

УДК 539.3

*Л. В. КУРПА, Г. Н. ТИМЧЕНКО, А. А. ОСЕТРОВ***НЕЛИНЕЙНЫЕ СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН С ВЫРЕЗАМИ И РАЗЛИЧНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ**

Рассмотрены задачи о геометрически нелинейных свободных колебаниях композитных элементов тонкостенных конструкций, которые моделируются многослойными пологими оболочками со сложной формой плана. Метод решения основан на совместном использовании теории R -функций, вариационных методов, процедуры Бубнова-Галеркина и метода Рунге-Кутты. В качестве иллюстрации эффективности метода решены задачи о колебаниях многослойных пологих оболочек с прямоугольным жестко закрепленным отверстием и различными граничными условиями на внешнем контуре. Для аппроксимации построенного решения использованы степенные полиномы и сплайны. Достоверность разработанного программного обеспечения проверена на тестовых задачах.

Ключевые слова: многослойные пологие оболочки, вырезы, теория R -функций, нелинейные колебания.

*Л. В. КУРПА, Г. М. ТИМЧЕНКО, А. О. ОСЕТРОВ***НЕЛІНІЙНІ ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ БАГАТОШАРОВИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК І ПЛАСТИН З ВИРІЗАМИ І РІЗНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ**

Розглянуто ефективний метод дослідження геометрично нелінійних вільних коливань композитних елементів тонкостінних конструкцій, які моделюються багатошаровими пологими оболонками з отворами. Запропонований метод базується на сумісному використанні теорії R -функцій, варіаційних методів та процедури Бубнова-Гальоркіна. Розв'язано низку задач про лінійні та нелінійні коливання багатошарових пологих оболонок з жорстко закріпленим прямокутним отвором для різних граничних умов на зовнішньому контурі. Для розв'язання задач було використано поліноміальну та сплайн-апроксимацію невизначених компонент в структурах розв'язку.

Ключові слова: багатошарові пологі оболонки, отвір, теорія R -функцій, нелінійні коливання.

*L. V. KURPA, G. N. TIMCHENKO, A. A. OSETROV***NONLINEAR FREE VIBRATIONS OF MULTILAYERED SHALLOW SHELLS AND PLATES WITH CUTOUTS AND VARIOUS BOUNDARY CONDITIONS**

In this paper, we consider an effective method for investigating geometrically nonlinear free vibrations of composite elements of thin-walled structures that are modeled by multilayered shallow shells with a clamped cut. The proposed method is based on the joint use of the theory of R -functions, variational methods and the Bubnov-Galerkin procedure. A set of new problems of linear and nonlinear vibrations of multilayered shallow shells with clamped rectangular cutout and different boundary conditions on external contour is solved. Polynomial and spline-approximation are used for undefined components to obtain results.

Key words: multilayered shallow shells, cutout, theory of R -functions, nonlinear vibrations.

Введение. Исследованиям нелинейных колебаний пластин и пологих оболочек, в том числе с отверстиями, посвящен целый ряд работ, например, [1 – 8] и др. Однако, следует отметить, что в известных нам работах рассмотрены оболочки только со свободными прямоугольными или круглыми отверстиями. Так, например, в работах [7, 8] рассмотрены колебания 8-ми слойных оболочек двойкой кривизны с квадратным планом и свободным центральным отверстием. Конечно, такие отверстия широко используются при проектировании тонкостенных конструкций, и подобные работы имеют большое значение для практики. Но, тем не менее, форма и способы закрепления отверстий, а также краев оболочки, могут быть самыми разнообразными. Для исследования динамического поведения оболочек с закрепленными отверстиями может быть эффективно использована *теория R -функций*.

В настоящей работе рассмотрены многослойные пологие оболочки с прямоугольной формой плана и с прямоугольным жестко закрепленным отверстием. На внешнем контуре оболочка зашкреплена по двум противоположным сторонам или на отдельных участках этих сторон, а на остальной части внешнего контура – свободна. Для решения задачи о геометрически нелинейных колебаниях таких оболочек предложено развитие метода, рассмотренного ранее в работах [9 – 11]. Этот метод относится к численно-аналитическим и является бессеточным. Метод основан на совместном использовании теории R -функций [12], вариационных методов, *процедуры Бубнова – Галеркина и метода Рунге – Кутты*. Математическая постановка задачи выполнена в рамках уточненной теории первого порядка (*типа Тимошенко*). Соответствующее программное обеспечение создано в программной системе POLE-RL [12]. С целью подтверждения полученных результатов были использованы различные полные системы функций для аппроксимации неопределенных компонент в построенных структурах решения [10, 12], а именно: степенные полиномы и сплайны [13].

Постановка задачи. Рассмотрим тонкую многослойную пологую оболочку постоянной толщины h симметричной структуры. Предполагается, что проскальзывание и расслоение слоев отсутствует. В рамках уточненной теории первого порядка, учитывающей сдвиговые деформации, математическая постановка задачи о свободных колебаниях оболочки формулируется в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений

© Л. В. Курпа, Г. Н. Тимченко, А. А. Осетров, 2018

движения [15, 16]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{11}}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial y} &= m_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial N_{12}}{\partial x} + \frac{\partial N_{22}}{\partial y} = m_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + k_1 N_{11} + k_2 N_{22} + N_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{\partial M_{12}}{\partial y} - Q_x &= m_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial M_{22}}{\partial y} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x} - Q_y = m_2 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $w(x, y, t)$ – перемещения точек координатной поверхности; $\psi_x(x, y, t)$, $\psi_y(x, y, t)$ – углы поворота нормали координатной поверхности; N_{11}, N_{12}, N_{22} и M_{11}, M_{12}, M_{22} представляют собой усилия и моменты в координатной поверхности на единицу длины; Q_x, Q_y – поперечные усилия.

