$$

а для випадку обертових коливань у площині xOz – подібний, проте більш складний;

$$\delta M_{k,m} = \frac{4 \text{th}(\gamma_{k,m} h)}{l^2 L^2 \lambda_k^2 \beta_m^2 (\gamma_{k,m} h)}.$$

Після знаходження δM_k співвідношення (17) та аналогічні для інших груп коливань отримують вигляд звичайного рівняння для коливання одно масової системи, а саме

$$M_k \ddot{x}_k + f \cdot M_k \cdot \dot{x}_k + Z_k \cdot x_k = M_k \cdot (-a_{cm,x}(t) - g \cdot \theta_{cm,z}(t)), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

де $M_k = \delta M_k \cdot M$ – це парціальна маса; M – загальна маса рідини; $Z_k = M_k \cdot \omega_k^2$ – коефіцієнт жорсткості (або пружності), який тут має гравітаційну природу; $\omega_k = 2\pi \cdot \nu_k$ – власна кругова частота коливань.

На рис. 6, а – в надані дані по розподілу парціальних мас; як і слід було цього чекати, по мірі зростання глибини сумарна частина рідини δM , що приймає участь у низькочастотних коливаннях вільної поверхні, зменшується. З'ясовано, що цю величину можна апроксимувати аналітичними залежностями наступного вигляду:

$$\delta M = \frac{1}{(h/l)^{4/3} + 1}, \quad \delta M = \frac{1}{(h/L)^{4/3} + 1}, \quad \delta M = \frac{1}{(h/l)^{4/3} + (h/L)^{4/3} + 1},$$

для коливань групи № 1, групи № 2 та групи № 3, відповідно.

Перспективи подальших досліджень. Матеріал, наведений у статті, є достатнім для того, щоб описати коливання рідини, корпусу та інших елементів цистерни єдиною системою звичайних диференціальних рівнянь, яка буде моделювати динаміку цього агрегату в цілому. Проте, у близькій перспективі, на погляд авторів, є дослідження тієї ж ємкості, але зі зливом рідини, а також на похилих ділянках шляху. Крім того, як сказано вище, передбачене проведення експериментів по вивченню сили тертя, після чого будуть моделюватися типові перехідні та періодичні процеси, які проходять у рідині під впливом кінематичних збурень.

Висновки. Показано, що кінематичними збудниками низькочастотних коливань рідини у цистерні є лінійні прискорення та кутові закручення її корпусу.

Отримані уточнені рівняння поверхневих коливань рідини, де додатково враховані сили поверхневого натягу, а також зовнішнього тертя рідини о бічну поверхню ємності.

Показано, яким чином можна врахувати обертові коливання оболонки, залишаючись у межах потенціальних рухів та течій.

Наведено розв'язки задачі о вільних та вимушених коливаннях рідини в вигляді суми Фур'є для парціальних осциляторів; виведено рівняння для динамічного розрахунку парціальних амплітуд та отримано формули для коефіцієнтів інерції і жорсткості осциляторів.

Список літератури

1. Колесников К. С. Динамика ракет. – М. : Машиностроение, 2003. – 500 с.

2. Рабинович Б. И. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. – М. : Машиностроение, 1975. – 416 с.
3. Колесников К. С., Шкапов П. М., Пожалоостин А. А. Задачи динамики гидромеханических систем в трудах кафедры теоретической механики имени профессора Н.Е. Жуковского // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2012. – № 8. – С. 15 – 30.
4. Дьяченко М. И., Орлов В. В., Темнов А. Н. Колебания жидкого топлива в цилиндрических и конических емкостях // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2013. – № 11. – С. 175 – 192.
5. Дьяченко М. И., Темнов А. Н. Проблемы динамики перераспределения топлива в крупногабаритных ракетно-космических объектах // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: "Машиностроение". Спец.выпуск "Крупногабаритные трансформируемые космические конструкции и материалы для перспективных ракетно-космических систем". – 2012. – С. 164 – 174.
6. Мещерский И. В. Работы по механике тел переменной массы. – М. Л. : Изд. Техничко-теоретической литературы, 1949. – 275 с.
7. Леженкин А. Н., Григоренко С. М. Моделирование процесса движения агрегата с переменной массой // Науковий вісник ТДАТУ. – Мелітополь, 2012. – Вип. 2. – Т. 2. – С. 80 – 86.
8. Леженкин А. Н., Рубцов Н. А., Григоренко С. М. Определение скорости движения уборочного агрегата с переменной массой // Праці ТДАТУ. – 2013. – Вип. 13. – Т. 3. – С. 79 – 85.
9. Третьяк В. М. Влияние изменения массы модулей тягово-транспортных средств на показатели их движения // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. – 2005. – № 29. – С. 202 – 204.
10. Шуляк М. Л. Колебание скорости МТА переменной массы при установившемся режиме движения // MOTROL. Commission of Motorization and Energetics in Agriculture – 2015 – Vol. 17. – No.7. – P. 23 – 27.
11. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Изд. 5-е, переработанное. – М. : Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1978. – 736 с.
12. Башлій І. Д. Коливання складних оболонкових конструкцій з рідиною в задачі про позовдгню стійкість ракети-носія: дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук : 01.02.04 / І. Д. Башлій. – Дніпропетровськ, 2015. – 197 с.
13. Ванін В. А., Геворкян Ю. Л., Григор'єв О. Л. Елементи векторного аналізу : навч. посіб.. – Х. : Вид-во «Підручник НТУ «ХПІ»», 2016. – 460 с.