Выражения для усилий $\{N\} = \{N_{11}, N_{22}, N_{12}\}^T$ и моментов $\{M\} = \{M_{11}, M_{22}, M_{12}\}^T$ в матричном виде могут быть представлены следующим образом:

$$\{N\} = [C]\{\varepsilon\}, \quad \{M\} = [D]\{\chi\}. \quad (2)$$

Поперечные усилия Q_x и Q_y определяются с помощью формул:

$$Q_x = C_{55}\varepsilon_{13} + C_{45}\varepsilon_{23}, \quad Q_y = C_{45}\varepsilon_{13} + C_{44}\varepsilon_{23}.$$

Выражения для деформаций $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}\}^T$ и $\{\chi\} = \{\chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12}\}^T$ в случае нелинейного деформирования оболочки определяются формулами:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x} - k_1 w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} - k_2 w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2; \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \varepsilon_{13} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x; \quad \varepsilon_{23} = \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y; \\ \chi_{11} &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}; \quad \chi_{22} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}; \quad \chi_{12} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}. \end{aligned}$$

Матрицы $[C]$, $[D]$ в выражениях (2) имеют следующий вид:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}.$$

Элементы C_{ij}, D_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) матриц $[C], [D]$, а также $C_{45}, C_{54}, C_{44}, C_{55}$ и значения m_1, m_2 в уравнениях (1) вычисляются по известным формулам [7, 9, 17, 18]. Значения k_1, k_2 совпадают со значениями кривизн оболочки в направлениях Ox и Oy соответственно.

Система уравнений (1) дополняется соответствующими граничными и начальными условиями, которые будут представлены ниже при решении конкретных задач.

Метод решения. В соответствии с предложенным в [9, 17, 11, 18] алгоритмом, неизвестные функции $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $w(x, y, t)$, $\psi_y(x, y, t)$, $\psi_x(x, y, t)$ представляются в виде

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= y_1(t) \cdot w_1(x, y), \quad \psi_x(x, y, t) = y_1(t) \cdot \psi_{x_1}(x, y), \quad \psi_y(x, y, t) = y_1(t) \cdot \psi_{y_1}(x, y); \\ u(x, y, t) &= y_1(t) \cdot u_1(x, y) + y_1^2(t) \cdot u_2(x, y), \quad v(x, y, t) = y_1(t) \cdot v_1(x, y) + y_1^2(t) \cdot v_2(x, y), \end{aligned} \quad (3)$$

где $y_1(t)$ – это неизвестная функция, зависящая от времени, а функции $u_1, v_1, w_1, \psi_{x_1}, \psi_{y_1}$ представляют собой компоненты собственного вектора $\vec{U} = (u_1, v_1, w_1, \psi_{x_1}, \psi_{y_1})$ для первой формы собственных колебаний, найденного в результате решения линейной задачи. Функции u_2, v_2 являются решением системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} L_{11}u_2 + L_{12}v_2 = -Nl_1^{(2)}(w_1); \\ L_{21}u_2 + L_{22}v_2 = -Nl_2^{(2)}(w_1). \end{cases} \quad (4)$$

Выражения $Nl_k^{(2)}(w_1)$, ($k = 1, 2$), стоящие в правых частях системы уравнений (4), описаны подробно в [9, 17, 18].

Система уравнений (4), дополненная соответствующими граничными условиями, также как и линейная задача о свободных колебаниях пологих оболочек, решена с помощью *вариационного метода Рунца* и теории

R – функций [12 – 14].

Подстановка выражений для неизвестных функций (3) в систему уравнений (1) с последующим применением процедуры Бубнова – Галеркина приводит к обыкновенному нелинейному дифференциальному уравнению

$$y_1''(t) + \omega_1^2 y_1(t) + \beta \cdot y_1^2(t) + \gamma \cdot y_1^3(t) = 0. \quad (5)$$

Формулы для коэффициентов β, γ в (5) получены и приведены в работах [9, 17, 18].

Для решения уравнения (5) в настоящей работе использован метод Рунге – Кутты.

Численные результаты. В работах [9, 11, 17, 18] предложенный алгоритм был апробирован на ряде тестовых задач и использован для исследования пологих оболочек различной геометрической формы. В настоящей работе основное внимание уделено исследованию оболочек с прямоугольными отверстиями. Главной особенностью изучаемых оболочек является то, что отверстия жестко защемлены, а граничные условия на внешнем контуре представляют комбинацию жесткой заделки и свободных участков границы.

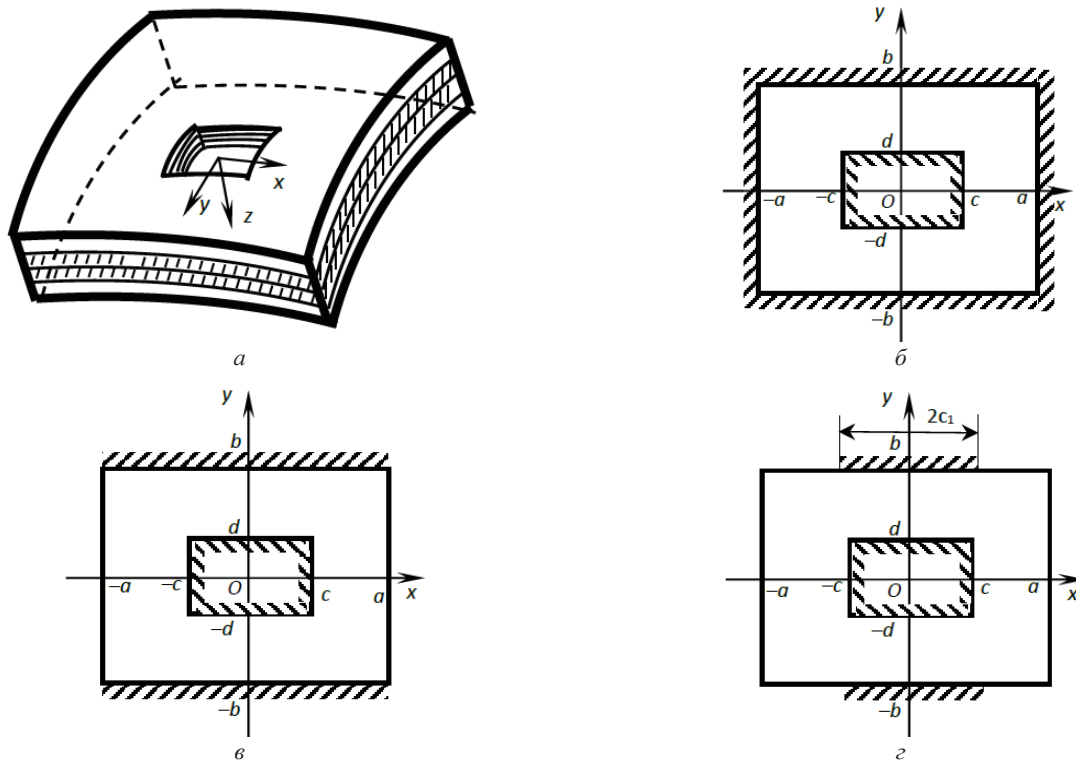


Рис. 1 – Формы исследуемой оболочки и условий её закрепления: а – форма оболочки; б – жестко закреплена по всему контуру; в – жестко закреплена по всему контуру отверстия и на сторонах $y = \pm b$; г – жестко закреплена по всему контуру отверстия и на участках $y = \pm b, -c_1 \leq x \leq c_1$.

Рассмотрим четырехслойную симметричного строения пологую оболочку толщины $h/(2a) = 0.1$, вид которой представлен на рис. 1.

Предполагается, что оболочка жестко закреплена по всему контуру отверстия. На внешнем контуре рассмотрены три вида граничных условий:

- оболочка защемлена по всему контуру, то есть на сторонах $x = \pm a, y = \pm b$ (рис. 1, б);
- оболочка защемлена на сторонах $y = \pm b$ и свободна на сторонах $x = \pm a$ (рис. 1, в);
- оболочка защемлена на участках $y = \pm b, -c_1 \leq x \leq c_1$ и свободна на оставшейся части внешнего контура (рис. 1, г).

Механические характеристики слоев определяются равенствами:

$$E_1/E_2 = 25, \quad G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0.5, \quad G_{23}/E_2 = 0.2, \quad \nu_{12} = 0.25.$$

Геометрические параметры приняты следующими: $a/b = 1$; $c/2a = 0.15$; $c/d = 2$. Кривизны оболочек $k_1 = 2a/R_1, k_2 = 2a/R_2$ принимают значения: $k_1 = 0.1, k_2 = 0$ (цилиндрическая оболочка, Сул.); $k_1 = k_2 = 0.1$ (сферическая оболочка, Сph.); $k_1 = 0.1, k_2 = -0.1$ (оболочка в виде гиперболического параболоида, Нур.).

Задача 1. Пусть оболочка жестко защемлена по всему внешнему контуру (рис. 1, б).

Для решения линейной задачи воспользуемся теорией R – функций и вариационным методом Ритца [11]. При этом для аппроксимации неопределенных компонент в структурных формулах, будем использовать сплай-

ны Шенберга 3-й степени, а также степенные полиномы. Сравнение значений основных собственных частот

$$\Lambda = \omega_{1l} (2a)^2 \sqrt{\rho / E_2 h^2} \text{ для упаковки слоев } [0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ] \text{ и } [45^\circ/-45^\circ/-45^\circ/45^\circ],$$

полученных с помощью различных аппроксимационных средств, показано в табл. 1.

Таблица 1 – Основные частоты Λ оболочек (СС)

упаковка \ аппроксимация	spli. [10x10]	poly.	Расхождение, %	
[0°/90°/90°/0°]	$k_1 = k_2 = 0.1$	35.968	36.009	0.11
	$k_1 = 0.1; k_2 = 0$	35.839	35.854	0.04
	$k_1 = 0.1; k_2 = -0.1$	35.980	35.998	0.05
[45°/-45°/-45°/45°]	$k_1 = k_2 = 0.1$	35.790	35.311	1.36
	$k_1 = 0.1; k_2 = 0$	35.579	35.094	1.38
	$k_1 = 0.1; k_2 = -0.1$	35.526	35.039	1.39

Результаты табл. 1 показывают, что для жестко защемленной по внутреннему и внешнему контурам оболочки значения собственных частот не существенно зависят от способа укладки слоев при малых значениях кривизны. При этом расхождение результатов при использовании сплайнов и полиномов не превышает 1.5 %, если выбрать степени аппроксимирующих полиномов для функций u, v, ψ_x, ψ_y равные 15, а для функции W – равные 16. Заметим, что степенные полиномы выбраны с учетом симметрии задачи.