References (transliterated)

1. Kolesnikov K. S. *Dinamika raket* [The dynamics of missiles], Moscow, Mashinostroenie Publ., 2003. 500 p.
2. Rabinovich B. I. *Vvedenie v dinamiku raket-nositeley kosmicheskikh apparatov* [Introduction to the dynamics of rocket carriers of space vehicles], Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975. 416 p.
3. Kolesnikov K. S., Shkapov P. M., Pozhalostin A. A. Zadachi dinamiki gidromekhanicheskikh sistem v trudakh kafedry teoreticheskoy mekhaniki imeni professora N. E. Zhukovskogo [Problems of the dynamics of hydromechanical systems in the works of the Professor N. Ye. Zhukovsky Department of Theoretical Mechanics]. *Vestnik MGTU im. N. E. Bauman* [Bulletin of N.E. Bauman MSTU]. 2002, vol. 8, pp. 15–30.
4. Dyachenko M. I., Orlov V. V., Temnov A. N. Kolebaniya zhidkogo topliva v tsilindricheskikh i konicheskikh emkostyakh [Oscillations of liquid fuel in cylindrical and conical tanks]. *Vestnik MGTU im. N.E. Bauman* [Bulletin of N.E. Bauman MSTU]. 2013, vol. 11, pp. 175–192.
5. Dyachenko M. I., Temnov A. N. Problemy dinamiki pereraspredeleniya topliva v krupnogabaritnykh raketo-kosmicheskikh ob'ektakh [Problems of the dynamics of fuel redistribution in large rocket-space objects]. *Vestnik MGTU im. N. E. Bauman. Seriya: "Mashinostroyeniye". Spets.vypusk "Krupnogabaritnyye transformiruyemye kosmicheskiye konstruksii i materialy dlya perspektivnykh raketo-kosmicheskikh sistem"*. [Bulletin of N.E. Bauman MSTU. Series: Mechanical Engineering. Special Issue "Large-size transformable space structures and materials for advanced rocket and space systems"], 2012, pp. 164–174.
6. Mescherskiy I. V. *Raboty po mekhanike tel peremennoy massy* [Works on the mechanics of bodies of variable mass]. Moscow – Leningrad, Tekhniko-teoreticheskoy literatury Publ., 1949. 275 p.
7. Lezhenkin A. N., Grigorenko S. M. Modelirovanie protsessa dvizheniya agregata s peremennoy massoy [Modeling the process of movement of an aggregate of variable mass]. *Naukovyy visnyk TDAU* [Scientific herald TDAU]. Melitopol, 2012, vol. 2, no. 2, pp. 80–86.
8. Lezhenkin A. N., Rubtsov N. A., Grigorenko S. M. Opredelenie skorosti dvizheniya uborochnogo agregata s peremennoy massoy [Determination of the speed of the harvesting unit of variable mass]. *Pratsi TDAU* [The works of TDAU]. 2013, vol. 13, no. 3, pp. 79–85.
9. Tretyak V. M. Vliyaniye izmeneniya massy moduley tyagovo-transportnykh sredstv na pokazateli ikh dvizheniya [Influence of the change in the mass of the modules of traction-transport vehicles on the indicators of their movement]. *Vestnik Kharkovskogo natsional'nogo avtomobil'no-dorozhnogo universiteta* [Bulletin of the Kharkiv National Automobile and Highway University]. 2005, vol. 29, pp. 202 – 204.
10. Shulyak M. L. Kolebanie skorosti MTA peremennoy massy pri ustanovivshemsya rezhime dvizheniya [Variations in the speed of an MTA of variable mass under steady-state motion]. *MOTROL. Commission of Motorization and Energetics in Agriculture*. 2015, vol. 17, no. 7, pp. 23–27.
11. Loitsyanskiy L. G. *Mekhanika zhidkosti i gaza. Izd. 5-e, pererabotannoe* [Mechanics of fluid and gas. Ed. 5th, revised]. Moscow, Glavnaya redaktsiya fiziko-matemeticheskoy literatury izdatel'stva "Nauka" Publ., 1978. 736 p.
12. Bashliy I. D. *Kolivannya skladnykh obolonkovykh konstruksiy z ridynoyu v zadachi pro pozdovzhnyu stiykist' rakety-nosiya* [Fluctuations of complex shell structures with fluid in the problem of longitudinal stability of a carrier rocket. Candidate eng. sci. diss. dissertation (Ph. D.)]. Dni-propetrovsk, 2015. 197 p.
13. Vanin V. A., Gevorkyan Yu. L., Grigoriev A. L. *Elementy vektornogo analizu : navch. posib.* [Elements of vector analysis: tutorial]. Kharkiv, 2016. 460 p.

Надійшло (received) 16. 02.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Кожушко Андрій Павлович (Кожушко Андрей Павлович, Kozhushko Andriy Pavlovych) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-64; e-mail: Andreykozhushko7@gmail.com.

Григор'єв Олександр Львович (Григорьев Александр Львович, Grigoriev Alexander L'vovich) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.