В результате решения нелинейной задачи были получены скелетные кривые для цилиндрической панели (рис. 2, а), а также для оболочек двойкой кривизны: сферической (рис. 2, б), и оболочки типа гиперболического параболоида (рис. 2, в). Изучено поведение кривых отклика в зависимости от способа укладки слоев оболочки: [90°/0°/0°/90°], [0°/90°/90°/0°], [45°/-45°/-45°/45°], [30°/-30°/-30°/30°].

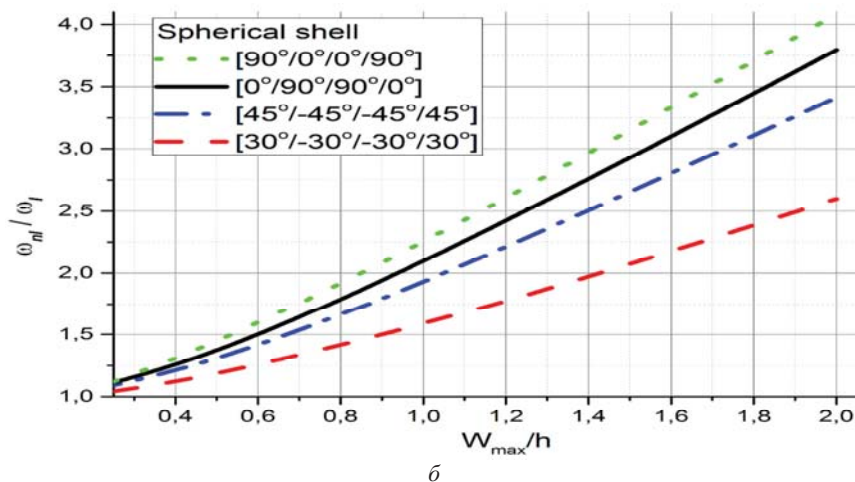
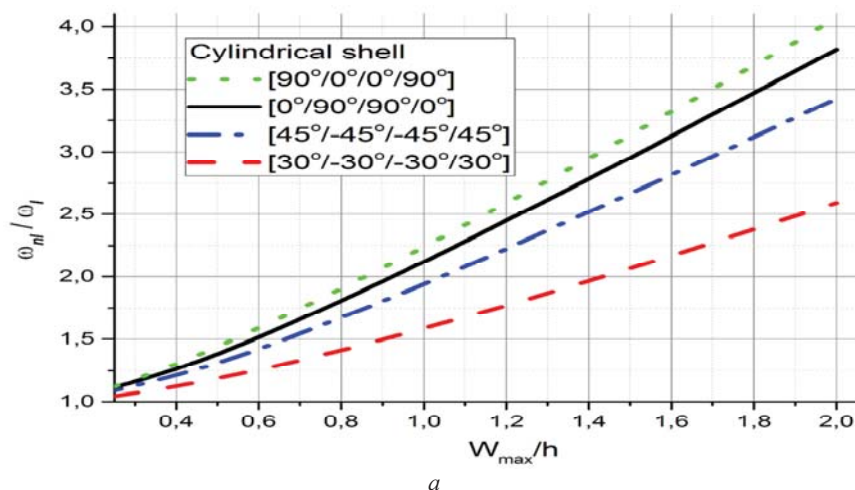


Рис. 2 – Скелетные кривые для оболочек СС (рис. 1, б): а – для цилиндрической оболочки; б – для сферической оболочки.

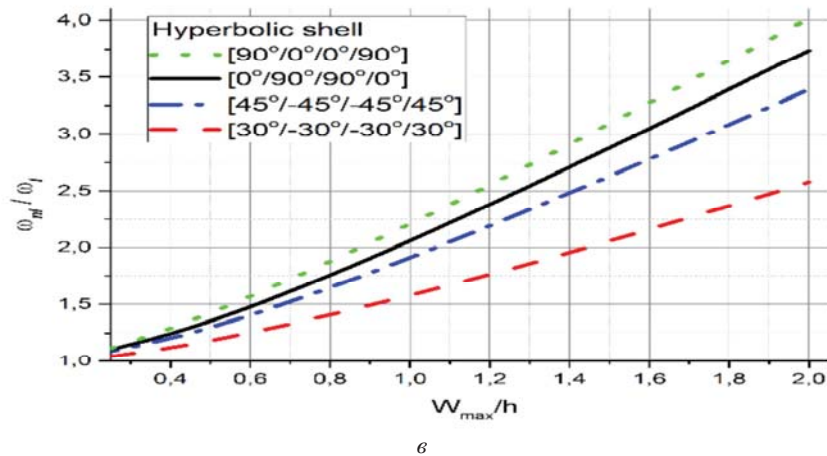


Рис. 2 – Скелетные кривые для оболочек СС (рис. 1, б): ν – для оболочки в виде гиперболического параболоида.

Анализ результатов, приведенных на рис. 2, показывает, что наиболее жесткое поведение наблюдается для оболочек с упаковкой слоев $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$, а наименее жесткое для $[30^\circ/-30^\circ/-30^\circ/30^\circ]$. Следует заметить, что в данном случае влияние кривизны на поведение скелетных кривых также несущественно при одинаковой упаковке слоев. Их расхождение не превышает 2 %, что объясняется способом закрепления оболочки.

Задача 2. Пусть оболочка свободна на сторонах $x = \pm a$ и полностью ($c_1/2a = 0.5$) или частично ($0 < c_1/2a < 0.5$) жестко защемлена на сторонах $y = \pm b$ (граничные условия рис. 1, б и 1 в соответственно). В результате проведения вычислительного эксперимента было установлено, что и в этом случае влияние кривизны на собственные значения незначительно. Поэтому ниже, в табл. 2, представлены значения собственных частот только для сферической оболочки и различных углов армирования при изменении длины участка закрепления на внешнем контуре. Структура решения, удовлетворяющая условиям жесткой заделки, была выбрана в виде

$$u = \omega_{cl} \Phi_1, \quad u = \omega_{cl} \Phi_2, \quad u = \omega_{cl} \Phi_3, \quad u = \omega_{cl} \Phi_4, \quad u = \omega_{cl} \Phi_5,$$

где Φ_i , ($i = \overline{1, 5}$) – это неопределенные компоненты структуры решения [11].

Уравнение жестко защемленного участка было построено с помощью теории R – функций в виде:

$$\omega_{cl}(x, y) = (f_3 \vee_0 f_4) \wedge_0 (f_2 \vee_0 f_5),$$

где

$$f_2 = (b^2 - y^2)/2b \geq 0, \quad f_3 = (x^2 - c^2)/2c \geq 0, \quad f_4 = (y^2 - d^2)/2d \geq 0, \quad f_5 = (x^2 - c_1^2)/2c_1 \geq 0.$$

В табл. 2 приведены значения основной собственной частоты $\Lambda = \omega_{cl}(2a)^2 \sqrt{\rho/E_2 h^2}$ сферической оболочки для различных значений углов армирования и длины жестко закрепленного участка.

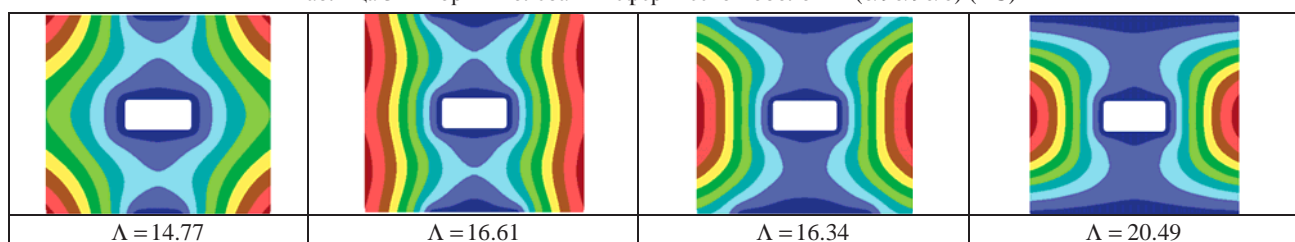
Таблица 2 – Основные частоты Λ оболочек (FC)

способ укладки слоев	$c_1/2a = 0$	$c_1/2a = 0.1$	$c_1/2a = 0.2$	$c_1/2a = 0.3$	$c_1/2a = 0.4$	$c_1/2a = 0.5$
$[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$	8.48	14.77	16.61	18.34	19.67	20.49
$[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$	9.41	9.99	11.14	13.74	17.11	19.07
$[30^\circ/-30^\circ/-30^\circ/30^\circ]$	6.28	12.55	15.15	17.86	18.92	19.13
$[45^\circ/-45^\circ/-45^\circ/45^\circ]$	8.60	10.86	13.18	17.06	19.43	19.78

Очевидно, что с увеличением длины жестко закрепленного участка границы внешнего контура, жесткость оболочки существенно возрастает, значительно увеличивая первую собственную частоту.

В табл. 3 приведены формы колебаний, соответствующие основной частоте, полученные при варьировании значений $c_1/2a = 0.1, 0.2, 0.3, 0.5$.

Таблица 3 – Формы колебаний сферической оболочки (0/90/90/0) (FC)



Результаты решения нелинейной задачи приведены в виде скелетных кривых на рис. 3 для сферической оболочки с углами армирования ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) для разной длины жестко заземленного участка. Кривая, соответствующая $c_1/2a = 0.5$, имеет наиболее жесткий характер, а наиболее мягкое поведение скелетной кривой наблюдается для $c_1/2a = 0.1$.

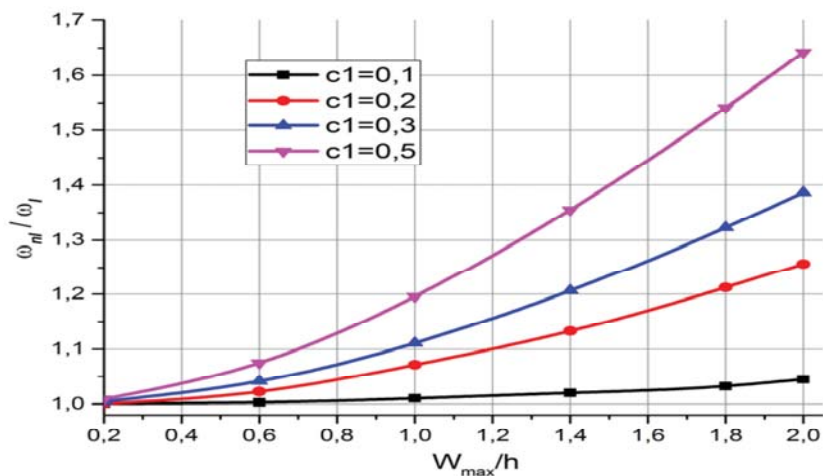


Рис. 3 – Скелетные кривые для оболочек FC (рис. 1, з).

Изучено также влияние кривизны оболочек на поведение скелетных кривых.

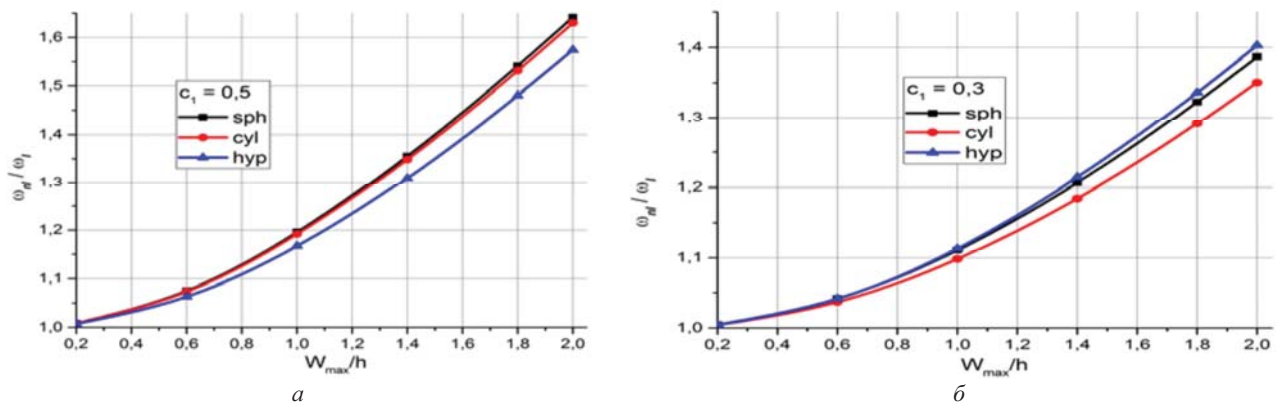


Рис. 4 – Скелетные кривые для оболочек FC (рис. 1, в и з): а – при $c_1 = 0.5$; б – при $c_1 = 0.3$.

Следует заметить, что, как и в задаче 1, для граничных условий рис. 1, б, в скелетные кривые достаточно близки друг к другу, то есть влияние кривизны незначительно (рис. 4).

Выводы. Предлагается численно-аналитический метод для анализа нелинейных колебаний многослойных пологих оболочек с жестко закрепленными отверстиями при смешанных граничных условиях на внешнем контуре в рамках уточненной теории первого порядка. С помощи теории R – функций построены системы координатных функций, точно удовлетворяющих главным граничным условиям. Для решения нелинейной задачи предложен метод сведения исходной нелинейной системы дифференциальных уравнений к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению, которое решено методом Рунге – Кутты. В работе изучено влияние кривизны, упаковки слоев и различных граничных условий, в том числе и смешанных, на скелетные кривые и спектр собственных колебаний оболочек. Предложенный метод позволяет, путем варьирования геометрических и механических параметров тонкостенных элементов конструкций, подбирать необходимые характеристики в заданных режимах эксплуатации конструкции, обеспечивая их прочность и долговечность.

Список литературы

1. Chia C. Y. Geometrically nonlinear behavior of composite plates: review// Applied mechanics Reviews. – 1988. – vol. 41. – no. 12. – pp. 439 – 451.
2. Alhaazza K. A., Alhaazza A. A. A review of the vibrations of plates and shells // The Shock and Vibration Digest. – 2004. – vol. 36. – no. 5. – pp. 377 – 395.
3. Qatu M. S., Sullivan R. W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells : 2000–2009 // Composite Structures. – 2010. – no. 93 (1). – pp. 14 – 31.
4. Alijani F., Amabili M. Non-linear vibrations of shells : A literature review from 2003 to 2013 // International Journal of Non-linear Mechanics. –

2014. – no. 58. – pp. 233 – 257.
5. Sivakumar K., Iyengar N. G. R., Dep K. Free vibration of laminated composite plates with cutout // J. of Sound and vibration. – 1999. – no. 221 (3). – pp. 443 – 470.
 6. Reddy J. N. Large amplitude flexural vibrations of layered composite plates with cutouts // J. of Sound and Vibration. – 1982. – no. 831. – pp. 1 – 10.
 7. Nanda N., Bandyopadhyay J. N. Nonlinear Free Vibration Analysis of Laminated Composite Cylindrical Shells with Cutout // Journal of Reinforced Plastics and Composites. – 2007. – vol. 26 (Issue 14). – pp. 1413 – 1427.
 8. Nanda N., Bandyopadhyay J. N. Large amplitude free vibration of laminated composite shells with cutout // Aircraft Engineering and Aerospace Technology : An Int. J. – 2008. – no. 80/2. – pp. 165 – 174.
 9. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Investigating geometrically nonlinear vibrations of laminated shallow shells with layers of variable thickness via the R -functions theory // Composite Structures. – 2015. – vol. 125. – pp. 575 – 585.
 10. Курпа Л. В., Мазур О. С., Шматко Т. В. Применение теории R -функций к решению нелинейных задач динамики многослойных пластин. – Харьков : ООО «В деле», 2016. – 492 с.
 11. Kurpa L., Timchenko G., Osetrov A. Application of R -functions Theory to Nonlinear Vibration Problems of Laminated Shallow Shells with Cutouts // Proceedings of the 5th International Conference on Nonlinear Dynamics ND-KhPI2016 September 27 – 30. Kharkov, Ukraine. – 2016. – pp. 451 - 455.
 12. Рвачев В. Л. Теория R -функций и некоторые ее приложения. – Киев : Наук. Думка, 1982. – 552 с.
 13. Курпа Л. В., Осетров А. А. Исследование собственных колебаний пологих оболочек с использованием метода R -функций и сплайн-аппроксимации // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2007. – № 4. – С. 83 – 93.
 14. Rvachev V. L., Kurpa L. V. The R -functions in Problems of Plate Theory. – Kiev : Naukova Dumka, 1987 (in Russian). – 175 p.
 15. Ambartsumian S. A. The general theory of anisotropic shells. – Moscow : Nauka, 1974 (in Russia). – 448 p.
 16. Vol'mir A. S. Nonlinear Dynamics of Plates and Shells. – Moscow : Nauka, 1972 (in Russia). – 432 p.
 17. Kurpa L. V. Nonlinear Free Vibrations of Multilayer Shallow Shells with Asymmetric Structure and With a Complicated Form of the Plan // Journal of Mathematical Sciences. – 2009. – Vol. 162 (Issue 1). – pp. 85 – 98.
 18. Timchenko G. N., Budnikov N. A. Geometrically Nonlinear Vibrations of Laminated Shallow Shells with Mixed Boundary Conditions // Proceedings of the Fourth Int. Conference «Nonlinear Dynamics», June 19 – 22 Sevastopol. – Kharkov : Tochka, 2013. – pp. 347 – 350.

References (transliterated)

1. Chia C. Y. Geometrically nonlinear behavior of composite plates: review. *Applied mechanics Reviews*. 1988, vol. 41, no. 12, pp. 439–451.
2. Alhaazza K. A., Alhaazza A. A. A review of the vibrations of plates and shells. *The Shock and Vibration Digest*. 2004, vol. 36, no. 5, pp. 377–395.
3. Qatu M. S., Sullivan R. W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells : 2000–2009. *Composite Structures*. 2010, no. 93 (1), pp. 14–31.
4. Alijani F., Amabili M. Non-linear vibrations of shells: A literature review from 2003 to 2013. *International Journal of Non-linear Mechanics*. 2014, no. 58, pp. 233–257.
5. Sivakumar K., Iyengar N. G. R., Dep K. Free vibration of laminated composite plates with cutout. *Journal of Sound and vibration*. 1999, no. 221 (3), pp.443–470.
6. Reddy J. N. Large amplitude flexural vibrations of layered composite plates with cutouts. *Journal of Sound and Vibration*. 1982, no. 831, pp. 1–10.
7. Nanda N., Bandyopadhyay J. N. Nonlinear Free Vibration Analysis of Laminated Composite Cylindrical Shells with Cutout. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. 2007, vol. 26 (Issue 14), pp. 1413–1427.
8. Nanda N., Bandyopadhyay J. N. Large amplitude free vibration of laminated composite shells with cutout. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology : An Int. J.* 2008, no. 80/2, pp.165–174.
9. Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T. Investigating geometrically nonlinear vibrations of laminated shallow shells with layers of variable thickness via the R -functions theory. *Composite Structures*. 2015, vol. 125, pp. 575–585.
10. Kurpa L. V., Mazur O. S., Shmatko T. V. Primenenie teorii R -funktsiy k resheniyu nelineynykh zadach dinamiki mnogoslonykh plastin : O. S. [Application of R -function theory to solving nonlinear problems of dynamics of multilayered plates]. Kharkov, ООО "V dele" Publ., 2016. 492 p.
11. Kurpa L., Timchenko G., Osetrov A. Application of R -functions Theory to Nonlinear Vibration Problems of Laminated Shallow Shells with Cutouts. *Proceedings of the 5th International Conference on Nonlinear Dynamics ND-KhPI2016 September 27–30*. Kharkov, Ukraine. 2016, pp. 451–455.
12. Rvachyev V. L. *Teoriya R -funktsiy I nekotorye eye prilozheniya* [R -function theory and some of its applications]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1982. 552 p.
13. Kurpa L. V., Osetrov A. A. Issledovanie sobstvennykh kolebaniy pologikh obolochek s ispol'zovaniem metoda R -funktsiy I splayn-approksimatsii [Studying characteristic vibrations of shallow shells using method of R -function and spline-approximation]. *Matematychni metody ta fizyko-mekhanichni polya*. [Mathematical methods and physical and mechanical fields]. 2007, no. 4, pp. 83–93.
14. Rvachev V. L., Kurpa L. V. *The R -functions in Problems of Plate Theory*. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1987 (in Russian). 175 p.
15. Ambartsumian S. A. *The general theory of anisotropic shells*. Moscow, Nauka Publ., 1974 (in Russia). 448 p.
16. Vol'mir A. S. *Nonlinear Dynamics of Plates and Shells*. Moscow, Nauka Publ., 1972 (in Russia). 432 p.
17. Kurpa L. V. Nonlinear Free Vibrations of Multilayer Shallow Shells with Asymmetric Structure and With a Complicated Form of the Plan. *Journal of Mathematical Sciences*. 2009, vol. 162 (Issue 1), pp. 85–98.
18. Timchenko G. N., Budnikov N. A. Geometrically Nonlinear Vibrations of Laminated Shallow Shells with Mixed Boundary Conditions. *Proceedings of the Fourth Int. Conference "Nonlinear Dynamics", June 19–22. Sevastopol*. Kharkov, Tochka Publ., 2013, pp. 347–350.

Поступила (received) 17. 02.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Курпа Лідія Василівна (Kurpa Lidiya Vasilyevna) – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-32; e-mail: kurpalidia@gmail.com.

Тимченко Галина Миколаївна (Timchenko Galina Nikolaevna) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-32; e-mail: gntimchenko2000@gmail.com.

Осетров Андрій Олександрович (Osetrov Andrey Aleksandrovich) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-32; e-mail: andy.osetrov@gmail.com.

УДК 519.6

О. С. МЕЛЬНИК, М. С. ГОРБАРЧУК**МАЖОРИТАРНІ НАНОПРИСТРОЇ ПОСЛІДОВНОСТНОГО ТИПУ**

Описується комп'ютерне проектування надійних послідовних наноприладів з мажоритарними структурами. При побудові мажоритарних наносхем на базі технологій коміркових квантових автоматів використовується теорія кінцевих автоматів. Розглянуті базові принципи побудови та особливості функціонування тригерних наноелементів. Розроблені математичні моделі швидкодіючих одноелектронних нано-лічильників додавання і віднімання. Створені послідовні нанопристрої із застосуванням системи автоматизованого проектування (САПР) QCADesigner.

Ключові слова: мажоритарний елемент, послідовні нанопристрої, квантові автомати, одноелектроніка, автоматизоване проектування.

О. С. МЕЛЬНИК, М. С. ГОРБАРЧУК**МАЖОРИТАРНЫЕ НАНОПРИБОРЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТНОГО ТИПА**

Описывается компьютерное проектирование надежных последовательных наноприборов с мажоритарными структурами. При построении мажоритарных наносхем на базе технологий воротниковых квантовых автоматов используется теория конечных автоматов. Рассмотрены базовые принципы построения и особенности функционирования Триггерных наноэлементов. Разработаны математические модели быстродействующих одноэлектронных нано счетчиков сложения и вычитания. Созданы последовательные наноприборы с применением системы автоматизированного проектирования QCADesigner.

Ключевые слова: мажоритарный элемент, последовательные наноприборы, квантовые автоматы, одноэлектроника, автоматизированное проектирование.

О. S. MELNYK, M. S. HORBARCHUK**MAJORITY NANO-DEVICES OF SEQUENTIAL TYPE**

The paper describes the computer-aided design of reliable sequential nanoscale devices with majority structures. When constructing majority nanocircuits on the basis of technology of cellular quantum automata, the theory of finite automata is used. Basic principles of construction and peculiarities of functioning of Trigger nanoelements are considered. Mathematical models of high-speed one-electron nanocounters of addition and subtraction are developed. Sequential nanoscale devices are created using the QCADesigner automated design system.

Key words: majority element, sequential nanodevices, quantum automata, one-electronics, computer-aided design.

Вступ. Особливістю послідовних одноелектронних нанопристроїв є залежність вихідного сигналу не тільки від діючих в даний час на входах логічних змінних, але й від тих значень змінних, які діяли на входах в попередній момент часу. Для використання цих умов значення змінних повинні запам'ятовуватись логічним нанопристроєм. Функцію запам'ятовування значень логічних змінних в цифрових наносхемах виконують тригери.

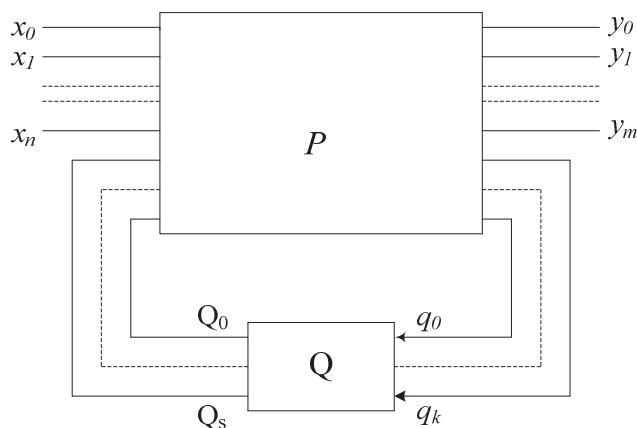


Рис. 1 – Узагальнена схема автомата з пам'яттю.

Мажоритарний нанопристрій з пам'яттю задається двома функціями: *функцією переходів* і *функцією виходів* [1]. Функція переходів визначає стан нанопристрою в момент часу $(t+1)$ залежно від стану нанопристрою і значень вхідних сигналів в попередній момент часу t :

Мажоритарні нанопристрої послідовного типу. Мажоритарні нанопристрої з пам'яттю відрізняються від мажоритарних нанопристроїв комбінаційного типу наявністю ланцюгів зворотних зв'язків. Такі нанопристрої прийнято називати *автоматами з пам'яттю*. На рис. 1 наведена узагальнена схема автомата з пам'яттю.

Введемо позначення: $X = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ – це безліч вхідних сигналів автомата з пам'яттю; $Y = (y_0, y_1, \dots, y_m)$ – безліч вихідних сигналів автомата з пам'яттю; $q = (q_0, q_1, \dots, q_k)$ – безліч сигналів збудження; $Q = (Q_0, Q_1, \dots, Q_s)$ – безліч внутрішніх станів автомата з пам'яттю.